CAPES de Mathématiques, novembre 2013

Première composition

Correction proposée par G. Dupont.

Problème 1 : Nombres irrationnels

Partie A : Quelques exemples de nombres irrationnels

I.A.1. Soit n un entier naturel. Démontrer que si $\sqrt{n}$ n'est pas entier, alors il est irrationnel.

Supposons qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$. On a alors

$$p^2 = nq^2. \tag{1}$$

Considérons les décompositions en facteurs premiers de p et q :

$$p = \prod_{i \in I} p_i^{a_i}, \quad q = \prod_{i \in I} p_i^{b_i}$$

où $\{p_i\}_{i \in I}$ est un ensemble de nombres premiers deux à deux distincts et où $a_i, b_i \geq 0$ pour tout $i \in I$. Alors il suit de (1) que

$$n = \prod_{i \in I} p_i^{2(a_i - b_i)}$$

et donc

$$\sqrt{n} = \prod_{i \in I} p_i^{(a_i - b_i)} \in \mathbb{N}.$$

$\square$

I.A.2. En déduire que si p désigne un nombre premier, alors $\sqrt{p}$ est irrationnel.
D'après la question précédente, il suffit de montrer que $\sqrt{p} \notin \mathbb{N}$. Mais si $\sqrt{p} \in \mathbb{N}$, alors $p = \sqrt{p}\sqrt{p}$ et donc p est divisible par $1, \sqrt{p}$ et p. Or p étant premier, il est distinct de 0 et de 1 donc ces trois diviseurs sont distincts. Ainsi, p admet strictement plus de deux diviseurs, une contradiction. $\square$

I.A.3. Démontrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.
Supposons qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q}$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q} &\Leftrightarrow q \ln 2 = p \ln 3 \\
&\Leftrightarrow e^{q \ln 2} = e^{p \ln 3} \\
&\Leftrightarrow 2^q = 3^p \\
&\Leftrightarrow q = p = 0,
\end{aligned}$$

une contradiction. $\square$

I.A.4. On rappelle que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. On se propose de démontrer que e est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe p et q, entiers naturels non nuls, tels que $e = \frac{p}{q}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction. Pour tout entier naturel, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \textbf{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

I.A.4.1 Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis montrer que

$$u_q < e < v_q.$$

On commence par remarquer que la suite v_n n'est pas bien définie en $n = 0$. Ceci ne pose cependant pas de problème pour la suite. Nous allons donc montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(k+1)!} > 0$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!} \\
&= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} \\
&= -\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement décroissante.

Pour montrer que les suites sont adjacentes, il suffit alors de montrer que la suite $(u_n - v_n)$ tend vers 0. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n - v_n = \frac{1}{n\cdot n!} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Ainsi, (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Or on sait que (u_n) tend vers e donc v_n tend aussi vers e. Puisque (u_n) est strictement croissante, tous ses termes sont strictement inférieurs à sa limite. De même, puisque (v_n) est strictement décroissante, tous ses termes sont strictement supérieurs à sa limite. En particulier,

$$u_q < e < v_q.$$

□

I.A.4.2. Aboutir à une contradiction en multipliant les termes de cet encadrement par $q!\cdot q$.

$$\begin{aligned}
u_q < e < v_q &\Leftrightarrow q\cdot q!\cdot u_q < q\cdot q!\cdot e < q\cdot q!\cdot v_q \\
&\Leftrightarrow q\cdot q!\cdot u_q < p\cdot q! < q\cdot q!\cdot u_q + 1.
\end{aligned}$$

Mais

$$q\cdot q!\cdot u_q = q\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N},$$

donc $p\cdot q!$ est un entier compris strictement entre deux entiers consécutifs, une contradiction. □

Partie B : Une preuve de l'irrationalité de π

On se propose ici de démontrer que le nombre π est un nombre irrationnel. Pour cela, on fait l'hypothèse qu'il existe a et b, entiers naturels non nuls, tels que $\pi = \frac{a}{b}$ et on démontre que cette hypothèse conduit à une contradiction. Étant donnés un entier naturel non nul n et un réel x, on pose :

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \text{ et } P_0(x) = 1.$$

Etant donné un entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin(x)dx.$$

I.B.1.1. Pour un entier naturel non nul n, exprimer la dérivée de P_n et fonction de P_{n-1}.
Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{1}{n!}\left[nx^{n-1}(a-bx)^n - nbx^n(a-bx)^{n-1}\right] \\ &= (a-bx)\left[\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(a-bx)^{n-1}\right] - bx\left[\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}(a-bx)^{n-1}\right] \\ &= (a-2bx)P_{n-1}(x).. \end{aligned}$$

Et si $n=1$, on a

$$P_1'(x) = a-2bx = (a-2bx)P_0(x).$$

Ainsi,

(2) $$P_n'(x) = (a-2bx)P_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

□

I.B.1.2. Calculer $\sup_{x\in[0,\pi]}|P_n(x)|$ en fonction de a, b et n.
La fonction polynomiale P_n est continue sur $[0,\pi]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[0,\pi]$. Ainsi, ce sup existe et est un max. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n$ donc P_n est positif sur $[0,\pi]$ et strictement positif sur $]0,\pi[$. Puisque, $P_n(0) = P_n(\pi) = 0$, P_n atteint son maximum en $x_0 \in]0,\pi[$ et en ce point, on doit avoir $P_n'(x_0) = 0$, et donc d'après (2), on a $(a-2bx_0)P_{n-1}(x_0) = 0$. Or $P_{n-1}(x_0) > 0$ donc $a - 2bx_0 = 0$, c'est à dire $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\sup_{x\in[0,\pi]}|P_n(x)| = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n.$$

□

I.B.1.3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $n = 0$, P_n est constant et le résultat suit directement. Sinon,

$$\begin{aligned} P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) &= \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{b} - x\right)^n\left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}\frac{1}{b^n}(a-bx)^n(bx)^n \\ &= \frac{1}{n!}(a-bx)^n(x)^n \\ &= P_n(x). \end{aligned}$$

□

I.B.1.4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n > 0.$$

On a vu que $P_n(x) \geq 0$ sur $[0,\pi]$ et on sait que $\sin(x) \geq 0$ sur $[0,\pi]$. Ainsi, $f : x \mapsto P_n(x)\sin(x)$ est positive sur $[0,\pi]$. Il s'ensuit que

$$I_n = \int_0^{\pi} f(x)dx \geq 0.$$

Puisque f est continue et positive, on sait (et on le remontrera en II.C.2.2) que $I_n = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[0, \pi]$. Or

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n > 0.$$

Ainsi, $I_n > 0$. □

I.B.1.5. Après avoir justifié que la suite de terme général $\frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0, démontrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Par croissances comparées, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $(a^2)^n < n!$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour $n \geq N$, on a

$$0 \leq \frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n \leq \frac{\pi}{(4b)^n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$ tend vers 0.

Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $0 \leq \sin(x) \leq 1$ et $0 \leq P_n(x) \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$. Ainsi,

$$0 \leq I_n \leq \int_0^\pi \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n = \frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Il s'ensuit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. □

I.B.2. En distinguant les trois cas suivants, démontrer que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs.

I.B.2.1. $0 \leq k \leq n-1$**.**

On commence par remarquer que puisque $P_n(x) = P_n\left(\frac{a}{b} - x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P_n^{(k)}(x) = P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b} - x\right)$, et ce, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer le résultat pour $P_n^{(k)}(0)$ ou pour $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$. Nous utiliserons aussi cette remarque en I.B.2.2.

En abusant légèrement des notations, il suit de la formule de Leibniz,

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(x^n)^{(l)}\left((a-bx)^n\right)^{(k-l)}.$$

Mais pour tout $l \in \{0, \ldots, n-1\}$, $(x^n)^{(l)} = \frac{n!}{(n-l)!}x^{n-l}$ donc $\left((x^n)^{(l)}\right)_{x=0} = 0$. Ainsi, tous les termes de la sommation dans $P_n^{(k)}(x)(0)$ sont nuls et donc $P_n^{(k)}(x)(0) = 0$. □

I.B.2.2. $n \leq k \leq 2n-1$**.**

On nous propose d'utiliser la relation entre $P_n^{(k)}(0)$ et le coefficient de x^k dans $P_n(x)$. Si on écrit $P_n(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ où d est le degré de P_n (qui est égal à $2n$), une récurrence immédiate montre que $P_n^{(k)}(0) = k!\cdot a_k$. Il s'agit alors d'identifier le coefficient de x^k dans $P_n(x)$, ce qui s'obtient par le biais du binôme de Newton appliqué à $(a-bx)^n$. Cependant, puisque nous l'avons déjà utilisée à la question précédente, nous allons préférer ici utiliser la formule de Leibniz.

On a

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(x^n)^{(l)}\left((a-bx)^n\right)^{(k-l)}.$$

Donc

$$P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(x^n)^{(l)}\left((a-bx)^n\right)^{(k-l)}\right)_{|x=0}.$$

Nous avons vu à la question précédente que $\left((x^n)^{(l)}\right)_{x=0} = 0$ pour tout $l < n$. D'autre part, $(x^n)^{(l)} = 0$ pour tout $l > n$ puisque x^n est de degré n. Ainsi, le seul terme qui subsiste dans $P_n^{(k)}(0)$ est celui correspondant à $l = n$ et dans ce cas $(x^n)^{(l)} = n!$. Alors

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(0) &= \frac{1}{n!}\left(\binom{k}{n} n!\,((a-bx)^n)^{(k-n)}\right)_{|x=0} \\ &= \binom{k}{n}\frac{n!}{(2n-k)!}(-b)^{k-n}a^{2n-k}. \end{aligned}$$

Puisque $2n - k > 0$ et $k - n \geq 0$, chacun des facteurs est entier et donc $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$. $\square$

I.B.2.3. $k \geq 2n+1$**.**
P_n est un polynôme de degré $2n$ donc ses dérivées d'ordre k avec $k \geq 2n+1$ sont nulles. Ainsi, $P_n^{(k)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

I.B.3.1. Démontrer que pour tout entier naturel n, I_n est un entier relatif. On pourra procéder par intégrations par parties successives.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)dx \\ &= [-P_n(x)\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(x)\cos(x)dx \\ &= P_n(\pi) + P_n(0) + \int_0^\pi P_n'(x)\cos(x)dx \\ &= \int_0^\pi P_n'(x)\cos(x)dx \quad (\text{ car } P_n(0) = P_n(\pi) = 0) \\ &= [P_n'(x)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(2)}(x)\sin(x)dx \\ &= [P_n'(x)\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(2)}(x)\sin(x)dx \\ &= -\int_0^\pi P_n^{(2)}(x)\sin(x)dx \\ &= \left[P_n^{(2)}(x)\cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(3)}(x)\cos(x)dx \\ &= -P_n^{(2)}(\pi) - P_n^{(2)}(0) - \int_0^\pi P_n^{(3)}(x)\cos(x)dx. \end{aligned}$$

On continue ainsi l'intégration par parties jusqu'à obtenir une intégrale de la forme $\int_0^\pi P_n^{(k)}(x)\cos(x)dx$ avec $k \geq 2n+1$ et on a ainsi écrit I_n comme combinaison linéaire entière de $P_n^{(k)}(0)$ et de $P_n^{(k)}(\pi)$, lesquels sont entiers d'après la question I.B.2. $\square$

I.B.3.2. Conclure quant à l'hypothèse $\pi = \frac{a}{b}$.
D'après la question I.B.3.1, $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'entiers et d'après la question I.B.1.5, I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi, la suite est nécessairement stationnaire en 0, c'est à dire qu'il existe $N \geq \mathbb{N}$ tel que $I_n = 0$ pour $n \geq N$. Or on a montré en I.B.1.4 que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, une contradiction. Ainsi, la seule hypothèse que nous avons effectuée, à savoir que $\pi = \frac{a}{b}$, est fausse. $\square$

Partie C : Développement en série d'Engel et applications

I.C.1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geq 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \cdots a_k}$$

est convergente de limite inférieure ou égale à $\dfrac{1}{a_0 - 1}$.

La suite (a_n) étant croissante, on a $\frac{1}{a_l} \leq \frac{1}{a_0}$ pour tout $l \geq 0$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{a_0 \cdots a_k} \leq \left(\frac{1}{a_0}\right)^{k+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{k+1} \\
&= \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{k} \\
&< \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{a_0} \cdot \frac{1}{1 - 1/a_0} \\
&= \frac{1}{a_0 - 1},
\end{aligned}$$

la série géométrique de raison $1/a_0$ étant convergente puisque $1/a_0 \leq 1/2 < 1$.

Puisque (S_n) est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs, elle est croissante. Puisqu'elle est majorée par $\frac{1}{a_0-1}$ elle converge vers une limite finie qui est donc inférieure ou égale à $\frac{1}{a_0-1}$. □

Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que x admet un *développement en série de Engel*. On notera $x = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$.

I.C.2. Soit $x \in]0,1]$. On définit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad \textbf{et} \quad x_{n+1} = a_n x_n - 1$$

où E désigne la fonction partie entière.

I.C.2.1. Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

Il s'agit de montrer que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous allons montrer par récurrence sur n que $x_n > 0$. Si $n = 0$, on a $x_0 = x > 0$. Montrons maintenant que s'il existe un rang n tel que $x_n \neq 0$, alors nécessairement $x_{n+1} \neq 0$. On a

$$x_{n+1} = a_n x_n - 1 = x_n \left(1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right)\right) - 1 = x_n + x_n E\left(\frac{1}{x_n}\right) - 1.$$

Mais par définition de la fonction partie entière, on a

$$E\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{1}{x_n} < E\left(\frac{1}{x_n}\right) + 1.$$

En multipliant par x_n, on obtient

$$x_n E\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq 1 < x_n E\left(\frac{1}{x_n}\right) + x_n.$$

et donc

$$0 < x_n E\left(\frac{1}{x_n}\right) + x_n - 1 = x_{n+1},$$

ce qui prouve l'hérédité. Ainsi, $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. $\square$

I.C.2.2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
On a montré à la question I.C.2.1 que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, (x_n) est décroissante si et seulement si $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a_n - \frac{1}{x_n} = 1 - E\left(\frac{1}{x_n}\right) - \frac{1}{x_n} \leq 1$$

car $E(\alpha) - \alpha \leq 0$ pour tout réel α. $\square$

I.C.2.3. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $a_0 \geq 2$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction E est croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $a_n = E\left(\frac{1}{x_n}\right) + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (a_n) est croissante. En outre,

$$a_0 = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right)$$

mais $x \leq 1$ donc $\frac{1}{x} \geq 1$ et donc $E\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ et $a_0 \geq 2$. $\square$

I.C.2.4. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}.$$

En déduire que x admet un développement en série de Engel.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}.$$

Pour $n = 0$, on a

$$S_0 + \frac{x_1}{a_0} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0}(a_0 x_0 - 1) = x_0 = x.$$

Supposons maintenant que n est un entier tel que

$$x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}.$$

Alors

$$S_{n+1} + \frac{x_{n+2}}{a_0 \cdots a_{n+1}} = S_n + \frac{1}{a_0 \cdots a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}x_{n+1} - 1}{a_0 \cdots a_{n+1}} = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = x,$$

d'où l'hérédité. Ainsi,

$$x = S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite S_n converge d'après la question I.C.1 et on note s sa limite, qui admet le développement en série de Engel $s = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} \leq \frac{x_0}{a_0^{n+1}}$$

car (x_n) est décroissante et (a_n) croissante. Or $a_0^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} = s$$

et donc $x = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$. □

I.C.3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 \geq 2$, $b_0 \geq 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [a_0, \ldots, a_n, \ldots] = \quad [b_0, \ldots, b_n, \ldots].$$

On pose $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$.

I.C.3.1. Montrer que $[a_{n_0}, \ldots, a_n, \ldots] = \quad [b_{n_0}, \ldots, b_n, \ldots]$.

$$\begin{aligned}
[a_0, \ldots, a_n, \ldots] = \quad [b_0, \ldots, b_n, \ldots] &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{b_0 \cdots b_k} \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{b_0 \cdots b_k} + \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{b_0 \cdots b_k} \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} + \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{b_0 \cdots b_k} \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{b_0 \cdots b_k} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a_0 \cdots a_{n_0-1}} \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n_0} \cdots a_k} = \frac{1}{b_0 \cdots b_{n_0-1}} \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{b_{n_0} \cdots b_k} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a_0 \cdots a_{n_0-1}} \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n_0} \cdots a_k} = \frac{1}{a_0 \cdots a_{n_0-1}} \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{b_{n_0} \cdots b_k} \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n_0} \cdots a_k} = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{1}{b_{n_0} \cdots b_k} \\
&\Leftrightarrow [a_{n_0}, \ldots, a_n, \ldots] = \quad [b_{n_0}, \ldots, b_n, \ldots]
\end{aligned}$$

□

I.C.3.2. Démontrer que si $x = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$ alors $a_0 x - 1 \leq x$ et en déduire que $a_0 = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right)$.

Si $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k}$, alors

$$a_0 x - 1 = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_k} - 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{0+1} \cdots a_{k+1}}.$$

Mais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $\frac{1}{a_{i+1}} \leq \frac{1}{a_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et donc

$$a_0 x - 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{0+1} \cdots a_{k+1}} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} = x.$$

On a $a_0 x - 1 \leq x$ donc $a_0 \leq 1 + \frac{1}{x}$. D'autre part, $x = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_1 \cdots a_k} > \frac{1}{a_0}$ car les a_n sont positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $a_0 > \frac{1}{x}$. Il s'ensuit que

$$a_0 \leq 1 + \frac{1}{x} < a_0 + 1.$$

Puisque a_0 est entier, on a donc

$$a_0 = E\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right).$$

□

I.C.3.3. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle $]0,1]$.
Soient $[a_0,\dots,a_n,\dots]$ et $[b_0,\dots,b_n,\dots]$ deux développements distincts en série de Engel de $x\in]0,1]$. D'après la question I.C.3.1, on peut supposer sans perte de généralité que $a_0\neq b_0$. Mais d'après la question I.C.3.2 appliquée respectivement aux deux développements, on a

$$a_0 = 1+E\left(\frac{1}{x}\right) = b_0,$$

une contradiction. □

I.C.4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :

I.C.4.1. une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à c, avec $c\geq 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{a_0\cdots a_k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{c}\right)^{k+1}\\ &= \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{c}\right)^{k}\\ &= \frac{1}{c}\frac{1}{1-1/c}\\ &= \frac{1}{c-1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[c,\dots,c,\dots] = \frac{1}{c-1}.$$

□

I.C.4.2. la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_n = n+2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{a_0\cdots a_k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2\cdot 3\cdots(k+2)}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+2)!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}-2\\ &= e^1-2\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[2,3,4,\dots,n+2,\dots] = e-2.$$

□

I.C.4.3. la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = (2n+1)(2n+2)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1\cdot 2)(3\cdot 4)\cdots((2k+1)\cdot(2k+2))} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+2)!} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2(k+1))!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} - 1 \\
&= \cosh(1) - 1
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[2, 12, \ldots, (2n+1)(2n+2), \ldots] = \cosh(1) - 1.$$

□

I.C.5. Déterminer le développement en série de Engel du nombre $\cosh(\sqrt{2}) - 2$.

$$\begin{aligned}
\cosh(\sqrt{2}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k)!} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k)!} \\
&= 2 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+2}}{(2(k+2))!}.
\end{aligned}$$

Soit alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4} = 6$$

et

$$a_n = \frac{(2n+3)(2n+4)}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{a_0 \cdots a_k} = \frac{4}{4!} \cdot \frac{2}{5\cdot 6} \cdots \frac{2}{(2(k+1)+1)(2(k+2))} = \frac{2^{k+2}}{(2(k+2))!}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k+2}}{(2(k+2))!} = \cosh(\sqrt{2}) - 2.$$

□

I.C.6. Démontrer que $x \in]0,1]$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de son développement en série de Engel est stationnaire. Pour le sens direct, on pourra commencer par procéder à la division euclidienne de x par son numérateur.

Supposons d'abord $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire et fixons un entier a et un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = a$ pour tout $n \geq N$. Par croissance de (a_n), on a donc $a \geq a_0 \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} &= S_{N-1} + \frac{1}{a_0 \cdots a_N} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{N+1} \cdots a_{N+k}} \\ &= S_{N-1} + \frac{1}{a_0 \cdots a_N} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^k \\ &= S_{N-1} + \frac{1}{a_0 \cdots a_N} \frac{1}{1-1/a} \\ &= S_{N-1} + \frac{1}{a_0 \cdots a_N} \frac{a}{a-1}\end{aligned}$$

mais S_{N-1} est rationnel comme somme finie de rationnels et l'autre terme est rationnel comme produit de rationnels. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k} \in \mathbb{Q}.$$

Pour la réciproque, posons

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a_0 \cdots a_k}$$

et supposons qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $x = \frac{p}{q}$.

On écrit $q = bp + r$ avec $b \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r \leq p - 1$. Alors il suit de la question I.C.3.2 que

$$a_0 = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + E\left(\frac{bp+r}{p}\right) = 1 + b.$$

Alors

$$x_1 = a_0 x_0 - 1 = (1+b)\left(\frac{p}{bp+r}\right) - 1 = \frac{p-r}{bp+r} = \frac{p_1}{q}$$

avec $0 < p_1 < p$.

On écrit alors $q = b_1 p_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 < p_1 < p$. Mais alors

$$a_1 = 1 + E\left(\frac{1}{x_1}\right) = 1 + E\left(\frac{b_1 p_1 + r_1}{p_1}\right) = 1 + b_1.$$

Par récurrence, on voit que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i = 1 + b_i$ où b_i est le quotient de q par un entier p_i tel que $0 \leq p_i \leq p$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels p_i, le nombre de quotients b_i est lui-même fini. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend ses valeurs dans un ensemble fini, elle est donc bornée. Puisqu'elle est croissante, elle converge. Or $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs entières, donc elle converge si et seulement si elle est stationnaire. $\square$

Fin du premier problème.

Problème 2 : Statistiques et probabilités

Partie A : Deux indicateurs de dispersion

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de réels. On définit sur $\mathbb{R}$ les deux fonctions G et L par :

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|.$$

II.A.1. Minimisation de G

II.A.1.1. En écrivant $G(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré, démontrer que la fonction G admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G(x) = \sum_{i=1}^{n} x^2 - 2x_i x + x_i^2.$$

Donc

$$G'(x) = \sum_{i=1}^{n} 2x - 2x_i$$

et

$$G''(x) = 2n > 0.$$

Ainsi

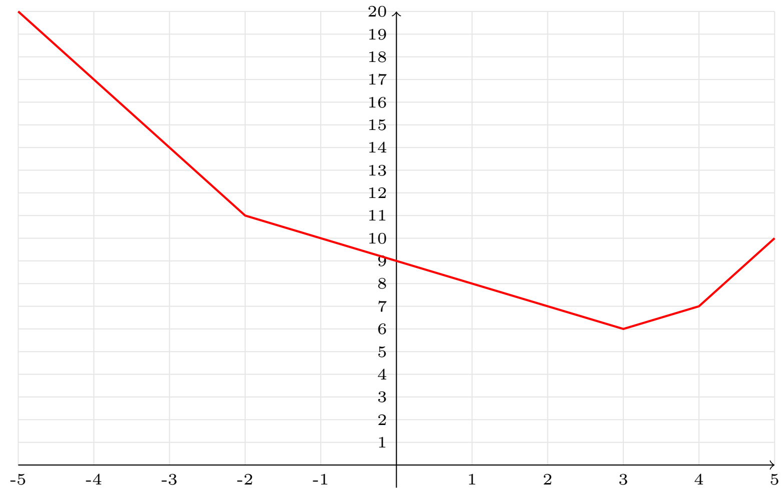
$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x - x_i) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

et par positivité de G'', la fonction G admet un minimum en $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$. $\square$

II.A.1.2. Que représente d'un point de vue statistique la valeur de x trouvée à la question 1.1 ?
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ est la moyenne arithmétique des x_i. $\square$

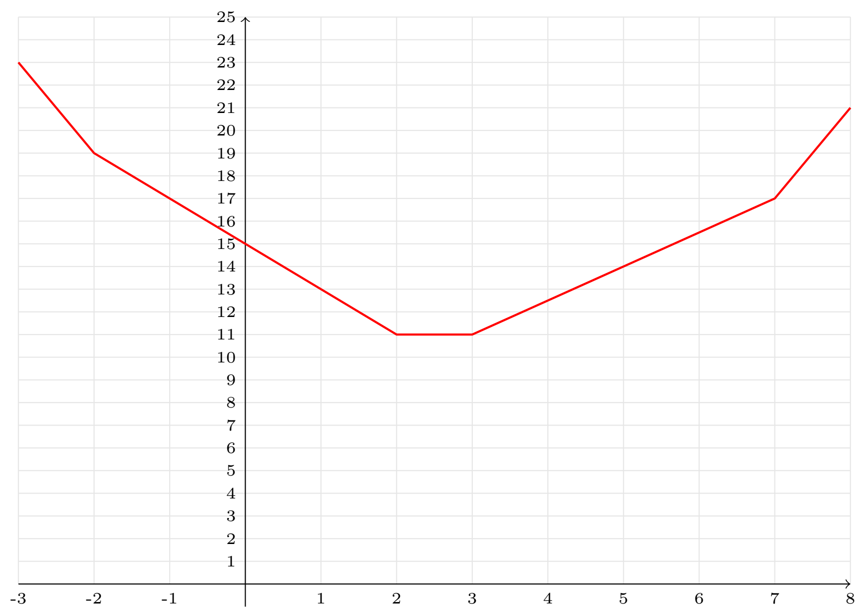
II.A.2. Minimisation de L. On supposera dans cette question que la série est ordonnée, c'est à dire que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

II.A.2.1. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où $n = 3$, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 4$.



$\square$

II.A.2.2. Représenter graphiquement la fonction L dans le cas où $n = 3$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ et $x_4 = 7$.



$\square$

II.A.2.3. Démontrer que la fonction L admet un minimum m sur $\mathbb{R}$ et indiquer pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint. On distinguera les cas n pair et n impair.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $L_i(x) = |x - x_i|$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$L_i(x) = \epsilon_i(x)(x - x_i)$$

où $\epsilon_i(x) = -1$ si $x \leq x_i$ et $\epsilon_i(x) = 1$ si $x \geq x_i$. Chaque L_i est continue et affine par morceaux. Ainsi, $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$ est continue et affine par morceaux. Plus précisément, on a

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i(x)x + b_i(x)$$

où $b_i(x) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i(x) x_i$.

L'application L est affine sur chaque intervalle, le coefficient directeur est donné par

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i(x) = \operatorname{card}\{j \mid x_j \leq x\} - \operatorname{card}\{j \mid x_j \geq x\}.$$

L'application $\sum_{i=1}^n \epsilon_i$ étant croissante de $-n$ à n, la fonction L admet un minimum en tout point x tel que $\epsilon_i(x) = 0$, c'est à dire en tout point x tel que

$$\operatorname{card}\{j \mid x_j \leq x\} = \operatorname{card}\{j \mid x_j \geq x\}.$$

Si n est impair, $n = 2p+1$, le minimum est donc atteint en x_p. Si n est pair, $n = 2p$, le minimum est atteint en tout point de l'intervalle $[x_p, x_{p+1}]$. □

2.4. Que représentent d'un point de vue statistique les valeurs de x trouvées à la question 2.3 ?
Ce sont les valeurs médianes de la série $\{x_1, \ldots, x_n\}$. □

Partie B : Théorie de l'information, le cas discret.

On se place dans cette partie dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Étant donné un entier naturel non nul n, on considère un système complet d'événements $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de probabilités respectives $(p_1, \ldots, p_n)$ toutes non nulles. On définit l'entropie de ce système par le nombre

$$H(A) = -\sum_{k=1}^n p_k \ln p_k.$$

Ce nombre quantifie l'incertitude, tandis que son opposé quantifie la quantité d'information. L'entropie doit être maximale lorsqu'aucune hypothèse ne peut être privilégiée.

II.B.1. Deux exemples. On se place ici dans le cas $n = 4$. Quatre chevaux sont au départ d'une course, et on note A_i l'événement : « le cheval numéro i remporte la course ». Calculer dans chacun des cas suivants l'entropie du système

II.B.1.1. $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$.
A étant un système complet d'événements, on a $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$. Ainsi, $p_i = 1/4$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq 4$. Alors

$$H(A) = -4 \cdot \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(4) = 2\ln(2).$$

□

II.B.1.2. $p_1 = \frac{1}{8}$, $p_2 = \frac{1}{8}$, $p_3 = \frac{1}{4}$, $p_4 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} H(A) &= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3\ln 2}{4} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2}{2} \\ &= \frac{7}{4}\ln 2. \end{aligned}$$

□

II.B.2. Cas $n = 2$. On considère un système complet $A = \{A_1, A_2\}$ et on pose $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$. Démontrer que l'entropie est maximale lorsque les deux événements A_1 et A_2 sont

équiprobables.
Soit
$$h : \begin{cases}]0,1[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x). \end{cases}$$
On a alors $H(A) = h(p)$.

h est deux fois dérivables sur $]0,1[$ et on a
$$\begin{aligned} h'(x) &= -1 - \ln(x) + 1 + \ln(1-x) \\ &= \ln(1-x) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right). \end{aligned}$$
Donc $h'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{2}$ et puisque
$$h''(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} < 0$$
pour tout $x \in]0,1[$, h atteint son maximum en $x = \frac{1}{2}$. Autrement dit, $H(A)$ est maximale quand $p = \frac{1}{2}$. $\square$

II.B.3. Cas général.

II.B.3.1. Un résultat préliminaire : l'inégalité de Jensen.
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe si :
$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$
On considère une fonction convexe f sur I, $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Démontrer que
$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$
On pourra procéder par récurrence sur n, en remarquant que si $\lambda_n \neq 1$:
$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right).$$

On le montre par récurrence sur n. Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer. Si $n = 2$, c'est précisément la définition de la convexité. Supposons donc qu'il existe une rang $n \geq 2$ tel que la propriété est vérifiée au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

On a
$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) \\ &\leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right). \end{aligned}$$
où l'inégalité provient de la propriété au rang 2.

Mais $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1}$ donc
$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$
Alors, d'après l'hypothèse de récurrence,
$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i).$$

Ainsi,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i).$$

□

II.B.3.2. On admet le théorème suivant : Si f est deux fois dérivables sur I, f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I. Démontrer que la fonction $x \mapsto x \ln x$ est convexe sur $]0,1[$.
Soit $f : x \mapsto x\ln x$. Alors f est deux fois dérivables sur $]0,1[$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre $f'(x) = 1 + \ln x$ et

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et *a fortiori* sur $]0,1[$. □

II.B.3.3. Montrer que $H(A) \leq \ln n$. Conclure.
On note toujours $f : x \mapsto x\ln x$. Alors

$$\frac{1}{n}H(A) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(p_k).$$

Mais f est convexe sur $]0,1[$, $p_k \in]0,1[$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = 1$. Ainsi, il suit de l'inégalité de Jensen que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}p_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(p_k) = \frac{H(A)}{n}.$$

Or, A étant un système complet d'événements, on a $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ et donc

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}p_k\right) = f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_k\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{\ln n}{n}.$$

Ainsi,

$$-\frac{\ln n}{n} \leq -\frac{H(A)}{n},$$

c'est à dire

$$H(A) \leq \ln n.$$

Si $p_k = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on a

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln n.$$

Ainsi, l'entropie est maximale dans le cas de l'équiprobabilité, conformément à ce qui était annoncé. □

Partie C : Théorie de l'information, le cas continu

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}$. On rappelle que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si f est positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Lorsque $f\ln f$ est intégrable, on définit l'entropie associée à f par :

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln(f(x))dx.$$

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des densités de probabilités qui possèdes une entropie. Le but de cette partie est de déterminer quelle densité maximise l'entropie, c'est à dire correspond à la quantité minimale d'information.

II.C.1. Deux exemples.
On admet que les fonctions suivantes sont des densités de probabilité. Calculer l'entropie associée à chacune d'elles.

II.C.1.1. g **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $g(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$**.**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
-\int_x^y g(t)\ln(g(t))dt &= -\int_x^y \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{t^2}{2} - \ln(\sqrt{2\pi})\right)dt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^2 dt - \ln(\sqrt{2\pi})\int_x^y \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt
\end{aligned}$$

Puisque g est une densité, la seconde intégrale tend vers 1 quand x tend vers $-\infty$ et y tend vers $+\infty$.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
-\int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^2 dt &= \int_x^y (-e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t) \cdot t dt \\
&= \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t\right]_x^y - \int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= xe^{-\frac{x^2}{2}} - ye^{-\frac{y^2}{2}} - \int_x^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot t^2 dt = \sqrt{2\pi}$$

et

$$H(g) = \frac{1}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi)).$$

□

II.C.1.2. h **définie par** $h(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ **si** $t \geq 0$**,** $h(t) = 0$ **sinon, où** λ **est un réel strictement positif.**
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < 0$ et $y > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
-\int_x^y h(t)\ln(h(t))dt &= -\int_0^y h(t)\ln(h(t))dt \\
&= -\int_0^y \lambda e^{-\lambda t}(\ln(\lambda) - \lambda t)dt \\
&= -\ln(\lambda)\int_0^y \lambda e^{-\lambda t}dt + \lambda\int_0^y \lambda t e^{-\lambda t}dt.
\end{aligned}$$

h étant une densité, on a

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\lambda\int_0^y \lambda t e^{-\lambda t}dt &= \lambda\left[-e^{-\lambda t} \cdot t\right]_0^y + \int_0^y \lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \lambda y e^{-\lambda y} + \int_0^y \lambda e^{-\lambda t}dt \\
&\xrightarrow[y:+\infty]{} 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$H(h) = 1 - \ln(\lambda).$$

$\square$

II.C.2. Deux résultats préliminaires

II.C.2.1. Démontrer que pour tous réels strictement positifs x et y :

$$x \ln y \leq x \ln x + y - x \textbf{ et } x \ln y = x \ln x + y - x \Leftrightarrow x = y.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons la fonction

$$f_x : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & x \ln y - x \ln x - y + x \end{array} \right.$$

Alors f_x est dérivable et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f_x'(y) = \frac{x}{y} - 1$$

Donc f_x est strictement croissante sur $]0, x[$, strictement décroissante sur $]x, +\infty[$ et $f_x(x) = 0$. Ainsi, $f_x(y) \leq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_x(y) = 0$ si et seulement si $y = x$. $\square$

II.C.2.2. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. Démontrer que :

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0.$$

On pourra procéder par contraposition.
Supposons f non-nulle sur $[a, b]$. Puisque f est continue, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) \neq 0$. Le point c étant intérieur à $[a, b]$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que $[c - \eta_1, c + \eta_1] \subset [a, b]$. Par continuité de f, il existe $\eta_2 > 0$ tel que $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ pour tout x tel que $|x - c| \leq \eta_2$. Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors d'après la relation de Chasles, on a

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\eta} f + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f + \int_{c+\eta}^b f.$$

f étant positive, la premier et la troisième intégrale sont positives. De plus, puisque $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ pour tout $x \in [x - \eta, x + \eta]$, on a

$$\int_a^b f \geq \int_{c-\eta}^{c+\eta} \frac{f(c)}{2} = \eta f(c) > 0.$$

$\square$

II.C.3. Une maximisation d'entropie sous contrainte de moyenne et de variance.
On s'intéresse dans cette question aux fonctions de $\mathcal{H}$ d'espérance nulle et de variance égale à 1, c'est à dire telles que :

- $t \mapsto tf(t)$ **est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale nulle,**
- $t \mapsto t^2 f(t)$ **est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1.**

On appelle $\mathcal{N}$ cet ensemble.

II.C.3.1. Démontrer que $g \in \mathcal{N}$, où g désigne la fonction définie à la question 1.1.
Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_x^y tg(t)dt = \int_x^y \frac{te^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2/2} \right]_x^y$$

qui tend vers 0 quand x et y tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = 0.$$

D'autre part,

$$\int_x^y t^2 g(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^y \frac{te^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \cdot tdt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-t^2/2} \cdot t \right]_x^y + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^y e^{-t^2/2} dt.$$

Le premier terme tend vers 0 quand x et y tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$ alors que le second terme tend vers 1. Ainsi,

$$\mathrm{Var}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)dt = 1.$$

Il s'ensuit que $g \in \mathcal{N}$. □

II.C.3.2. Soit f un élément de $\mathcal{N}$. Démontrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(g(x))dx = H(g).$$

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) \ln(g(t))dx &= \int_a^b f(x) \left(-\frac{t^2}{2} \right) dt - \ln(\sqrt{2\pi}) \int_a^b f(t)dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_a^b t^2 f(t)dt - \ln(\sqrt{2\pi}) \int_a^b f(t)dt.\end{aligned}$$

Mais puisque f est une densité de variance unitaire,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt = 1, \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \ln(g(t))dx = -\frac{1}{2} (1 + \ln(2\pi)) = -H(g).$$

□

II.C.3.3. En utilisant les résultats de la question 2, démontrer que $H(f) \leq H(g)$ et que $H(f) = H(g) \Leftrightarrow f = g$.

f et g sont à valeurs strictement positives donc il suit de la question II.C.2.1 que

$$f \ln g \leq f \ln f + g - f.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} f \ln g \leq \int_{\mathbb{R}} f \ln f + \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} f.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} f = 1,$$

donc

$$-H(g) = \int_{\mathbb{R}} f \ln g \leq \int_{\mathbb{R}} f \ln f = -H(f),$$

c'est à dire

$$H(f) \leq H(g).$$

Supposons $H(f) = H(g)$, donc

$$\int_{\mathbb{R}} f \ln g - f \ln g = 0.$$

La fonction

$$f \ln f - f \ln g + g - f$$

est continue positive mais puisque f et g sont des densités, on a

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f \ln g - f \ln g = \int_{\mathbb{R}} f \ln f - f \ln g + g - f.$$

Ainsi, il suit de la question II.C.2. que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x)(\ln f(x) - \ln g(x)) = f(x)(1 - \frac{g(x)}{f(x)}),$$

c'est à dire

$$\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g(x)}{f(x)} - 1.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, une rapide étude de fonction montre que

$$\ln(t) - t + 1 \leq 0$$

et il y a égalité si et seulement si $t = 1$. Ainsi, pour tout réel x, on a

$$\ln\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g(x)}{f(x)} - 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Il s'ensuit que $f = g$. $\square$

Fin de l'épreuve.