CAPES de Mathématiques 2014 Anticipé

Première composition

Correction proposée par G. Dupont.

Introduction

La première composition de la session anticipée du CAPES de mathématiques 2014 – ayant eu lieu en juin 2013 – se compose de deux problèmes indépendants ne faisant appel qu'aux notions élémentaires d'analyse : suites, continuité, dérivabilité, calcul intégral et équations différentielles linéaires du premier ordre. Les probabilités discrètes tiennent aussi une petite place à la fin du premier problème ; les notions mises en jeu sont alors : loi uniforme, loi binomiale, probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales et espérance mathématique.

Le premier problème est dédié à l'étude des sommes de Riemann associées à des fonctions continues sur un segment. La partie A de ce problème établit quelques propriétés élémentaires de ces sommes et nous amène à écrire un algorithme implémentant la méthode des rectangles pour calculer une intégrale.

La partie B nous propose d'utiliser les sommes de Riemann pour étudier la convergence de la suite

$$\left(\frac{(n!)^{1/n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

La partie C nous amène à utiliser les sommes de Riemann pour étudier la suite d'intégrales

$$\left(\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

où f est une fonction continue et monotone sur $[0,\pi]$.

Enfin, la partie D propose une application des sommes de Riemann à l'étude d'un problème asymptotique de probabilités discrètes.

Le second problème traite de la fonction exponentielle et d'équations différentielles ordinaires.

La première partie reprend un thème déjà abordé lors de la première composition du CAPES externe de 2004, à savoir la construction de la fonction exponentielle comme solution maximale du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Cette partie ne fait appel qu'à des notions analytiques élémentaires et ne nécessite aucune connaissance relative à la théorie des équations différentielles.

La seconde partie du problème propose d'étudier une le modèle de croissance démographique de Verhulst (1840) reposant sur l'équation différentielle non-linéaire :

$$\text{(E)} \qquad y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

où r et K sont des constantes réelles strictement positives. À l'aide d'un changement de variable, on nous propose de ramener l'étude de cette équation différentielle à celle d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on sait intégrer. Ceci permet en particulier d'établir le comportement asymptotique d'une solution maximale de cette équation différentielle, autrement dit, de connaître l'état de la population étudiée après un temps très long.

Afin de respecter l'esprit de l'épreuve, nous proposons une correction aussi élémentaire que possible en ne faisant appel qu'aux résultats les plus classiques des deux premières années de licence de mathématiques. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé à toute référence de premier cycle dédiée à l'analyse et aux probabilités.

Enfin, nous voudrions souligner que nous avons parfois détaillé plus que nécessaire certains calculs ou arguments. Il s'agit là d'une démarche volontaire de notre part dans l'optique d'aider le lecteur à avoir la vision la plus claire possible de ce sujet.

Problème 1 : sommes de Riemann

Dans ce problème, on suppose introduite à l'aide des fonctions en escalier la notion d'intégrale au sens de Riemann.

Partie A : convergence des sommes de Riemann

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et on considère les sommes de Riemann :

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad \textbf{et} \quad R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Dans un premier temps, on se propose de démontrer que les suites $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ dt$.
I.A.1. Démontrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

f est une fonction continue sur le compact $[a, b]$, elle est donc uniformément continue. En conséquence,

$$\forall \epsilon_1 > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon_1.$$

Il suffit donc d'appliquer ce résultat avec $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{b-a}$, qui est strictement positif car $a < b$. □

I.A.2. Soit ϵ un réel strictement positif.
I.A.2.1. Démontrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall t \in [x_k, x_{k+1}],\ |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Soit un $\eta > 0$ satisfaisant à la propriété de la question I.A.1. Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$|x_{k+1} - x_k| = (b-a)\frac{|k+1-k|}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

La suite $\left(\frac{b-a}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers zéro par valeurs supérieures, il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geq N \Rightarrow \frac{b-a}{n} \leq \eta.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $|x_{k+1} - x_k| < \eta$ et donc aussi $|t - x_k| \leq \eta$, pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$. Il suit alors du choix de η que pour tout $n \geq N$,

$$|f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

□

I.A.2.2 En déduire que :

$$\forall n \geq N,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt\right| \leq \frac{\epsilon}{n}$$

puis que :

$$\forall n \geq N,\ \left|\int_a^b f(t)\ dt - (b-a)S_n(f)\right| \leq \epsilon.$$

Pour $n \geq N$, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a montré à la question I.A.2.1 que

$$\sup_{t \in [x_k, x_{k+1}]} |f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt\right| &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\ dt \\
&\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\epsilon}{b-a}\ dt \\
&\leq |x_{k+1} - x_k| \frac{\epsilon}{b-a} \\
&= \frac{\epsilon}{n}.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on peut sommer les n inégalités obtenues et on obtient

$$\begin{aligned}
\epsilon &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt\right| \\
&\geq \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt - \frac{b-a}{n} f(x_k)\right)\right| \\
&= \left|\int_a^b f(t)\ dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \\
&= \left|\int_a^b f(t)\ dt - (b-a)S_n(f)\right|.
\end{aligned}$$

□

I.A.3. En déduire que $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$.

D'après I.A.2.2, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq n$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\ dt - (b-a)S_n(f)\right| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, $(b-a)S_n(f)$ tend vers $\int_a^b f(t)\ dt$ quand n tend vers l'infini, c'est à dire que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$R_n(f) = S_n(f) - \frac{1}{n}f(x_0) + \frac{1}{n}f(x_n) = S_n(f) - \frac{1}{n}f(a) + \frac{1}{n}f(b).$$

Les suites $\left(\frac{1}{n}f(a)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n}f(b)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes les deux vers zéro. Ainsi, $(R_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a la même limite que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$. $\square$

I.A.4. *Application :* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j}$.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{j=n+1}^{2n}\frac{1}{j} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \text{ en posant } k=j-n \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \\ &= R_n(f), \end{aligned}$$

où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par $t\mapsto \frac{1}{1+t}$.

Ainsi, il suit de I.A.3 que

$$u_n = R_n(f) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$$

$\square$

I.A.5. Dans cette question, on suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
I.A.5.1. Démontrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t\in[a,b]$, $|f'(t)|\le M$.

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, elle est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée f' est continue sur $[a,b]$. Ainsi, f' est bornée et atteint ses bornes sur $[a,b]$. En conséquence, il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $|f'(t)|\le M$, pour tout $t\in[a,b]$. $\square$

I.A.5.2. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $\forall t\in[x_k,x_{k+1}]$, $|f(t)-f(x_k)|\le M(t-x_k)$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, puisque f' est majorée par M sur $[a,b]$, on a

$$\forall t\in[x_k,x_{k+1}],\ |f(t)-f(x_k)| \le M|t-x_k| = M(t-x_k),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. $\square$

I.A.5.3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0, n-1]\!], \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(t)\ dt - (b-a)S_n(f) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| &\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |(f(t) - f(x_k))|\ dt \\
&\leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k)\ dt \text{ d'après I.A.5.2} \\
&= M \left[\frac{t^2}{2} - x_k t \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&= M \left(\frac{1}{2}(x_{k+1}^2 - x_k^2) - x_k(x_{k+1} - x_k) \right) \\
&= M(x_{k+1} - x_k) \left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2} - x_k \right) \\
&= M \frac{b-a}{n} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right) \\
&= M \frac{b-a}{n} \left(\frac{b-a}{2n} \right) \\
&= M \frac{(b-a)^2}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\ dt - (b-a)S_n(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k))\ dt \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) \right|\ dt \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{(b-a)^2}{2n^2} \\
&= M \frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

$\square$

I.A.6. Application : Calcul d'une valeur approchée de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ par la méthode des rectangles.
Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$.
I.A.6.1. Déterminer un réel M tel que $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq M$.

f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \text{ et } f''(x) = 2(2x^2-1)e^{-x^2}.$$

Ainsi, $f''(x)$ est du signe de $2x^2-1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $f''(x) < 0$ si $x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ et $f''(x) > 0$ si $x \in]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. La fonction f' atteint donc un minimum en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ où elle vaut $-\sqrt{2}e^{-1/2}$.

D'autre part, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc, si on pose $M = \sqrt{2}e^{-1/2}$, on obtient

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in [0,1].$$

□

Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant les résultats obtenus dans la question I.A.5, écrire un algorithme qui calcule une valeur approchée à ϵ près de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

Donner une valeur à 10^{-3} près de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

(1) $M := \sqrt{2}e^{-1/2}$;
(2) $n := 1$;
(3) $R := 0$;
(4) Tant que $\left(\dfrac{M(b-a)^2}{2n} \geq \epsilon\right)$ faire :
(5) $n := n+1$;
(6) Fin Tant que ;
(7) Pour k allant de 1 à n faire :
(8) $R := R + \frac{1}{n}\exp(-(k/n)^2)$;
(9) Fin Tant que ;
(10) Afficher R ;

On obtient ainsi

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0,747.$$

□

Partie B : application à l'étude de suites

Soit f une fonction définie sur $]0,1]$, continue et décroissante sur $]0,1]$.
On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et la fonction I définie sur $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1]$, $I(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\, dt$.

I.B.1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

La fonction f est décroissante sur $]0,1]$ donc, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

En intégrant cette inégalité sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on obtient

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

□

I.B.2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

En sommant les inégalités obtenues en I.B.1 pour tous les $k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_{1/n}^{1} f(t)\, dt \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

c'est à dire,

$$r_n - \frac{1}{n} f(1) \geq I\left(\frac{1}{n}\right) \geq r_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il s'ensuit que

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

□

I.B.3. On suppose, de plus, que $\lim_{x\longrightarrow 0} I(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x\longrightarrow 0} x f(x) = 0$. Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Puisque $I(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} l$, on a $I\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} l$. Et puisque $\frac{1}{n}f(1) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, on obtient

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} l.$$

D'autre part, puisque $xf(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 0]{} 0$, on a $\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi,

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} l.$$

Le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité obtenue en I.B.2 montre que $r_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} l$.

□

I.B.4. Dans cette question, on pose $f(x) = \dfrac{x^2-1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(x)$, pour tout réel $x \in]0,1]$.

I.B.4.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$r_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

On rappelle que la somme des carrés des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{k^2}{n^2} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(k) - \ln(n)\right)$$

et donc

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}k^2 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}\frac{\ln(k)}{n}.$$

Ainsi, en sommant sur $k \in [\![1,n]\!]$, on obtient

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{4n^3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(n) - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k) \\ &= \frac{1}{4n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2n}\left(n\ln(n) - \ln(n!)\right) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right). \end{aligned}$$

□

I.B.4.2. En utilisant les questions précédentes, démontrer que la suite $\left(\dfrac{(n!)^{1/n}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

On rappelle que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_x^1 \frac{t^2-1}{4} - \frac{1}{2}\ln(t)\ dt \\ &= \left[\frac{t^3}{12} - \frac{t}{4} - \frac{1}{2}\left(t\ln(t) - t\right)\right]_x^1 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\left(x\ln(x) - x\right)\right) \\ &\underset{x\longrightarrow 0}{=\!\!\longrightarrow} \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

car $x\ln(x) \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$. Ainsi,

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \frac{1}{3}$$

et il suit de I.B.3 que

$$r_n \xrightarrow[n\longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{3}.$$

D'autre part,

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} \xrightarrow[n\longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}.$$

Il suit alors de I.B.4.1 que

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow +\infty]{} -2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = -1.$$

Ainsi, par continuité de la fonction exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right) \xrightarrow[n\longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{e}$$

mais

$$\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)\right) = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}.$$

Ainsi,

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{e}.$$

□

Partie C : une suite d'intégrales

I.C.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\ dx = \frac{2}{n}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right] \Leftrightarrow nx \in [k\pi, (k+1)\pi].$$

et donc

$$|\sin(nx)| = (-1)^k \sin(nx), \quad \forall x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right].$$

Ainsi, en effectuant le changement de variable $y = nx$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\ dx &= \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} (-1)^k \sin(nx)\ dx \\
&= \frac{(-1)^k}{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(y)\ dy \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{n} [\cos(y)]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{n} \left[(-1)^{k+1} - (-1)^k\right] \\
&= \frac{2(-1)^{2k+2}}{n} \\
&= \frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

□

I.C.2. Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, \pi]$.
I.C.2.1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\ dx \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

La fonction f étant croissante sur $[0, \pi]$, on a, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, et pour tout $x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$,

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

Ainsi,

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) |\sin(nx)| \leq f(x)|\sin(nx)| \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) |\sin(nx)|, \quad \forall x \in \left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right].$$

En intégrant sur $\left[\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, on obtient

$$f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\, dx \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\, dx \leq f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} |\sin(nx)|\, dx$$

et donc, d'après I.C.1,

$$\frac{2}{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}} f(x)|\sin(nx)|\ dx \leq \frac{2}{n} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right).$$

□

I.C.2.2. En déduire un encadrement de $\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\ dx$.

En sommant les inégalités obtenues dans I.C.2.1 pour k variant dans $[\![0, n-1]\!]$, on obtient

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \leq \int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\ dx \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right),$$

c'est à dire

$$2S_n(f) \leq \int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\ dx \leq 2R_n(f),$$

avec les notations de I.A. □

I.C.2.3. Déterminer $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x)|\sin(nx)|\ dx$.

La fonction f est continue sur $[0, \pi]$, donc nous sommes dans les conditions de I.A.3. On a donc

$$2S_n(f) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\int_0^\pi f(x)\ dx$$

et

$$2R_n(f) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\int_0^\pi f(x)\ dx.$$

Le théorème des gendarmes, appliqué à l'inégalité obtenue en I.C.2.2 montre donc que

$$\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\ dx \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 2\int_0^\pi f(x)\ dx.$$

□

I.C.2.4. Obtiendrait-on le même résultat si f était une fonction continue et décroissante sur $[0, \pi]$?

Si f est continue décroissante, $-f$ est continue croissante et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\ dx &= -\int_0^\pi (-f)(x)|\sin(nx)|\ dx \\ &\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -2\int_0^\pi (-f)(x)\ dx \text{ d'après I.C.2.3} \\ &= 2\int_0^\pi f(x)\ dx.\end{aligned}$$

Ainsi, le résultat est toujours valide. □

Partie D : une application aux probabilités

I.D.1. Pour tout couple d'entiers (k, m), on pose $I_{k,m} = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^m \, dx$.

I.D.1.1. Démontrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $I_{k,m} = \dfrac{k}{m+1} I_{k-1,m+1}$.

On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \int_0^1 x^k(1-x)^m \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{m+1}x^k(1-x)^{m+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{k}{m+1}x^{k-1}(1-x)^{m+1} \, dx \\ &= \frac{k}{m+1}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{m+1} \, dx \\ &= \frac{k}{m+1} I_{k-1,m+1}. \end{aligned}$$

□

I.D.1.2. Pour tout couple d'entiers naturels (k, m), déterminer $I_{0,k+m}$ et en déduire une expression de $I_{k,m}$ en fonction des entiers k et m.

Soient (k, m) un couple d'entiers naturels. On a

$$I_{0,k+m} = \int_0^1 (1-x)^{k+m} \, dx = \left[-\frac{(1-x)^{k+m+1}}{k+m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+m+1}.$$

Montrons par récurrence sur k que, pour tout entier naturel m,

$$I_{k,m} = \frac{k!m!}{(m+k)!} I_{0,k+m}.$$

Si $k = 0$, on a bien $I_{0,m} = \dfrac{0!m!}{(m+0)!} I_{0,0+m}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit maintenant $k > 1$ tel que l'hypothèse est vérifiée au rang $k-1$, montrons qu'elle est vraie au rang k. D'après I.D.1.1, on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{k,m} &= \frac{k}{m+1} I_{k-1,m+1} \\ &= \frac{k}{m+1} \frac{(k-1)!(m+1)!}{(m+k)!} I_{0,k+m} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence,} \\ &= \frac{k!m!}{(m+k)!} I_{0,k+m}, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité. □

I.D.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
Une urne contient des boules rouges et des boules blanches. La proportion de boules rouges dans cette urne est p. On réalise dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X la variable aléatoire égale au

nombre de boules rouges obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X, puis donner l'espérance de X.
Toutes nos variables aléatoires seront définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit une variable aléatoire X_i qui vaut 1 si on tire une boule rouge au $i$ème tirage et 0 si on tire une boule blanche. Chaque X_i est donc une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre p.

En outre, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes (il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli de paramètre p) et la variable aléatoire X s'écrit

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Il s'agit donc d'une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ (ou de manière équivalent du nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètre p avec n essais), elle suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Sa loi est donc donnée par

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in X(\Omega) = [\![0, n]\!].$$

L'espérance d'une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est $E(X) = np$. En effet, par linéarité de l'espérance, on a

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

et pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$,

$$E(X_i) = \sum_{k \in X_i(\Omega)} k \cdot P(X_i = k) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p.$$

$\square$

I.D.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$.
On dispose de N urnes $U_1, \ldots, U_N$ contenant des boules rouges et des boules blanches et telles que, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, la proportion de boules rouges dans U_j et $\dfrac{j}{N}$. On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages indépendants d'une boule avec remise. On note X_N la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.
I.D.3.1. Pour tout entier naturel k, on note $p_N(k)$ la probabilité que X_N prenne la valeur k.
Démontrer que :

$$p_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}.$$

Soit U la variable aléatoire désignant le numéro de l'urne choisie au hasard. Alors U suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$ et les événements $(U = k)_{k=1,\ldots,N}$ forment un système complet d'événements (et plus précisément une partition de Ω). On peut donc appliquer la formule des probabilités totales et on obtient, pour tout entier naturel k,

$$\begin{aligned} P_N(k) &= P(X_N = k) \\ &= \sum_{j=1}^{N} P(X_N = k \cap U = j) \\ &= \sum_{j=1}^{N} P(X_N = k|U = j)P(U = j) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(X_N = k|U = j). \end{aligned}$$

D'autre part, $X_N^{(U=j)}$ compte le nombre de succès (tirages d'une boule rouge dans l'urne U_j) dans un schéma de Bernoulli de paramètre $\dfrac{j}{N}$ (probabilité, pour chaque tirage dans U_j, de tirer une boule rouge). Il s'ensuit, que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X_N = k|U = j) = \binom{n}{k}\left(\frac{j}{N}\right)^k\left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}.$$

Ainsi,

$$P_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\binom{n}{k}\left(\frac{j}{N}\right)^k\left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k}.$$

$\square$

I.D.3.2. Calculer l'espérance de X_N. Quelle est la limite de cette espérance quand N tend vers $+\infty$?

Puisque l'on effectue n tirages avec remise, on peut avoir entre 0 et n boules rouges, autrement dit, $X_N(\Omega) = \{0, \dots, n\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(X_N) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X_N = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{N} k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} k\ P(X_N = k \mid U = j) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} E\left(X_N^{(U=j)}\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} n \frac{j}{N},\ \text{car } X_N^{(U=j)} \text{ suit une loi } \mathcal{B}\left(n, \frac{j}{N}\right) \\
&= \frac{n}{N^2} \sum_{j=1}^{N} j \\
&= \frac{nN(N+1)}{2N^2} \\
&\xrightarrow[N \longrightarrow +\infty]{} \frac{n}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

I.D.3.3. En utilisant le résultat obtenu dans la première question, déterminer $\lim_{N \longrightarrow +\infty} p_N(k)$. Que peut-on en déduire pour la suite des variables aléatoires $(X_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$?

$$\begin{aligned}
\lim_{N \longrightarrow +\infty} p_N(k) &= \lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \binom{n}{k} \left(\frac{j}{N}\right)^k \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-k} \\
&= \lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{1}{N} \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{N} f_{n,k}\left(\frac{j}{N}\right),
\end{aligned}$$

avec $f_{n,k}(x) = x^k(1-x)^{n-k}$. La fonction $f_{n,k}$ étant continue sur $[0,1]$, il suit de I.A.3 que

$$\begin{aligned}
\lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{1}{N}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N} f_{n,k}\left(\frac{j}{N}\right) &= \binom{n}{k}\int_0^1 f_{n,k}(x)\ dx \\
&= \binom{n}{k} I_{k,n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{n!} I_{0,n} \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

On peut donc en conclure que la suite $(X_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0,\ldots,n\}$, ce qui est cohérent avec la réponse trouvée à la question précédente. $\square$

Fin du premier problème.

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

On établit dans la partie A l'existence d'une unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ et on étudie dans la partie B un exemple d'équation différentielle.

Dans la partie A, les fonctions exponentielles et logarithmes sont supposées ne pas être connues.

Partie A : la fonction exponentielle

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = y$$

avec la condition $y(0) = 1$.

II.A.1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f dérivable, solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$.

II.A.1.1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$.

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = f(x)f(-x)$. Alors g est dérivable et

$$g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que g est constante sur $\mathbb{R}$. Puisque $g(0) = f(0)^2 = 1$, il vient

$$1 = g(x) = f(x)f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

II.A.1.2. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Par l'absurde, s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, alors $f(x_0)f(-x_0) = 0$ or $f(x_0)f(-x_0) = 1$ d'après II.A.1.1, une contradiction. □

II.A.1.3. Démontrer que si g est une fonction dérivable solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$, alors $g = f$.

On pourra considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Nous pourrions invoquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour établir le fait que (E) n'a qu'une seule solution valant 1 en 0. Cependant, nous allons l'établir ici de manière élémentaire.

Puisque f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après II.A.1.2, on peut considérer la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi = \frac{g}{f}.$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivable dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\psi' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{gf - gf}{f^2} = 0.$$

En outre, $\phi(0) = 1$ donc ϕ est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$, autrement dit, $f = g$ sur $\mathbb{R}$. □

II.A.1.4. Démontrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.
On pourra fixer un réel a et considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle ne s'annule pas en a. Ainsi, on peut considérer la fonction ψ_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_a(x) = \frac{f(a+x)}{f(a)}.$$

On a alors

$$\psi_a'(x) = \frac{f'(a+x)}{f(a)} = \psi_a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En outre,

$$\psi_a(0) = \frac{f(a)}{f(a)} = 1.$$

Ainsi, ψ_a est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 0. Il suit alors de II.A.1.3 que $\psi_a = f$, autrement dit que $f(x) = \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou encore, que $f(a+x) = f(a)f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci étant vrai quel que soit, a, la propriété voulue est établie. □

II.A.1.5. Déduire des résultats précédents que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

On a vu en II.A.1.2 que f ne s'annule jamais et on sait de plus que $f(0) = 1 > 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < 0$. Alors, il suit alors du théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $c \in [1, a]$ tel que $f(c) = 0$, ce qui contredit II.A.1.2. Ainsi, $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

II.A.2. On va dans cette question établir l'existence d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $f(0) = 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier $n > |x|$:

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \textbf{ et } v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$

On va montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.

II.A.2.1. Justifier que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont bien définie pour $n > |x|$.

La seule chose à vérifier est que $u_n(-x)$ ne s'annule jamais pour $n > |x|$. Or

$$u_n(-x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow x = n,$$

ce qui n'arrive pas si $n > |x|$. □

II.A.2.2. Établir par récurrence l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall a \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*, (1+a)^n \geq 1 + na.$$

On le montre par récurrence sur n.

Si $n=1$, on a $1+a \geq 1+a$ donc la propriété est trivialement vérifiée.

Soit $n \geq 1$ et supposons la propriété vérifiée au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n \\
&\geq (1+a)(1+na) \text{ par hypothèse de récurrence,} \\
&= 1+a+na+na^2 \\
&= (1+(n+1)a)+na^2 \\
&\geq 1+(n+1)a \text{ car } na^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité. □

II.A.2.3. Soit n un entier tel que $n > |x|$.
II.A.2.3.i. Démontrer que :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
u_n(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}} \\
&= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= u_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

□

II.A.2.3.ii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n+1+x}{n+1}\frac{n}{n+x}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n^2+n+nx}{n^2+n+(n+1)x}\right)^{n+1} \\
&= \left(1-\frac{x}{n^2+n+(n+1)x}\right)^{n+1},
\end{aligned}$$

mais

$$\left|\frac{x}{n^2+n+(n+1)x}\right| < 1$$

donc on peut appliquer l'inégalité de Bernoulli et on obtient

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x}{n^2+n+(n+1)x}\right)^{n+1} &\geq 1-(n+1)\frac{x}{n^2+n+(n+1)x}\\ &= 1-(n+1)\frac{x}{(n+1)(n+x)}\\ &= 1-\frac{x}{n+x}\\ &= \frac{n+x-x}{n+x}\\ &= \frac{n}{n+x}\\ &= \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.$$

□

II.A.2.3.iii. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.

Pour $n > |x|$, on a toujours $u_n(x) > 0$. Ainsi, $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante si et seulement si

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \geq 1, \quad \forall n > |x|.$$

Or cette inégalité suit immédiatement de II.A.2.3.i et II.A.2.3.ii. □

II.A.2.4. Démontrer que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.

La suite $(u_n(-x))_{n>|x|}$ est croissante d'après II.A.2.3.iii. Ainsi, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est l'inverse d'une suite croissante, elle est donc décroissante. □

II.A.2.5. Soit n un entier tel que $n > |x|$.

II.A.2.5.i. Démontrer que $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$.

On a

$$\begin{aligned} v_n(x)\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) &= \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= v_n(x)-u_n(x). \end{aligned}$$

□

II.A.2.5.ii. En déduire que $v_n(x) - u_n(x) \geq 0$.

On a $u_n(x) > 0$ pour tout $n > |x|$ donc $v_n(x) > 0$ pour tout $n > |x|$. D'autre part, $0 \leq \frac{x^2}{n^2} < 1$ donc $0 < 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1$ et donc $\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \geq 0$. Ainsi, il suit de II.A.2.5.i que

$$v_n(x)-u_n(x) = v_n(x)\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \geq 0.$$

□

II.A.2.5.iii. En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que :

$$v_n(x)-u_n(x) \leq v_n(x) \times \frac{x^2}{n}.$$

Puisque $n > |x|$, on a $-\dfrac{x^2}{n^2} > -1$. On peut donc appliquer l'inégalité de Bernoulli à $\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n$ et on obtient

$$\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{x^2}{n}$$

et donc

$$\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leq \frac{x^2}{n},$$

d'où

$$v_n(x)-u_n(x) = v_n(x)\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leq v_n(x) \times \frac{x^2}{n}.$$

□

II.A.2.6. Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la limite de la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$. Conclure.

La suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante d'après II.A.2.4 donc elle est majorée. D'autre part, $(v_n(x))_{n>|x|}$ est positive donc elle est minorée. Elle est ainsi bornée.

La suite $\left(\frac{x^2}{n}\right)_{n>|x|}$ tend vers zéro donc la suite $\left(v_n(x)\frac{x^2}{n}\right)_{n>|x|}$, produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers zéro, tend vers zéro elle-même.

D'autre part, on a montré en II.A.2.5.ii et II.A.2.5.iii que

$$0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\frac{x^2}{n}, \quad \forall n > |x|.$$

Ainsi, il suit du théorème des gendarmes que $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ tend vers zéro.

Les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont donc des suites respectivement croissante et décroissante dont la différence tend vers zéro, ce sont donc des suites adjacentes. En particulier, elles convergent vers la même limite. □

II.A.2.7. On désigne par f la fonction qui à tout réel x associe $f(x)$, limite commune des suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$. On va démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $f(0) = 1$.
II.A.2.7.i. Démontrer que $f(0) = 1$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n(0) = 1$ donc $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite constante égale à 1, sa limite $f(0)$ est donc égale à 1. □

Dans les deux questions suivantes, on considère un réel x_0.

II.A.2.7.ii. On admet que : $\forall (a,k) \in \mathbb{R}^2$, $f(a+k) - f(a) \geq kf(a)$.
En utilisant cette relation, établir que :

$$\forall h \in]-1,1[,\ hf(x_0) \leq f(x_0+h) - f(x_0) \leq \frac{h}{1-h}f(x_0).$$

D'après la relation proposée, on a, pour tout $h \in]-1,1[$,

$$f(x_0+h) - f(x_0) \geq hf(x_0),$$

ce qui montre la première inégalité.

Pour la seconde, on observe que

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{h}{1-h}f(x_0) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + hf(x_0) - hf(x_0+h) - hf(x_0)}{1-h} \\ &= \frac{1}{1-h}\left(f(x_0+h) - f(x_0) - hf(x_0+h)\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= -\left(f(x_0+h-h) - f(x_0+h)\right) \\ &\leq -(-h)f(x_0+h) \text{ d'après la relation proposée,} \\ &= hf(x_0+h). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x_0+h) - f(x_0) - hf(x_0+h) \leq 0$$

et donc

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \frac{h}{1-h}f(x_0) \leq 0,$$

ce qui prouve la seconde inégalité. □

II.A.2.7.iii. En déduire que f est dérivable en x_0 de dérivée $f(x_0)$. Conclure.

En divisant l'inégalité obtenue en II.A.2.7.ii par h puis faisant tendre h vers 0, le théorème des gendarmes implique que

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Ainsi, $f'(x_0)$ existe et vaut $f(x_0)$.

Puisque x_0 a été choisi de manière arbitraire dans $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En outre, on a vu en II.A.2.7.i que $f(0) = 1$. Ainsi, il suit de II.A.1.3 que f est l'unique solution de l'équation (E) qui vaut 1 en 0.

Nous avons donc prouvé l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy posé et, en vertu de ce que nous savons par ailleurs, nous avons en fait reconstruit la fonction exponentielle et établi certaines de ses propriétés élémentaires. □

Partie B : évolution d'une population

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N, représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années) vérifie les conditions suivantes :

— N **est solution de l'équation différentielle**

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{E}$$

où r et K sont des constantes réelles strictement positives ;

— $N(0) = N_0$, **avec $0 < N_0 < K$;**

— N **est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 ;**

— **si g est une solution de (E) définie sur un intervalle J contenant 0 et vérifiant $g(0) = N_0$, alors J est inclus dans I.**

II.B.1. Quel théorème permet de garantir l'existence et l'unicité de la fonction N ?

La fonction N ainsi caractérisée est une *solution maximale* du problème de Cauchy associé à (E) avec la condition initiale N_0 en 0. C'est le théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence d'une telle solution maximale. Il s'applique bien dans ce cas puisque nous avons à faire à une équation différentielle qui est $\mathcal{C}^1$, et donc localement lipschitzienne, en fonction de y. □

On admet que I contient $[0, +\infty[$, et que pour tout réel $t \in I$, $0 < N(t) < K$.

II.B.2.*Étude qualitative*

II.B.2.1. Démontrer que N est strictement croissante sur I.

N est dérivable et on a
$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$
Mais puisque $0 < N(t) < K$ pour tout $t \in I$ on a
$$\frac{N(t)}{K} < 1, \quad \forall t \in I$$
et donc
$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) > 0, \quad \forall t \in I.$$
Ainsi, N est strictement croissante sur I. □

II.B.2.2. En déduire que N admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

La fonction N est croissante sur $[0, +\infty[$ et majorée par K, elle admet donc une limite finie en $+\infty$. □

II.B.2.3. Démontrer que $\ell = K$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

Inutile ici de raisonner par l'absurde. Puisque $N(t) \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} \ell$, il suit de l'équation (E) que
$$N'(t) \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} r\ell\left(1 - \frac{\ell}{K}\right).$$
Or,
$$\int_0^{+\infty} N'(t)\ dt = \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_0^b N'(t)\ dt = \lim_{b \longrightarrow +\infty} N(b) - N(0) = \ell - N_0.$$
Ainsi, N' est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc, si elle admet une limite, celle-ci est nécessairement nulle. Ainsi,
$$r\ell\left(1 - \frac{\ell}{K}\right) = 0.$$
Mais puisque N est strictement croissante et $N(0) = N_0 > 0$, on a nécessairement $\ell \neq 0$. Ainsi, puisque l'on a aussi $r > 0$, il vient $1 - \dfrac{\ell}{K} = 0$, c'est à dire, $\ell = K$. □

II.B.3. *Détermination d'une expression de N.*
On pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.
II.B.3.1. Démontrer que g est solution sur I de l'équation différentielle

(E') $$y' = -ry + \frac{r}{K}.$$

Puisque $N(0) = N_0 > 0$ et que N est strictement croissante d'après II.B.2.1, elle ne s'annule pas sur I et donc g est dérivable sur I de dérivée
$$g' = -\frac{N'}{N^2}.$$

Ainsi,
$$g' + rg - \frac{r}{K} = -\frac{N'}{N^2} + \frac{r}{N} - \frac{r}{K} = \frac{-KN' + rKN - rN^2}{KN^2}.$$
Or, puisque N est solution de (E), on a
$$N' - rN + r\frac{N^2}{K} = 0$$
et donc, en multipliant par $-K$, on a
$$-KN' + rKN - rN^2 = 0.$$
Ainsi, $g' + rg - \dfrac{r}{K} = 0$. □

II.B.3.2. Résoudre l'équation différentielle (E'), puis déterminer une expression de N sur I.

(E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre. On note

(H') $$y' + ry = 0$$

l'équation homogène associée.

L'ensemble $\mathcal{S}_{H'}$ des solutions de (H') est
$$\mathcal{S}_{H'} = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-rt} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
D'autre part, une solution particulière évidente de (E') est la fonction constante
$$y_0 : t \mapsto \frac{1}{K}.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') est
$$\mathcal{S}_{E'} = \left\{ t \mapsto \frac{1}{K} + \lambda e^{-rt} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \lambda e^{-rt}}, \quad \forall t \in I.$$
Mais d'après la condition initiale sur N, on a
$$N_0 = N(0) = \frac{1}{\frac{1}{K} + \lambda} = \frac{K}{1 + \lambda K},$$
c'est à dire,
$$\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}.$$
□

II.B.3.3. Retrouver la limite de N en $+\infty$.

Puisque $r > 0$, $e^{-rt} \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0$ et donc
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{K} + \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt}} = \frac{1}{\frac{1}{K}} = K,$$

ce qui coïncide avec le résultat trouvé en II.B.2.3. $\square$

Fin de l'épreuve.