CAPES externe de mathématiques

Session 2016

Première composition - Problème n°1

Correction proposée par G. Dupont.

Introduction

Thème du problème. Ce premier problème de la composition 1 du CAPES externe 2016 est entièrement dévolu à des questions d'interpolation polynomiale dans le plan. Il y a essentiellement deux points de vue pour étudier ces questions et le problème aborde ces deux points de vue de manière indépendante.

Parties A, B et C : Un point de vue analytique. Etant donnée une fonction f et n points distincts $a_1, \dots, a_n$ du domaine de définition de f, on cherche à construire une fonction polynomiale de degré $n-1$ qui coïncide avec f en les a_i, chose que l'on peut faire avec les célèbres *polynômes d'interpolation de Lagrange* [1], ce qui est l'objet de la partie A. La partie B du problème est dédiée à l'estimation de la qualité de l'approximation que donne cette interpolation. La partie C étudie explicitement cette approximation polynomiale pour deux choix particuliers d'interpolations de la fonction sinus sur $[0, \pi]$.

Parties D et E : Un point de vue algébrico-géométrique. Étant donnés trois points du plan, on cherche à construire une parabole passant par ces trois points. La partie D vise à mettre en place les outils algébriques pour répondre à cette question : les non moins célèbres *déterminants de Vandermonde* [2]. La partie E consiste à appliquer les résultats de la partie précédente pour donner une condition nécessaire et suffisante pour que le problème ait une solution et, le cas échéant, pour décrire l'ensemble des solutions.

Prérequis. Les objets impliqués dans ce problème sont très classiques :
- Algèbre linéaire élémentaire dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_n[X]$ (partie A) ;
- Algèbre commutative élémentaire dans $\mathbb{R}[X]$ (partie A) ;
- Théorème de Rolle [3] (partie B) ;
- Études de fonctions usuelles (partie C) ;
- Calcul de déterminants (parties D et E) ;
- Systèmes linéaires (partie E).

Difficulté. Le candidat est guidé de près pour cette épreuve qui laisse peu de place à la prise d'initative.

Seules deux questions apparaissent d'une difficulté technique supérieure à la moyenne du problème :
- la question B.II.2 qui nécessite une récurrence pas tout à fait directe,
- la question E.I.2.b qui demande un peu de créativité pour trouver l'expression absente de l'énoncé.

---

1. Joseph Louis Lagrange, mathématicien français né à Turin (Italie) en 1736 et décédé à Paris en 1813. Il résout à l'âge de dix-neuf ans le problème isopérimétrique et donne ainsi naissance au calcul des variations. On lui doit de nombreux travaux dans différents domaines de mathématiques ainsi qu'en physique, sur la mécanique céleste ou sur la théorie des cordes vibrantes. Il aurait dit « Si j'avais été riche, je n'aurais jamais consacré ma vie aux mathématiques. »
2. Alexandre Vandermonde, né à Paris en 1735 où il décède en 1796. Il est le premier à systématiser l'étude des déterminants en tant que tels. Il participe à la fondation du Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM) en 1794.
3. Michel Rolle, mathématicien français né à Ambert en 1652 et décédé à Paris en 1719. Ses travaux se situèrent aussi bien en analyse qu'en algèbre et il fut l'un des opposants farouches à l'introduction du calcul infinitésimal.

Enoncé

Les parties D et E de ce problème sont indépendantes des parties B et C.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour m, n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leq k \leq n$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I, n fois dérivables et dont la dérivée n-ème est continue.
Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie A : Interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.
Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

A.I. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } i \neq k, \\ 1 & \textbf{si } i = k. \end{cases}$$

Vérifions d'abord que L_k satisfait les propriétés demandées. On a

$$L_k(a_k) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{a_k - a_i}{a_k - a_i} = 1$$

et, si $j \in [\![1, n]\!]$ est tel que $j \neq k$, on a

$$L_k(a_j) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{a_j - a_i}{a_k - a_i} = \frac{a_j - a_j}{a_k - a_j} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j,k}} \frac{a_j - a_i}{a_k - a_i} = 0.$$

Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ satisfait les mêmes propriétés, alors

$$P(a_i) = L_k(a_i), \quad \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Ainsi, $(P - L_k)(a_i) = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Les a_i étant supposés distincts deux à deux, le polynôme $P - L_k$ admet donc n racines. Or P et L_k appartiennent à l'espace vectoriel $R_{n-1}[X]$ et donc $P - L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ est de degré au plus $n - 1$, il s'ensuit qu'il est nécessairement nul. Autrement dit, $P = L_k$. $\square$

A.II. On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

A.II.1. Montrer que F est une application linéaire.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(a_1), \dots, (\lambda P + Q)(a_n)) \\ &= (\lambda P(a_1) + Q(a_1), \dots, \lambda P(a_n) + Q(a_n)) \\ &= \lambda(P(a_1), \dots, P(a_n)) + (Q(a_1), \dots, Q(a_n)) \\ &= \lambda F(P) + F(Q). \end{aligned}$$

Ceci prouve la linéarité de F.

□

A.II.2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

On a

$$F(L_k) = (L_k(a_1), \dots, L_k(a_n)) = (\delta_{1k}, \dots, \delta_{kn}) = e_k,$$

où δ_{ik} est le symbole de Kronecker (qui vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon).

□

A.II.3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

Il suit de la question précédente que $\mathrm{im}(F)$ contient la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\mathrm{im}(F)$ est un espace vectoriel, il contient $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et donc $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{im}(F)$. Or $\mathrm{im}(F) \subset \mathbb{R}^n$ et donc $\mathrm{im}(F) = \mathbb{R}^n$.
Puisque $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$, la surjectivité de F équivaut à sa bijectivité.

□

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A.III.1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses* $a_1, \dots, a_n$.

Soit $v = (f(a_1), \dots, f(a_n)) \in \mathbb{R}^n$. D'après la question A.II.3, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = v$, c'est-à-dire tel que $P(a_k) = f(a_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

□

A.III.2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \dots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \dots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \dots, a_n$.

Posons

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) L_i(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$P(a_k) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) L_i(a_k) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\delta_{ik} = f(a_k).$$

Il s'ensuit que P est le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$.

□

Partie B : Erreur d'interpolation

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a, b])$ et $a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a, b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ (on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a, b]$.

B.I. Soit g une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

B.I.1. Question de cours. Énoncer le théorème de Rolle.

Théorème de Rolle : Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

□

B.I.2. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

Montrons le par récurrence sur n.

Pour $n = 1$. Considérons une fonction dérivable g qui s'annule en deux points α_0, α_1. Alors il suit du théorème de Rolle que g' s'annule sur $]\alpha_0, \alpha_1[\subset [a, b]$.

Supposons la propriété vraie au rang n (avec $n \geq 1$) et considérons une fonction g dérivable $(n + 1)$ fois et s'annulant $n + 2$ fois en $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. Le théorème de Rolle appliqué à chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ montre que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, la fonction dérivée g' s'annule en un point $\gamma_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$. On a donc trouvé $n + 1$ points d'annulation pour g'. La fonction g' étant n fois dérivable, il suit de l'hypothèse de récurrence que $(g')^{(n)} = g^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

□

B.II. On fixe $c \in [a, b]$, distinct de $a_1, \ldots, a_n$. On définit la fonction g_c sur $[a, b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

B.II.1. Montrer que g_c s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$g_c(a_i) = f(a_i) - P(a_i) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{a_i - a_k}{c - a_k} = 0,$$

car $f(a_i) = P(a_i)$ et que l'un des facteurs du produit est nul.

En outre,

$$\begin{aligned} g_c(c) &= f(c) - P(c) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{c - a_k}{c - a_k} \\ &= f(c) - P(c) - (f(c) - P(c)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le point c étant supposé distinct de $a_1, \ldots, a_n$, on a bien trouvé $n+1$ points d'annulation de g_c.

$\square$

B.II.2. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a, b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.
P étant un polynôme, la fonction associée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$, de même pour la fonction

$$x \mapsto \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

Par hypothèse, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. Il s'ensuit que g_c est elle-même de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$. En particulier, g_c est n fois dérivable.

Nous avons vu à la question B.II.1 que g_c admettait $n+1$ points d'annulation distincts, il suit donc de la question B.I.2 que $g_c^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

$\square$

B.II.3. Soit h_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_c(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$. En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

Si $\pi(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ est un polynôme de degré n, on montre aisément par récurrence sur n que

$$\pi^{(n)}(X) = n! c_n.$$

Ainsi, pour déterminer l'expression de $h_c^{(n)}$, il suffit de déterminer le coefficient dominant c_n de h_c, lequel est

$$c_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{c - a_k}.$$

Ainsi,

$$h_c^{(n)} = n! \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{c - a_k}.$$

Puisque $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $P^{(n)}(X) = 0$ et donc, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} g_c^{(n)}(x) &= f^{(n)}(x) - (f(c) - P(c)) h_c^{(n)}(x) \\ &= f^{(n)}(x) - (f(c) - P(c)) n! \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{c - a_k}. \end{aligned}$$

$\square$

B.III.1. Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\xi \in [a,b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

D'après la question B.II.2, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$. En reportant dans l'expression trouvée en B.II.3, on obtient

$$f^{(n)}(\xi) - (f(c) - P(c))n! \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{c - a_k} = 0,$$

ou encore,

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

$\square$

B.III.2. Montrer que le résultat établi dans la question B.III.1 reste vrai si c est égal à l'un des a_k.

Si c est égal à l'un des a_k, le membre de droite est nul car l'un des facteurs du produit est nul. Quant au membre de gauche, il est nul car c est l'un des points d'interpolation définissant P.

$\square$

B.III.3. En déduire que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|.$$

Les questions B.III.1 et B.III.2 montrent que, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x - a_k).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &= \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (x - a_k) \right| \\ &= \frac{1}{n!} \left| f^{(n)}(\xi) \right| \prod_{k=1}^{n} |x - a_k| \\ &\leq \frac{1}{n!} \max_{y \in [a,b]} \left| f^{(n)}(y) \right| \times \max_{y \in [a,b]} \prod_{k=1}^{n} |y - a_k| . \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in [a,b]$, on obtient

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|.$$

□

Partie C : Un exemple

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array} \right.$$

C.I. Première méthode : On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses 0, $\pi/2$, π.

C.I.1. Calculer P.

On a $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Il suit donc de la question A.III.2 que

$$P(X) = \frac{X(X-\pi)}{(\pi/2-0)(\pi/2-\pi)} = -\frac{4}{\pi^2}X(X-\pi).$$

□

C.I.2. En utilisant les résultats de la partie B, montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{x\in[0,\pi]} \frac{|x(x-\pi/2)(x-\pi)|}{6}.$$

On applique la question B.III.3 avec $n = 3$, $a = 0$, $b = \pi$, $a_1 = 0$, $a_2 = \pi/2$ et $a_3 = \pi$. On obtient, pour tout $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leq \frac{1}{3!} \max_{x\in[0,\pi]} |f^{(3)}(x)| \times \max_{x\in[0,\pi]} |x(x-\pi/2)(x-\pi)| \\ &= \frac{1}{6} \max_{x\in[0,\pi]} |\sin^{(3)}(x)| \times \max_{x\in[0,\pi]} |x(x-\pi/2)(x-\pi)| \\ &= \frac{1}{6} \max_{x\in[0,\pi]} |x(x-\pi/2)(x-\pi)|, \end{aligned}$$

car $|\sin^{(3)}| = |-\cos|$ atteint son maximum, 1, en 0 et en π.

□

C.I.3. En déduire que pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

Étudions la fonction $g : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = x(x-\pi/2)(x-\pi).$$

Elle est dérivable et, pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$g'(x) = (x - \pi/2)(x - \pi) + x(x - \pi) + x(x - \pi/2) = 3x^2 - 3\pi x + \frac{\pi^2}{3}.$$

Ainsi, g' s'annule en

$$r_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6},$$

est positive sur $[0, r_1]$, négative sur $[r_1, r_2]$ et positive sur $[r_2, \pi]$.

On a $g(0) = g(\pi/2) = g(\pi) = 0$,

$$g(r_1) = \frac{\sqrt{3}\pi^3}{36} \quad \text{et} \quad g(r_2) = -g(r_1).$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		r_1		r_2		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(r_1)$	$\searrow$	$-g(r_1)$	$\nearrow$	0

Il s'ensuit que

$$\max_{x \in [0,\pi]} |g(x)| = \frac{\sqrt{3}\pi^3}{36}$$

et donc

$$\max_{x \in [0,\pi]} \frac{|x(x - \pi/2)(x - \pi)|}{6} = \frac{\sqrt{3}\pi^3}{216}.$$

Il suit alors de la question C.I.2. que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

$\square$

C.II. Seconde méthode. On choisit un entier $n \geq 1$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) d'interpolation de f aux deux points d'abscisses $\frac{k\pi}{n}$ et $\frac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{n}, \\ P_1(x) & \text{si } \dfrac{\pi}{n} \leq x < \dfrac{2\pi}{n}, \\ \vdots & \\ P_k(x) & \text{si } \dfrac{k\pi}{n} \leq x < \dfrac{(k+1)\pi}{n} (k \in [\![0, n-2]\!]), \\ \vdots & \\ P_{n-1}(x) & \text{si } \dfrac{(n-1)\pi}{n} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

C.II.1. Calculer Q_1 et Q_2. Tracer la courbe représentative de Q_2.

Q_1 est le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisses 0 et π. Puisque $f(0) = f(\pi) = 0$ et que $Q_1 \in \mathbb{R}_1[X]$, le polynôme Q_1 est nécessairement nul.

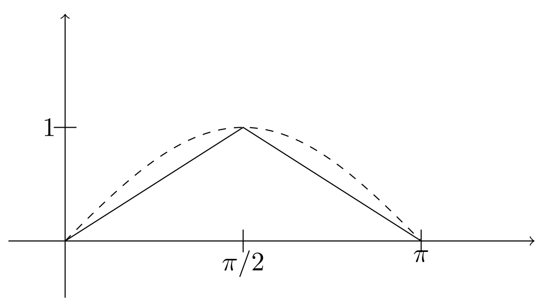
La restriction P_0 de Q_2 à $[0, \pi/2[$ est le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisses 0 et $\pi/2$. Puisque $f(0) = 0$ et $f(\pi/2) = 1$, il s'agit de fonction affine définie par

$$P_0(x) = \frac{2}{\pi}x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

La restriction P_1 de Q_2 à $[\pi/2, \pi]$ est le polynôme d'interpolation de f aux points d'abscisses $\pi/2$ et π. Puisque $f(\pi/2) = 1$ et $f(\pi) = 0$, il s'agit de fonction affine définie par

$$P_1(x) = \frac{2}{\pi}(x - \pi), \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Le graphe de la fonction Q_2 (avec celui de la fonction f en pointillé) est donc le suivant.



□

C.II.2. Justifier que Q_2 est continue sur $[0, \pi]$.

La restriction de Q_2 à chaque intervalle de la forme $[k\pi/n, (k+1)\pi/n[$ est une fonction affine, elle est donc continue. Ainsi, Q_2 est continue à droite sur $[0, \pi]$ et continue sur $[0, \pi] \setminus \{k\pi/n \,|\, k \in [\![1, n]\!]\}$.

Étudions la continuité à gauche. On remarque que Q_2 est continue en π puisque P_{n-1} l'est. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que Q_2 est continue à gauche en $k\pi/n$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$\lim_{x \to \frac{k\pi}{n}^-} Q_n(x) = \lim_{x \to \frac{k\pi}{n}^-} P_{k-1}(x) = P_{k-1}(k\pi/n) = f(k\pi/n) = P_n(k\pi/n) = Q_n(k\pi/n),$$

où, la première égalité suit de la définition de Q_n, la deuxième de la continuité de P_{k-1}, la troisième du fait que $k\pi/n$ est un point d'interpolation pour P_{k-1}, la quatrième du fait que $k\pi/n$ est un point d'interpolation pour P_k et enfin, la dernière suit de la définition de Q_n.

$\square$

C.II.3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$\left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leq \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

Posons, pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$f_k(x) = \left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

Alors f_k est une fonction polynomiale de degré 2 qui admet pour racines $k\pi/n$ et $(k+1)\pi/n$. Elle atteint donc son maximum en valeur absolue en

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{(k+1)\pi}{n}\right) = \frac{2(k+1)\pi}{2n}$$

où

$$\left|f_k\left(\frac{2(k+1)\pi}{2n}\right)\right| = \left|\frac{\pi}{2n} \times \frac{-\pi}{2n}\right| = \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

$\square$

C.II.4. Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

Soit $x \in [0, \pi]$. Il existe donc $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
|f(x) - Q_n(x)| &= |f(x) - P_k(x)| \\
&\leq \frac{1}{2!} \times \max_{x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]} |f^{(2)}(x)| \times \max_{x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]} \left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\pi^2}{4n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{8n^2},
\end{aligned}$$

la première égalité étant vraie par définition, l'inégalité suivante en appliquant la question B.III.3 à f et à P_k sur $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, l'inégalité suivante venant de la question II.C.3 et du fait que $|f^{(2)}| = |-\sin|$ est majorée par 1.

$\square$

C.III. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure ? Justifier la réponse.

Avec la première méthode, nous avons simplement pu majorer l'erreur commise par une constante (question C.I.3). Avec la seconde méthode, nous l'avons majorée à la question C.II.4 par une suite qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini (n étant le nombre de points de la subdivision de $[0,\pi]$). Ainsi, en subdivisant suffisamment l'intervalle $[0,\pi]$, on peut rendre l'erreur de la seconde méthode arbitrairement petite. Nous privilégierons donc cette dernière.

□

Partie D : Déterminant de Vandermonde

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels.

On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

D.I. Calculer le déterminer de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

Quand $n = 2$, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Quand $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ 0 & a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 \\ a_3 - a_1 & a_3^2 - a_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) \\ a_3 - a_1 & (a_3 - a_1)(a_3 + a_1) \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 \\ 1 & a_3 + a_1 \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2).
\end{aligned}$$

□

D.II. Première méthode

D.II.1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie par la question A.II. dans des bases bien choisies.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a
$$F(X^i) = (a_1^i, \dots, a_n^i).$$
Si on note $\mathcal{B}_0 = \left\{X^i \mid i \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B}_1$ celle de $\mathbb{R}^n$, on a donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}(F) = A.$$
□

D.II.2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.
Si les a_k sont deux à deux distincts, nous avons montré à la question A.II.3 que F est bijective. Il s'ensuit que toute matrice représentative de F est inversible et donc, d'après la question D.II.1, A est inversible.
□

D.II.3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux.

On peut facilement répondre à la question de deux manières.

D'un point de vue matriciel, si deux des a_k sont égaux, la matrice possède deux lignes identiques, son déterminant (qui est une forme n-linéaire alternée sur les lignes) est donc nul et A n'est pas inversible. Une autre façon de le voir matriciellement est de dire que deux lignes étant identiques, le rang de A est strictement inférieur à n, et donc A n'est pas inversible.

Du point de vue des applications linéaires, si deux des a_k sont égaux, mettons a_i et a_j, la i-ème et la j-ème coordonnée de $F(P)$ sont égales pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En particulier, les vecteurs de base e_i et e_j n'appartiennent pas à $\mathrm{im}(F)$ et F n'est donc pas surjective. Il s'ensuit que toute matrice représentative de F n'est pas inversible, A en particulier.
□

D.II.4. Conclure
Il suit de D.II.2 et D.II.3 que la matrice A est inversible si et seulement si les a_k sont deux à deux distincts.
□

D.III. Seconde méthode. On considère le polynôme
$$P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_{n-1}).$$

D.III.1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que
$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \cdots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

P est produit de $(n-1)$ polynômes unitaires de degré 1 donc P est un polynôme unitaire de degré $n-1$. Il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2} \in \mathbb{R}$ tels que
$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2}X^{n-2} + \cdots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

□

D.III.2. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{bmatrix}.$$

$$C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1 = \begin{bmatrix} a_1^{n-1} + \lambda_{n-2}a_1^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \\ \vdots \\ a_{n-1}^{n-1} + \lambda_{n-2}a_{n-1}^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \\ a_n^{n-1} + \lambda_{n-2}a_n^{n-2} + \cdots + \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_{n-1}) \\ P(a_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{bmatrix},$$

la dernière égalité venant du fait que $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont racines de P.

□

D.III.3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant étant une forme n-linéaire alternée sur les colonnes, on a

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n) \\ &= \det(C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n + \lambda_{n-2}C_{n-1} + \cdots + \lambda_0 C_1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix} \\ &= P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue en développant par rapport à la dernière colonne.

□

D.III.4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \le k < l \le n} (a_l - a_k).$$

Montrons le par récurrence sur n. Pour $n = 2$, ce résultat a été établi à la question D.I.

Supposons la propriété vraie à un certain rang $n-1$ et montrons qu'elle est vraie au rang n. D'après la question D.III.3, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = P(a_n) \prod_{1 \leq k < l \leq n-1} (a_l - a_k),$$

la dernière égalité étant obtenue par hypothèse de récurrence.

Mais

$$P(a_n) = \prod_{1 \leq k \leq n-1} (a_n - a_k)$$

donc

$$\det(A) = \left(\prod_{1 \leq k \leq n-1} (a_n - a_k) \right) \times \left(\prod_{1 \leq k < l \leq n-1} (a_l - a_k) \right) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k).$$

□

D.III.5. Conclure.

La question D.III.4 montre que

$$\det(A) = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (a_l - a_k).$$

Ainsi,

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a_i \neq a_j, \quad \forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j.$$

Nous retrouvons donc le résultat obtenu à la question D.II.4.

□

Partie E : Application à la recherche de paraboles

On fixe trois points distincts A_1, A_2 et A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3.

E.I. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i), pour $1 \leq i \leq 3$.

E.I.1. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α), avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha &= b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha &= b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha &= b_3. \end{cases}$$

On note $\mathcal{E}$ l'espace euclidien muni du repère précédent. Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'axe parallèle à D et soient α, β, γ réels, avec $\alpha \neq 0$ tels que

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y) \in \mathcal{E} \mid y = \gamma + \beta x + \alpha x^2\right\}.$$

Alors, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$,

$$A_i \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \gamma + a_i\beta + a_i^2\alpha = b_i$$

et donc

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 \in \mathcal{P} \\ A_2 \in \mathcal{P} \\ A_3 \in \mathcal{P} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \gamma + a_1\beta + a_1^2\alpha & = b_1, \\ \gamma + a_2\beta + a_2^2\alpha & = b_2, \\ \gamma + a_3\beta + a_3^2\alpha & = b_3. \end{array}\right.$$

□

E.I.2. Montrer que si deux points A_i ont la même abscisse, (S) n'a aucune solution.

Soient $i, j \in [\![1, 3]\!]$ distincts tels que $a_i = a_j$. Les points A_i et A_j étant supposés distincts, on a nécessairement $b_i \neq b_j$. Ainsi, si (α, β, γ) est solution de (S), alors

$$b_i = \gamma + a_i\beta + a_i^2\alpha = \gamma + a_j\beta + a_j^2\alpha = b_j,$$

une contradiction.

□

E.I.3. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

E.I.3.a. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α).

$$(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Posons

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}.$$

Les a_i étant supposés deux à deux distincts, il suit des questions D.II.4 ou D.III.5 que A est inversible. (S) est donc un système de Cramer et il existe bien un unique triplet $(\gamma, \beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3$ solution de (S).

□

E.I.3.b. Exprimer α sous la forme d'un quotient de deux déterminants.
Nous avons vu à la question précédente que la matrice A est inversible de sorte que

$$A \times \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Or nous savons que
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^tC,$$
où C est la comatrice de A, c'est-à-dire la matrice $C = [c_{ij}]_{1\leq i,j\leq 3}$ où c_{ij} est le cofacteur d'indice (i,j) de la matrice A.

Il suit de la formule du produit matriciel (en tenant compte de la transposition !) que
$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\det(A)}\left(c_{1,3}b_1 + c_{2,3}b_2 + c_{3,3}b_3\right)\\ &= \frac{1}{\det(A)}\left(b_1\begin{vmatrix} 1 & a_2\\ 1 & a_3\end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} 1 & a_1\\ 1 & a_3\end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} 1 & a_1\\ 1 & a_2\end{vmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{\det(A)}\times\begin{vmatrix} b_1 & 1 & a_1\\ b_2 & 1 & a_2\\ b_3 & 1 & a_3\end{vmatrix},\end{aligned}$$
la dernière égalité étant obtenue en reconnaissant un développement par rapport à la première colonne.

□

E.I.3.c. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\alpha = 0$**.**

ii) $\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1\\ a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix} = 0.$

iii) A_1**,** A_2 **et** A_3 **sont alignés.**

D'après la question précédente,
$$\alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b_1 & 1 & a_1\\ b_2 & 1 & a_2\\ b_3 & 1 & a_3\end{vmatrix} = 0.$$
Mais
$$\begin{vmatrix} b_1 & 1 & a_1\\ b_2 & 1 & a_2\\ b_3 & 1 & a_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & a_1\\ b_2-b_1 & 0 & a_2-a_1\\ b_3-b_1 & 0 & a_3-a_1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_2-b_1 & a_2-a_1\\ b_3-b_1 & a_3-a_1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1\\ a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix},$$
ce qui montre l'équivalence de i) et ii).

D'autre part, (a_2-a_1, b_2-b_1) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ et (a_3-a_1, b_3-b_1) celles de $\overrightarrow{A_1A_3}$. Ainsi,
$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1\\ a_3-a_1 & b_3-b_1\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A_2} \text{ et } \overrightarrow{A_1A_3} \text{ sont colinéaires,}$$
ce qui montre l'équivalence de ii) et iii).

□

E.I.4. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1**,** A_2 **et** A_3 **ne sont pas alignés et aucune des droites** (A_1A_2)**,** (A_2A_3) **et** (A_1A_3) **n'est parallèle à** D**.**

Nous avons vu aux questions E.I.2 et E.I.3.a que (S) admettait une solution si et seulement si aucune des droites (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D. Dans ce cas, on a une unique solution (α,β,γ) de (S) et on a montré en E.I.3.c que $\alpha \neq 0$ si et seulement A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Ainsi, (S) admet une solution (α, β, γ) de (S) et $\alpha \neq 0$ si et seulement si A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D. Or nous avons montré à la question E.I.1 que le problème posé est équivalent à la recherche d'une solution (α, β, γ) de (S) et $\alpha \neq 0$.

$\square$

E.II.1. On suppose A_1, A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1, A_2 et A_3.
Supposons qu'une telle parabole $\mathcal{P}$ existe et notons Δ son axe. Soit D une droite parallèle à Δ. Alors $\mathcal{P}$ est une parabole passant par A_1, A_2 et A_3 et d'axe parallèle à D. Or nous avons montré en E.I.4 qu'il n'existe pas de telle parabole quand A_1, A_2 et A_3 sont alignés, une contradiction.

$\square$

E.II.1. On suppose A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1, A_2 et A_3 et préciser les directions de leurs axes.
Munissons $\mathcal{E}$ d'une origine O et notons $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ l'ensemble des droites vectorielles de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire des droites qui passent par O. On note $\mathcal{P}_{A_1,A_2,A_3}$ l'ensemble des paraboles de $\mathcal{E}$ qui passent par A_1, A_2 et A_3.

$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ est un ensemble infini (car en bijection avec $[-\pi, \pi[$ via l'angle en l'origine à une droite de référence donnée). Notons $\mathcal{P}_{A_1,A_2,A_3}$ les éléments de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ respectivement parallèles à (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3). Nous avons montré à la question E.I.4 que pour chaque droite $D \in \mathbb{P}(\mathcal{E}) \setminus \{D_1, D_2, D_3\}$, il existe une parabole P_D passant par A_1, A_2 et A_3 d'axe parallèle à D. Ainsi, on a défini une application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \setminus \{D_1, D_2, D_3\} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{A_1,A_2,A_3} \\ D & \mapsto & P_D. \end{array} \right.$$

Φ est injective car si $\Phi(D) = \Phi(D')$, alors D et D' sont parallèles mais elles passent toutes deux par l'origine et donc $D = D'$.

On a ainsi construit une application injective de l'ensemble infini $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \setminus \{D_1, D_2, D_3\}$ vers $\mathcal{P}_{A_1,A_2,A_3}$, ce qui montre que $\mathcal{P}_{A_1,A_2,A_3}$ est infini et que les directions possibles des axes des paraboles de $\mathcal{P}_{A_1,A_2,A_3}$ sont toutes les droites vectorielles possibles sauf D_1, D_2 et D_3.

$\square$

***

Fin du problème n°1