Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Problème n° 1

Les parties **D** et **E** de ce problème sont indépendantes des parties **B** et **C**.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I, n fois dérivables et dont la dérivée n-ième est continue.
Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k, \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

II. On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), \dots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que F est une application linéaire.

2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses* $a_1, \dots, a_n$.

2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \dots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \dots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \dots, a_n$.

Partie B : erreur d'interpolation

Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f une fonction dans $\mathcal{C}^n([a, b])$ et $a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels appartenant à $[a, b]$. On note P le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ (on rappelle que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$). Le but de cette partie est de majorer la valeur absolue de la différence entre f et P sur le segment $[a, b]$.

I. Soit g une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. **Question de cours.** Énoncer le théorème de Rolle.

2. On suppose que g est n fois dérivable sur $[a, b]$ et s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que la fonction dérivée n-ième $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

II. On fixe $c \in [a, b]$, distinct de $a_1, \ldots, a_n$. On définit la fonction g_c sur $[a, b]$ par

$$g_c(x) = f(x) - P(x) - (f(c) - P(c)) \prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}.$$

1. Montrer que g_c s'annule en au moins $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

2. Montrer que g_c est n fois dérivable sur $[a, b]$ puis que $g_c^{(n)}$ s'annule en au moins un point de $[a, b]$.

3. Soit h_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_c(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{x - a_k}{c - a_k}$.

En remarquant que h_c est une fonction polynôme de degré n, donner une expression de $h_c^{(n)}$, puis de $g_c^{(n)}$.

III. **1.** Déduire des questions précédentes qu'il existe un réel $\zeta \in [a, b]$ tel que

$$f(c) - P(c) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=1}^{n} (c - a_k).$$

2. Montrer que le résultat établi dans la question III.1. reste vrai si c est égal à l'un des a_k.

3. En déduire que $\displaystyle\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| \times \max_{x \in [a,b]} \prod_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Partie C : un exemple

Dans cette partie, on interpole de deux manières différentes la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x). \end{array} \right.$$

I. **Première méthode**. On considère le polynôme d'interpolation P de f en les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{2}, \pi$.

1. Calculer P.

2. En utilisant les résultats de la partie **B**, montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \max_{x \in [0,\pi]} \frac{|x(x - \frac{\pi}{2})(x - \pi)|}{6}.$$

3. En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216}.$$

II. **Seconde méthode**. On choisit un entier $n \geqslant 1$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note P_k le polynôme (de degré inférieur ou égal à 1) d'interpolation de f aux deux points d'abscisses $\dfrac{k\pi}{n}$ et $\dfrac{(k+1)\pi}{n}$. On note Q_n la fonction affine par morceaux définie par :

$$Q_n(x) = \begin{cases} P_0(x) \text{ si } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{n}, \\[2mm] P_1(x) \text{ si } \dfrac{\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{2\pi}{n}, \\ \quad \vdots \\ P_k(x) \text{ si } \dfrac{k\pi}{n} \leqslant x < \dfrac{(k+1)\pi}{n} \ (k \in [\![0, n-2]\!]), \\ \quad \vdots \\ P_{n-1}(x) \text{ si } \dfrac{(n-1)\pi}{n} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

1. Calculer Q_1 et Q_2. Tracer la courbe représentative de Q_2.

2. Justifier que Q_n est continue sur $[0, \pi]$.

3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que pour tout $x \in \left[\dfrac{k\pi}{n}, \dfrac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$\left|\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)\left(x - \frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4n^2}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{8n^2}.$$

III. Parmi ces deux méthodes d'approximation, quelle est la meilleure ? Justifier la réponse.

Partie D : déterminant de Vandermonde

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels.
On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

I. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

II. Première méthode.

1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question A.II. dans des bases bien choisies.
2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.
3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?
4. Conclure.

III. Seconde méthode. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_{n-1}).$$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2} X^{n-2} + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

2. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \dots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k).$$

5. Conclure.

Partie E : application à la recherche de paraboles

On fixe trois points distincts A_1, A_2, A_3 du plan affine euclidien. On recherche toutes les paraboles de ce plan passant par A_1, A_2 et A_3.

I. Dans cette question, on impose en plus aux paraboles recherchées d'avoir un axe parallèle à une droite D donnée. On choisit un repère orthonormé du plan tel que D ait pour équation $x = 0$. Par définition, les paraboles d'axe parallèle à D sont les courbes d'équation

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \neq 0$. Les coordonnées du point A_i dans ce repère sont notées (a_i, b_i) pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.

1. Montrer que la recherche des paraboles d'axe parallèle à D et passant par les points A_1, A_2 et A_3 est équivalente à la recherche des solutions (γ, β, α), avec $\alpha \neq 0$, du système :

$$(S) : \begin{cases} \gamma + a_1 \beta + a_1^2 \alpha &= b_1, \\ \gamma + a_2 \beta + a_2^2 \alpha &= b_2, \\ \gamma + a_3 \beta + a_3^2 \alpha &= b_3. \end{cases}$$

2. Montrer que si deux des points A_i ont la même abscisse (S) n'a aucune solution.

3. On suppose que les abscisses des points A_i sont deux à deux distinctes.

   a. Montrer que le système (S) possède une unique solution (γ, β, α).

   b. Exprimer α sous forme d'un quotient de déterminants.

   c. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

      i) $\alpha = 0$.

      ii) $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$.

      iii) A_1, A_2 et A_3 sont alignés.

4. Montrer que le problème admet une solution si et seulement si A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés et aucune des droites (A_1A_2), (A_2A_3) et (A_1A_3) n'est parallèle à D.

II. 1. On suppose A_1, A_2 et A_3 alignés. En utilisant les résultats précédents, montrer qu'il n'existe aucune parabole passant par A_1, A_2 et A_3.

2. On suppose que A_1, A_2 et A_3 ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe une infinité de paraboles passant par A_1, A_2 et A_3 et préciser les directions de leurs axes.

Problème n° 2

Notations.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles, n fois dérivable et dont la dérivée n-ième est continue.

Partie A : calcul d'un déterminant et applications

On fixe un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice A_n à n lignes et n colonnes définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

I. Le déterminant de cette matrice est noté D_n.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.

2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

3. En déduire une expression de D_n.

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, A_n est inversible.

II. Soient $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $U = A_n^{-1}B$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$2u_i - u_{i-1} - u_{i+1} = b_i,$$

à condition de poser $u_0 = u_{n+1} = 0$.

On suppose désormais que $U = A_n^{-1}B$.

2. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i = 1$. Montrer que pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, $u_i = \frac{i(n+1-i)}{2}$. En déduire que $\max(u_1, \ldots, u_n) \leqslant \frac{(n+1)^2}{8}$.

3. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $b_i \geqslant 0$.

a. Soit j le plus grand indice tel que $u_j = \min(u_1, \ldots, u_n)$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $j = 1$ ou $j = n$.

b. En déduire que toutes les composantes de U sont positives on nulles.

4. On ne fait dans cette question aucune hypothèse sur le signe des b_i.
Soit $\beta = \max(|b_1|, \ldots, |b_n|)$. On considère les vecteurs V et $W \in \mathbb{R}^n$ définis par

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A_n^{-1}\left(\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - B\right), \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = A_n^{-1}\left(\beta \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + B\right).$$

a. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i \geqslant 0$ et $w_i \geqslant 0$.

b. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i + w_i \leqslant \beta\dfrac{(n+1)^2}{4}$.

c. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u_i = \frac{w_i - v_i}{2} \leqslant \frac{v_i + w_i}{2} \leqslant \beta\frac{(n+1)^2}{8}.$$

Partie B : inégalité de Taylor-Lagrange

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Soient deux nombres réels a et b dans l'intervalle I.

I. **1.** Justifier que $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

2. Montrer que si $n \geq 2$, alors $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \displaystyle\int_a^b f''(t)(b-t)dt$.

3. Montrer que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \int_a^b \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(b-t)^{n-1}dt.$$

Cette égalité est connue sous le nom de *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n*.

II. **1.** Justifier l'existence de $M_n = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|$.

2. Démontrer que

$$\left| f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \right| \leqslant M_n \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'*inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre* n *appliquée à* f.

Partie C : un problème de condition aux bords

Soient a, b deux nombres réels, $g \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $M = \max\limits_{x \in [0,1]} |g''(x)|$.

I. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in [0,1],\ f''(x) = g(x) \\ f(0) = a,\ f(1) = b \text{ (condition aux bords).} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de chercher une approximation des valeurs de f.

II. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à un ordre et sur des intervalles bien choisis, montrer que, pour tous nombres réels x et h tels que $0 \leqslant x - h \leqslant x + h \leqslant 1$,

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leqslant \frac{Mh^2}{12}.$$

III. On fixe un entier $n \geqslant 1$ et d'après la question précédente, on convient d'approcher $f''(x)$ par

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2},$$

avec $h = \dfrac{1}{n+1}$. Pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, on pose $x_i = ih$. Sachant que $f'' = g$, $f(0) = a$ et $f(1) = b$, on approxime $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(x_{n+1})$ par respectivement $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ avec $u_0 = a$, $u_{n+1} = b$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2} = g(x_i).$$

1. La matrice A_n a été définie dans la partie **A**. Montrer qu'il existe un vecteur $B \in \mathbb{R}^n$, que l'on explicitera, tel que

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A_n^{-1} B.$$

2. Soit F le vecteur $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs absolues des composantes du vecteur $A_n(F - U)$ sont majorées par $M\dfrac{h^4}{12}$.

3. En utilisant les résultats de la partie **A**, donner une majoration des réels $|f(x_i) - u_i|$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ en fonction de n et M.

4. Conclure.