Agrégation Interne de Mathématiques 2018
Composition 1

Correction proposée par G. Dupont.

Version du 15 février 2018.

Avant-propos du correcteur

La première composition de l'agrégation interne 2018 de mathématiques a pour objets principaux l'algèbre linéaire et les polynômes à une indéterminée. L'objectif spécifique du problème est de démontrer la positivité de deux déterminants particuliers.

On retrouve au fil de ce sujet de nombreux objets classiques de l'algèbre : densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, résultant de deux polynômes, discriminant, division euclidienne, etc. Aucune connaissance théorique préalable n'est vraiment requise pour aborder ce sujet mais une habitude des techniques et arguments classiques est certainement indispensable pour en venir à bout.

Outre les notations de l'énoncé détaillées ci-dessous, cette correction utilise certaines notations qui lui sont propres :

- Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, on note $[A]_{i,j}$ l'entrée (i, j) de la matrice A.
- Si u est un endomorphisme, on note $\mathrm{Sp}(u)$ son spectre. Et si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{id})$ l'espace propre associé. On utilise les mêmes notations pour les matrices.
- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}^n$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont, dans l'ordre, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Mise en garde : La correction ci-dessous n'est certainement pas exempte d'erreurs (de la coquille à l'erreur de raisonnement) et je ne doute pas que certains arguments puissent être améliorés. Elle est proposée bénévolement et communiquée afin d'aider les candidats dans leur préparation.

Notations, rappels et présentation du problème

- On note $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ les ensembles de nombres usuels : entiers naturels, entiers relatifs, nombres rationnels, nombres réels et nombres complexes.
- Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul fixé et $\mathbf{K}$ désigne un corps égal à $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
- Si A est une partie de B (*i.e.* $A \subset B$), on note $B \setminus A$ le complémentaire de A dans B.
- Si p et q sont deux entiers relatifs, on pose $[\![p, q]\!] = \{k \in \mathbf{Z} \mid p \leq k \leq q\}$.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbf{K}$; pour tout entier naturel d, on note $\mathbf{K}_d[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à d.
- Si P et Q sont deux polynômes, on note $P \wedge Q$ le p.g.c.d. de P et Q ; par définition, lorsqu'il n'est pas nul, ce polynôme est unitaire.
- On identifie $\mathbf{K}^n$ avec le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ des matrices colonnes de taille n.
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices carrées de taille n et l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbf{K}$; $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre, *i.e.* $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ est un anneau ; $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$ un groupe.
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbf{R}$-algèbre par restriction de la loi externe aux nombres réels.
- Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si $\mathcal{B}$ est une base de E, on note $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u)$ la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Le déterminant de A est noté

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

- Pour tout $v = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{C}^n$, on pose $\overline{v} = (\overline{x_i})_{1 \leq i \leq n}$.
- Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice $(\overline{a_{i,j}})_{1 \leq i,j \leq n}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A (I_n désigne la matrice unité de taille n). Ce polynôme est unitaire de degré n.
- Si E désigne un ensemble quelconque, on dit qu'une application $f : E \longrightarrow E$ est involutive lorsque $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

L'objectif du problème est d'établir l'assertion (1) suivante :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2, \quad \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbf{R}_+. \tag{1}$$

Pour cela, on commencera par montrer que cette assertion est équivalente à l'assertion (2) :

$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbf{R}_+. \tag{2}$$

Une démonstration directe sera proposée en dernière partie.

Partie I : résultats préliminaires

On fixe deux matrices A et B, éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. Démontrer l'assertion (1) dans le cas où $n = 1$.

Pour tous $a, b \in \mathbf{C}$, on a

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}\right) = a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2 \in \mathbf{R}_+.$$

□

2. Étude de la conjugaison dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2.a. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et tout $v \in \mathbf{C}^n$, $\overline{Av} = \bar{A}\bar{v}$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\begin{aligned} [\overline{Av}]_{i,1} &= \overline{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} v_{k,1}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{i,k}}\ \overline{v_{k,1}} \\ &= [\bar{A}\bar{v}]_{i,1}. \end{aligned}$$

□

2.b. Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{array} \right.$ est un automorphisme de R-algèbres involutif.

Notons τ cette application. Il suit d'un calcul direct que τ est **R**-linéaire, multiplicatif (en utilisant la formule du produit matriciel comme à la question précédente), que $\tau(I_n) = I_n$ de sorte que τ est un morphisme de **R**-algèbres. En outre $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbf{C})}$ de sorte que τ est involutif et donc bijectif. □

2.c. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On a

$$\begin{aligned} \det(\bar{A}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{i,\sigma(i)}} \\ &= \overline{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}} \\ &= \overline{\det(A)}. \end{aligned}$$

□

2.d. En déduire que, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, $\det(A\bar{A}) \in \mathbf{R}_+^*$.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On a donc $\det(A) \neq 0$ et ainsi

$$\begin{aligned} \det(A\bar{A}) &= \det(A)\det(\bar{A}) \\ &= \det(A)\overline{\det(A)} \\ &= |\det(A)|^2 > 0. \end{aligned}$$

□

3. Densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

3.a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C},\, 0 < |\lambda| < \eta \quad \Rightarrow \quad A - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$

$\chi_A(X) = (-1)^n \det(A - XI_n) \in \mathbf{C}[X]$ admet un nombre fini de racines. Ainsi, l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ des racines de χ_A est discret. Il existe donc $\eta > 0$ tel que la boule ouverte $B(0, \eta[$ ne contient pas de racine autre que 0 (le cas échéant). Ainsi,

$$\forall \lambda \in \mathbf{C},\, 0 < |\lambda| < \eta \quad \Rightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$

□

3.b. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Considérons $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de complexes non nuls convergeant vers 0. On note, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A_k = A - \lambda_k I_n$ de sorte que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$. Avec le réel η construit en 3.a., la suite $(\lambda_k)_k$ convergeant vers 0, il existe un entier N tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$k \geq N \quad \Rightarrow \quad 0 < |\lambda_k| < \eta.$$

Ainsi,

$$k \geq N \quad \Rightarrow \quad \det(A_k) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}).$$

Il s'ensuit que $A \in \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})}$ (la barre désignant évidemment ici l'adhérence) et donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) = \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})}.$$

□

4. On suppose dans cette question que A est inversible.

4.a. Calculer $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \bar{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$.

On a

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \bar{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \bar{A} + \bar{B}A^{-1}B \end{bmatrix}.$$

□

4.b. En déduire qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ *à déterminer* telle que :

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\bar{C}).$$

A étant inversible, $\bar{A}$ l'est aussi et $\bar{A}^{-1} = \overline{A^{-1}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \bar{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix}\right) \times \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \bar{B}A^{-1} & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \bar{A} + \bar{B}A^{-1}B \end{bmatrix}\right) \\
&= \det(A)\det(\bar{A} + \bar{B}A^{-1}B) \\
&= \det(A)\det(\bar{A}(I_n + \bar{A}^{-1}\bar{B}A^{-1}B)) \\
&= \det(A)\det(\bar{A})\det(I_n + \bar{A}^{-1}\bar{B}A^{-1}B) \\
&= \det(A)\overline{\det(A)}\det(I_n + \bar{A}^{-1}\bar{B}A^{-1}B) \\
&= |\det(A)|^2 \det(I_n + C\bar{C}),
\end{aligned}$$

avec $C = \bar{A}^{-1}\bar{B}$. □

5. Montrer que (1) et (2) sont équivalentes.

Montrons que (1) implique (2). Pour cela, on considère une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et on se donne une matrice inversible A. On pose alors $B = A\bar{C}$. Il suit alors de la question 4.b que

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}\right) = |\det(A)|^2 \det(I_n + C\bar{C})$$

et donc

$$\det(I_n + C\bar{C}) = \frac{1}{|\det(A)|^2} \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbf{R}_+.$$

Réciproquement, supposons (2) et considérons $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on considère une suite $(A_k)_k$ de matrices inversibles convergeant vers A et, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $C_k = \overline{A_k}^{-1}\overline{B}$. Il suit de la question 4.b que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \det\left(\begin{bmatrix} A_k & B \\ -\bar{B} & \bar{A}_k \end{bmatrix}\right) = |\det(A_k)|^2 \det(I_n + C_k\bar{C}_k) \in \mathbf{R}_+$$

mais alors

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}\right) = \lim_{k:+\infty} \det\left(\begin{bmatrix} A_k & B \\ -\bar{B} & \bar{A}_k \end{bmatrix}\right) \in \mathbf{R}_+$$

car le déterminant est continu et $\mathbf{R}_+$ est fermé. $\square$

Partie II : démonstration de (2) dans un cas particulier

On considère : $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid \chi_{C\bar{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples$\}$.

Soit $C \in \Omega$.

6. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$.

6.a. Montrer que si A est inversible, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
***Indication :* On pourra montrer que AB et BA sont semblables.**

Puisque $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, on a $AB = ABAA^{-1} = A(BA)A^{-1}$ et donc AB et BA sont semblables, elles ont ainsi le même polynôme caractéristique. $\square$

6.b. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
***Indication :* on pourra utiliser la question 3.b.**

L'application

$$\chi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{C}_n[X] \\ A & \mapsto & \chi_A \end{cases}$$

est continue car les coefficients de χ_A sont polynomiaux en les entrées de A.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $(A_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de matrices inversibles convergeant vers A. Par continuité du produit et de l'application χ, on a donc

$$\chi_{A_kB} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{AB} \quad \text{et} \quad \chi_{BA_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{BA}.$$

Mais chaque A_k étant inversible, il suit de la question précédente que $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$ et donc, par unicité de la limite,

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

$\square$

6.c. Montrer que $\chi_{C\bar{C}} \in \mathbf{R}[X]$.

On a

$$\begin{aligned} \overline{\chi_{C\bar{C}}} &= \overline{\det(XI_n - C\bar{C})} \\ &= \det(\overline{XI_n - C\bar{C}}) \\ &= \det(XI_n - \bar{C}C) \\ &= \chi_{\bar{C}C} \\ &= \chi_{C\bar{C}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overline{\chi_{C\bar{C}}} = \chi_{C\bar{C}}$$

et donc, le raisonnement n'utilisant pas l'hypothèse que $C \in \Omega$, on a montré que

$$\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \quad \chi_{C\bar{C}} \in \mathbf{R}[X].$$

□

7. Montrer que $C\bar{C}$ est diagonalisable. Que dire de la dimension des sous-espaces propres ?

$C \in \Omega$ donc $\chi_{C\bar{C}}$ est scindé à racines simples donc le polynôme minimal de $C\bar{C}$ est scindé à racines simples et donc $C\bar{C}$ est diagonalisable.

En outre, $\chi_{C\bar{C}}$ est de degré n donc $C\bar{C}$ admet n valeurs propres distinctes. En particulier, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(C\bar{C})$, on a $\dim E_\lambda(C\bar{C}) = 1$. □

8. Soit λ une valeur propre *réelle* de $C\bar{C}$ et $c \in \mathbf{C}^n$ un vecteur propre associé.

8.a. Montrer que $\bar{C}C\bar{v} = \lambda\bar{v}$.

Il suit de 2.a et 2.b que

$$\begin{aligned}\bar{C}C\bar{v} &= \overline{C\bar{C}v}\\ &= \overline{\lambda v}\\ &= \bar{\lambda}\bar{v}\\ &= \lambda\bar{v}.\end{aligned}$$

□

8.b. En calculant $C\bar{C}C\bar{v}$, montrer qu'il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel $C\bar{v} = \mu v$.

$$\begin{aligned}C\bar{C}(C\bar{v}) &= C(\bar{C}C\bar{v})\\ &= C\lambda\bar{v}\\ &= \lambda C\bar{v}.\end{aligned}$$

Ainsi, $C\bar{v} \in E_\lambda(C\bar{C})$. Or on a vu en 7 que $\dim E_\lambda(C\bar{C}) = 1$ de sorte que $E_\lambda(C\bar{C}) = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v)$. Ainsi, $C\bar{v} \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v)$ et donc il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $C\bar{v} = \mu v$. □

8.c. Calculer $C(\bar{\mu}\bar{v})$ de deux manières différentes. En déduire que $\lambda \in \mathbf{R}_+$.

On a

$$\begin{aligned}C(\bar{\mu}\bar{v}) &= C(\overline{\mu v})\\ &= C(\overline{C\bar{v}})\\ &= C\bar{C}v\\ &= \overline{\bar{C}C\bar{v}}\\ &= \overline{\lambda\bar{v}}\\ &= \bar{\lambda}v\\ &= \lambda v.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}C(\bar{\mu}\bar{v}) &= \bar{\mu}C\bar{v}\\ &= \bar{\mu}\mu v\\ &= |\mu|^2 v.\end{aligned}$$

Mais $v \neq 0$ donc $\lambda = |\mu|^2 \in \mathbf{R}^+$. □

9. Montrer que $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbf{R}_+$.

$C\bar{C}$ est diagonalisable à valeurs propres distinctes et $\chi_{C\bar{C}} \in \mathbf{R}[X]$ donc $\overline{\mathrm{Sp}(C\bar{C})} = \mathrm{Sp}(C\bar{C})$ et donc on peut écrire

$$\mathrm{Sp}(C\bar{C}) = \{\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_r, \overline{\mu_r}\} \sqcup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$$

avec les $\mu_i \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ et les $\gamma_i \in \mathbf{R}$. D'après la question 8, on a $\gamma_i \geq 0$ pour tout $i \in [\![1, s]\!]$. Les valeurs propres étant deux à deux distinctes, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$P^{-1}C\bar{C}P = \mathrm{diag}(\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_r, \overline{\mu_r}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$$

et donc

$$P^{-1}(C\bar{C}+I_n)P = P^{-1}C\bar{C}P + I_n = \mathrm{diag}(\mu_1+1, \overline{\mu_1+1}, \ldots, \mu_r+1, \overline{\mu_r+1}, \gamma_1+1, \gamma_2+1, \ldots, \gamma_s+1)$$

et donc

$$\begin{aligned}\det(C\bar{C}+I_n) &= \det(P^{-1}(C\bar{C}+I_n)P) \\ &= \prod_{i=1}^{r} |\mu_i+1|^2 \times \prod_{j=1}^{s} (\gamma_j+1) \in \mathbf{R}_+.\end{aligned}$$

□

Partie III : résultant de deux polynômes

Soit $(q,r) \in (\mathbf{N}^*)^2$ un couple d'entiers naturels non nuls.

Soient $P = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k \in \mathbf{K}_q[X]$ un polynôme de degré Q et $Q = \sum_{l=0}^{r} b_l X^l \in \mathbf{K}_r[X]$ un polynôme de degré r.

On pose :

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P,Q) = \det\left(\begin{bmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \ddots & & & & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & a_1 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \ddots & b_0 \\
a_q & \vdots & & & & \ddots & a_0 & \vdots & & & & & b_1 \\
0 & a_q & & & & & a_1 & b_r & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots & 0 & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_q & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_r
\end{bmatrix}\right).$$

$\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P,Q)$ **est appelé résultant de P et Q. C'est le déterminant de la matrice carrée de taille $q+r$, appelée matrice de Sylvester et notée $\mathrm{Syl}(P,Q)$.**

On pose $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{r-1},0),(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{q-1}))$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{can}} = (X^k)_{0\le k\le q+r-1}$.

On considère enfin l'application $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{r-1}[X]\times\mathbf{K}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_{q+r-1}[X] \\ (U,V) & \mapsto & PU+QV \end{array}\right.$.

10. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{K}_{r-1}[X]\times\mathbf{K}_{q-1}[X]$.

On vérifie immédiatement que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $q+r$ vecteurs dans $\mathbf{K}_{r-1}[X]\times\mathbf{K}_{q-1}[X]$, or

$$\dim(\mathbf{K}_{r-1}[X]\times\mathbf{K}_{q-1}[X]) = \dim\mathbf{K}_{r-1}[X] + \dim\mathbf{K}_{q-1}[X] = r+q.$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{K}_{r-1}[X]\times\mathbf{K}_{q-1}[X]$. □

11. Montrer que ϕ est une application linéaire.

La linéarité résulte d'un calcul direct que nous laissons au lecteur. Vérifions néanmoins que ϕ est bien définie. Soit $U \in \mathbf{K}_{r-1}[X]$, on a $\deg(PU) = \deg P + \deg U \le q+(r-1)$ donc $PU \in \mathbf{K}_{q+r-1}[X]$. De même, si $V \in \mathbf{K}_{q-1}[X]$, on a $\deg(QV) = \deg(Q)+\deg(V) \le r+(q-1)$ de sorte que $QV \in \mathbf{K}_{q+r-1}[X]$. Ainsi, $\phi(U,V) = PU+QV \in \mathbf{K}_{r+q-1}[X]$ puisque $\mathbf{K}_{r+q-1}[X]$ est stable par somme. □

12. Expliciter sa matrice M relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$.

Pour tout $i \in [\![0, q-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\phi(0, X^i) &= QX^i \\ &= \sum_{k=0}^{r} b_k X^{k+i} \\ &= \sum_{k=i}^{r+i} b_{k-i} X^k\end{aligned}$$

et, pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\phi(X^j, 0) &= PX^j \\ &= \sum_{k=0}^{q} a_k X^{k+j} \\ &= \sum_{k=j}^{q+h} a_{k-j} X^k.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\phi) = \mathrm{Syl}(P, Q).$$

□

13. On suppose que $P \wedge Q = 1$.

13.a. Montrer que ϕ est injective.

Soit $(U, V) \in \ker(\phi)$. Alors $UP + VQ = 0$ et donc

$$UP = -VQ.$$

Ainsi, P divise UP donc P divise VQ. Mais P est premier avec Q donc il suit du lemme de Gauss que P divise V. Mais, si $V \neq 0$, $\deg(V) = q - 1 < q = \deg(P)$, une contradiction. Ainsi, $V = 0$. Il s'ensuit que $U = 0$ et donc $\ker(\phi) = \{(0, 0)\}$ et ϕ est injective. □

13.b. En déduire que $\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, Q) \neq 0$.

On a

$$\dim(\mathbf{K}_{r-1}[X] \times \mathbf{K}_{q-1}[X]) = q + r = \dim \mathbf{K}_{q+r-1}[X]$$

et ϕ est injective donc ϕ est bijective. Il s'ensuit que $M \in \mathrm{GL}_{q+r}(\mathbf{C})$ et donc

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, Q) = \det(M) \neq 0.$$

□

14. On suppose $P \wedge Q \neq 1$. Montrer que ϕ n'est pas injective puis que $\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, Q) = 0$.

Soit $D = P \wedge Q$. On a donc

$$\begin{cases} P = DP_1 & \text{avec } \deg(P_1) \leq \deg(P) - 1 = q - 1 \\ Q = DQ_1 & \text{avec } \deg(Q_1) \leq \deg(Q) - 1 = r - 1. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\phi(Q_1, -P_1) &= Q_1 P - P_1 Q \\ &= Q_1 D P_1 - P_1 D Q_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

et donc

$$\ker(\phi) \neq \{(0, 0)\}.$$

Il s'ensuit que ϕ n'est pas injective et donc que M n'est pas inversible. Ainsi,

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, Q) = \det(M) = 0.$$

□

Ainsi, on a démontré que : $P \wedge Q = 1$ si et seulement si $\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, Q) \neq 0$.

On pose $\Delta(P) = \dfrac{(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}}{a_q}\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, P')$, où P' désigne le polynôme dérivé de P. $\Delta(P)$ est appelé discriminant de P.

15. On suppose ici que P est de degré 2 et on pose $P = aX^2 + bX + c$. Calculer $\Delta(P)$.

Si $P = aX^2 + bX + c$, on a $P' = 2aX + b$ et donc

$$\mathrm{Syl}(P, P') = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 \\ b & b & 2a \\ c & 0 & b \end{bmatrix}.$$

Ainsi, en développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, P') = -a(b^2 - 4ac)$$

et donc

$$\Delta(P) = b^2 - 4ac.$$

□

16. On suppose ici que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et par conséquent $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que P est scindé à racines simples si et seulement si $\Delta(P) \neq 0$.

$\mathbf{C}$ étant algébriquement clos, on a

$$\begin{aligned} P \text{ scindé à racines simples} \quad &\Leftrightarrow \quad P \wedge P' = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(P, P') \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \Delta(P) \neq 0. \end{aligned}$$

□

Partie IV : quelques résultats sur les fonctions polynomiales à plusieurs variables

Soit d un entier naturel non nul.

On dit qu'une fonction $P : \mathbf{C}^d \longrightarrow \mathbf{C}$ est polynomiale lorsqu'il existe une partie finie S de $\mathbf{N}^d$ et une famille $(a_k)_{k \in S}$ de nombres complexes telles que :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbf{C}^d, \quad P(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \sum_{(k_1, \ldots, k_d) \in S} a_{(k_1, \ldots, k_d)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}.$$

Soit P une fonction polynomiale.

En reprenant les notations précédentes, on pose : $Z_P = \big\{(x_k)_{1 \le k \le d} \in \mathbf{C}^d \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_d) = 0\big\}$.

17.a. Soient $I_1, I_2, \ldots, I_d$ des parties infinies de $\mathbf{C}$. On suppose que $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d \subset Z_P$. Montrer que P est la fonction polynomiale nulle, *i.e.* que tous ses coefficients sont nuls.
***Indication :* on pourra procéder par récurrence sur d.**

Si $d = 1$, alors $P \in \mathbf{K}[X]$ admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

Supposons la propriété vraie à un rang $d \ge 1$ et montrons qu'elle est vraie au rang $d{+}1$. Pour tout $(x_1, \ldots, x_d) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$, la fonction $z \mapsto P(x_1, x_2, \ldots, x_d, z)$ est polynomiale sur $\mathbf{K}$ et s'annule sur l'ensemble infini I_{d+1}, il s'ensuit que c'est le polynôme nul. Mais, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_d, z) = \sum_{k_{d+1}} \left(\sum_{(k_1, \ldots, k_d)} a_{(k_1, \ldots, k_d, k_{d+1})} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d} \right) z^{k_{d+1}}.$$

Ainsi, pour tout k_{d+1}, la fonction polynomiale

$$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \sum_{(k_1, \ldots, k_d)} a_{(k_1, \ldots, k_d, k_{d+1})} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_d^{k_d}$$

s'annule sur $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ et donc, par hypothèse de récurrence, chaque $a_{(k_1, k_2, \ldots, k_d, k_{d+1})}$ est nul. Ceci étant vrai pour tous les exposants k_{d+1}, on en déduit que tous les coefficients de P sont nuls.

□

17.b. En déduire que si $P \neq 0$, alors Z_P est un fermé d'intérieur vide, puis que $\mathbf{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert dense dans $\mathbf{C}^d$.

Soit $P \neq 0$. $\mathbf{C}$ étant algébriquement clos, le polynôme $P(X, X, \dots, X) \in \mathbf{C}[X]$ s'annule sur $\mathbf{C}$ en un point z_0 et donc $(z_0, z_0, \dots, z_0) \in Z_P$ ce qui prouve que Z_P est non-vide. Par ailleurs, $Z_P = P^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque du singleton $\{0\}$, qui est fermé dans $\mathbf{C}$, par P qui est une application continue. Il s'ensuit que Z_P est un fermé de de $\mathbf{C}^d$. Enfin, si $\mathring{Z(P)} \neq \emptyset$, alors il existe une boule ouverte $B \subset Z_P$. Ainsi, P s'annule sur B mais alors P est le polynôme nul d'après la question 17.a. Ainsi, $\mathring{Z(P)} = \emptyset$.

En passant au complémentaire, on obtient que $\mathbf{C}^d \setminus Z_P$ est un ouvert dense de Z_P.

$\square$

On rappelle que $\Omega = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \mid \chi_{C\bar{C}}$ est un polynôme scindé à racines simples$\}$.

18. À l'aide du discriminant, montrer que Ω est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

On pose

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ M & \mapsto & \Delta(\chi_{M\bar{M}}). \end{cases}$$

Alors on peut écrire Δ comme la composition

$$M \mapsto (M, \bar{M}) \mapsto M\bar{M} \mapsto \chi_{M\bar{M}} \mapsto (\chi_{M\bar{M}}, \chi'_{M\bar{M}}) \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{K}}(\chi_{M\bar{M}}, \chi'_{M\bar{M}})$$

et toutes les applications impliquées dans cette composition sont continues : conjugaison, produit matriciel, applications coordonnées, dérivation (linéaire en dimension finie), déterminants en les entrées d'une matrice.

Ainsi,

$$\Omega = \Delta^{-1}(\mathbf{C}^*)$$

est un ouvert dense comme image réciproque d'un ouvert dense par une application continue. $\square$

19. Démontrer l'assertion (2).

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Si $C \in \Omega$, il suit de la question 9 que $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbf{R}_+$. Sinon, il existe une suite $(C_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \Omega^{\mathbf{N}}$ telle que $C_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} C$ et donc, par continuité, $\det(I_n + C_k\overline{C_k}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(I_n + C\bar{C})$. Mais pour tout $k \in \mathbf{N}$, $C_k \in \Omega$ donc $\det(I_n + C_k\overline{C_k}) \in \mathbf{R}_+$ et $\mathbf{R}_+$ est fermé donc $\det(I_n + C\bar{C}) \in \mathbf{R}_+$. $\square$

20.a. Montrer plus généralement que, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}_+, \quad \det(\lambda I_n + C\bar{C}) \geq 0.$$

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Si $\lambda = 0$, on choisit une suite $(C_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \Omega^{\mathbf{N}}$ telle que $C_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} C$. Alors

$$\det(C\bar{C}) = \lim_{k:+\infty} \det(C_k\bar{C}_k) \in \mathbf{R}_+$$

d'après la question 8.

Si $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n + C\bar{C}) &= \lambda^n \det\left(I_n + \frac{1}{\lambda}C\bar{C}\right) \\ &= \lambda^n \det\left(I_n + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}C\right)\overline{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}C\right)}\right) \in \mathbf{R}_+ \end{aligned}$$

d'après 19 appliqué à $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}C$. $\square$

20.b. En déduire que si M est une matrice telle qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $M = A^2$, alors les valeurs propres réelles strictement négatives de M sont de multiplicité paire.

On a $M = A^2 = A\bar{A}$ car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\chi_M(-\lambda) = (-1)^n \det(\lambda I_n + M) = (-1)^n \det(\lambda I_n + A\bar{A})$$

qui est donc de signe constant d'après 20.a. Ainsi, χ_M ne change pas de signe sur $\mathbf{R}_-$.

Or si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap \mathbf{R}_-^*$, on écrit

$$\chi_M(X) = (X - \lambda)^{a_\lambda} P(X)$$

avec $P(\lambda) \neq 0$. Ainsi P est de signe constant au voisinage de λ (d'après le théorème des valeurs intermédiaires car P est continu) et donc, puisque χ_M est de signe constant au voisinage de λ, a_λ est nécessairement pair. $\square$

20.c. En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est l'image d'une matrice réelle par l'application exponentielle alors les valeurs propres réelles négatives de M sont de multiplicité paire.

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M = \exp(N)$. Alors $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ de sorte que 0 n'est pas valeur propre de M, ainsi toute valeur propre négative de M est strictement négative. En outre,

$$M = \exp\left(2 \times \frac{1}{2}N\right) = \exp\left(\frac{1}{2}N\right)^2$$

et $\exp\left(\frac{1}{2}N\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Le résultat suit alors de 20.b avec $A = \exp\left(\frac{1}{2}N\right)$. □

Partie V : autre manière d'introduire le résultant

Soit $D \in \mathbf{K}[X]$ tel que $D \neq 0$.

Pour tout polynôme U, on note $\mathrm{quo}_D(U)$ (resp. $\mathrm{rem}_D(U)$) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de U par D.

21. Montrer que quo_D et rem_D sont des endomorphismes de $\mathbf{K}[X]$ et que rem_D est un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

Pour tout $U \in \mathbf{K}[X]$, on a

$$U = D\mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{rem}_D(U)$$

et $(\mathrm{quo}_D(U), \mathrm{rem}_D(U))$ est caractérisé par cette égalité si rem_D est nul ou $\deg \mathrm{rem}_D(U) \leq \deg(D) - 1$.

Soient $U, V \in \mathbf{K}[X]$, on a

$$U = D\mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{rem}_D(U) \quad \text{et} \quad V = D\mathrm{quo}_D(V) + \mathrm{rem}_D(V)$$

avec $\deg(\mathrm{rem}_D(U)) \leq \deg(D) - 1$ et $\deg(\mathrm{rem}_D(V)) \leq \deg(D) - 1$. Ainsi,

$$\lambda U + V = D(\lambda\mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{quo}_D(V)) + (\lambda\mathrm{rem}_D(U) + \mathrm{rem}_D(V))$$

et

$$\deg(\lambda\mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{quo}_D(V)) \leq \max(\deg(U), \deg(V)) \leq \deg(D) - 1$$

donc

$$\mathrm{quo}_D(\lambda U + V) = \lambda\mathrm{quo}_D(U) + \mathrm{quo}_D(V)$$

et

$$\mathrm{rem}_D(\lambda U + V) = \lambda\mathrm{rem}_D(U) + \mathrm{rem}_D(V).$$

En outre,

$$\mathrm{rem}_D(U) = 0 \times D + \mathrm{rem}_D(U)$$

donc $\mathrm{rem}_D(\mathrm{rem}_D(U)) = \mathrm{rem}_D(U)$ et donc rem_D est un projecteur.

On a

$$U \in \ker(\mathrm{rem}_D) \quad \Leftrightarrow \quad U = D\mathrm{quo}_D(U) + 0 \quad \Leftrightarrow \quad D|U$$

donc

$$\ker(\mathrm{rem}_D) = (D),$$

où (D) est l'idéal de $\mathbf{K}[X]$ engendré par D.

Enfin, $\mathrm{im}(\mathrm{rem}_D) \subset \mathbf{K}_{d-1}[X]$, avec $d = \deg(D)$, et pour tout $P \in \mathbf{K}_{d-1}[X]$, on a $\mathrm{rem}_D(P) = P$ donc

$$\mathrm{im}(\mathrm{rem}_D) = \mathbf{K}_{d-1}[X].$$

En conclusion, rem_D est la projection sur $\mathbf{K}_{d-1}[X]$ parallèlement à (D). □

On reprend les notations de la partie III. On note (Q) l'idéal de $\mathbf{K}[X]$ engendré par Q et on pose $E = \mathbf{K}[X]/(Q)$. Pour tout $U \in \mathbf{K}[X]$, on note $\bar{U}$ la classe de U modulo Q.

22. Montrer que E est un K-espace vectoriel de dimension r et que $\mathcal{B}_0 = (\bar{1}, \bar{X}, \ldots, \bar{X}^{r-1})$ en est une base.

D'après le premier théorème d'isomorphisme appliqué à rem_Q, rem_Q induit un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels

$$\pi_Q : \mathbf{K}[X]/\ker(\mathrm{rem}_Q) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\mathrm{rem}_Q),$$

c'est-à-dire un isomorphisme $\pi_Q : E \longrightarrow \mathbf{K}_{r-1}[X]$. Ainsi, E est de dimension r.

En outre, pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, on a $\pi_Q(X^i) = \overline{X^i} = \overline{X}^i$ donc $\mathcal{B}_0$ est l'image par π_Q^{-1} de la base canonique de $\mathbf{K}_{r-1}[X]$. Il s'ensuit que $\mathcal{B}_0$ est une base de E. □

23. On considère l'endomorphisme : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overline{U} & \mapsto & \overline{PU} \end{array} \right.$.

D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $j \in [\![0, r-1]\!]$, il existe un unique couple (U_j, R_j) appartenant à $\mathbf{K}[X]^2$ tel que $X^j P = QU_j + R_j$ et $\deg(R_j) \leq r-1$.

On note $\tilde{R}$ la matrice de la famille $(R_0, R_1, \ldots, R_{r-1})$ relativement à la base canonique de $\mathbf{K}_{r-1}[X]$.

23.a. Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel E si et seulement si $P \wedge Q = 1$.

Soit $U \in \mathbf{K}[X]$. Alors
$$\overline{U} \in \ker(f) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\overline{PU}\right) = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{PU} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad Q|PU.$$

Supposons $P \wedge Q = 1$ et soit $U \in \mathbf{K}[X]$ tel que $\overline{U} \in \ker(f)$. Alors Q divise PU et donc, d'après le lemme de Gauss, Q divise U, c'est-à-dire que $\overline{U} = 0$. Ainsi, $\ker(f) = \left\{\overline{0}\right\}$ et donc f est injective, et donc bijective.

Supposons maintenant que $P \wedge Q = D \neq 1$ et posons $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$ et $\deg(Q_1) < \deg(Q)$ et donc $\overline{Q}_1 \neq \overline{0}$. On a alors
$$f(\overline{Q_1}) = \overline{PQ_1} = \overline{P_1 D Q_1} = \overline{QP_1} = \overline{0}.$$
Ainsi, $\overline{Q_1} \in \ker(f) \setminus \left\{\overline{0}\right\}$ et f n'est pas injective, ni bijective. □

23.b. Exprimer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$ de f relativement à la base $\mathcal{B}_0$ à l'aide de la matrice R.

On a $\mathcal{B}_0 = (\overline{X}^k)_{0 \leq k \leq r-1}$ et, pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, on a
$$\begin{aligned} f(\overline{X^i}) &= \overline{PX^i} \\ &= \overline{QU_i + R_i} \\ &= \overline{R_i} \\ &= \sum_j r_{j,i} \overline{X^j} \qquad \text{où } R_i = \sum_j r_{j,i} X^j. \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = \tilde{R}.$$
□

24. On considère l'endomorphisme $\tilde{f} \;: \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{K}_{q+r-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto & P \times \mathrm{rem}_Q(S) + Q \times \mathrm{quo}_Q(S) \end{array} \right.$.

24.a. Montrer que l'endomorphisme $\tilde{f}$ est bien défini.

Soit $S \in \mathbf{K}_{q+r-1}[X]$.

On a $\deg(Q) = r$ donc $\deg(\mathrm{rem}_Q(S)) \leq \deg(Q) - 1 = r - 1$ et donc
$$\deg(P \times \mathrm{rem}_Q(S)) \leq q + r - 1.$$
En outre,
$$S = Q\mathrm{quo}_Q(S) + \mathrm{rem}_Q(S)$$
donc $\mathrm{quo}_Q(S) = 0$ ou $\deg \mathrm{quo}_Q(S) = \deg S - \deg Q$. Dans les deux cas,
$$\deg(Q \times \mathrm{quo}_Q(S)) \leq q + r - 1.$$
$\mathbf{K}_{q+r-1}$ étant stable par somme, $\tilde{f}(S) \in \mathbf{K}_{q+r-1}[X]$ et donc $\tilde{f}$ est bien défini. □

24.b. Pour tout $(U, V) \in \mathbf{K}_{r-1}[X] \times \mathbf{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\tilde{f}(U + QV)$.

Pour tout $(U, V) \in \mathbf{K}_{r-1}[X] \times \mathbf{K}_{q-1}[X]$, on a par linéarité
$$\begin{aligned} \tilde{f}(U + QV) &= P\mathrm{rem}_Q(U + QV) + Q\mathrm{quo}_Q(U + QV) \\ &= P\mathrm{rem}_Q(U) + P\mathrm{rem}_Q(QV) + Q\mathrm{quo}_Q(U) + Q\mathrm{quo}_Q(QV) \end{aligned}$$
mais $\deg(U) \leq r - 1 = \deg(Q) - 1$ donc $U = \mathrm{rem}_Q(U)$ et $\mathrm{quo}_Q(U) = 0$. Par ailleurs, $QV = QV + 0$ donc $\mathrm{quo}_Q(QV) = V$ et $\mathrm{rem}_Q(QV) = 0$. Ainsi,
$$\tilde{f}(U + QV) = PU + QV.$$
□

24.c. À l'aide de la famille $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, \ldots, X^{r-1}, Q, XQ, \ldots, X^{q-1}Q)$ est une base de $\mathbf{K}_{q+r-1}[X]$.

$\deg(Q) = r$ donc $\mathcal{B}_1$ est une famille de polynômes non-nuls de degrés deux à deux distincts, c'est donc une famille libre. Puisqu'elle est de cardinal $q + r$ dans $\mathbf{K}_{q+r-1}[X]$ qui est de dimension $q + r$, c'est une base. □

24.d. À l'aide de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})$, montrer que $\det(\tilde{f}) = \det(f)$.

Pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, on a $\tilde{f}(X^i) = PX^i$ d'après 24.b.

Pour tout $j \in [\![0, q-1]\!]$, on a $\tilde{f}(QX^j) = QX^j$, toujours d'après 24.b.

Mais pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, on a

$$PX^i = QU_i + R_i$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f}) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{R} & 0_{r,q} \\ \hline (\star) & I_q \end{array}\right].$$

On a donc

$$\det(\tilde{f}) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{f})) = \det(\tilde{R}) \times \det(I_q) = \det(\tilde{R}) = \det(f),$$

la dernière égalité provenant de 23.b. □

25. On considère les endomorphismes :

$$\xi \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{q+r-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto & P \times \mathrm{rem}_{X^r}(S) + Q\mathrm{quo}_{X^r}(S) \end{array} \right.$$

et

$$\psi \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{q+r-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_{q+r-1}[X] \\ S & \mapsto & \mathrm{rem}_{X^r}(S) + Q\mathrm{quo}_{X^r}(S) \end{array} \right. .$$

On note $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ la base canonique de $\mathbf{K}_{q+r-1}[X]$.

25.a. Pour tout $(U, V) \in \mathbf{K}_{r-1}[X] \times \mathbf{K}_{q-1}[X]$, expliciter $\xi(U + X^rV)$ et $\psi(U + X^rV)$.

Comme en 24.b, on obtient pour tout $(U, V) \in \mathbf{K}_{r-1}[X] \times \mathbf{K}_{q-1}[X]$,

$$\xi(U + X^rV) = PU + QV \quad \text{et} \quad \phi(U + X^rV) = U + QV.$$

□

25.b. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\xi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\psi)$.

Pour tout $i \in [\![0, q+r-1]\!]$, on a les divisions euclidiennes

$$X^i = 0 \times X^r + X_i \text{ si } i \le r-1$$

et

$$X^i = X^rX^{i-r} + 0 \text{ si } i \ge r.$$

Ainsi,

$$\mathrm{rem}_{X^r}(X^i) = \left\{ \begin{array}{cl} X^i & \text{si} \quad i \le r-1 \\ 1 & \text{sinon} \end{array} \right. \qquad \text{et} \quad \mathrm{quo}_{X^r}(X^i) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si} \quad i \le r-1 \\ X^{i-r} & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Il s'ensuit que

$$\xi(X^i) = \left\{ \begin{array}{cl} PX^i & \text{si} \quad i \le r-1 \\ QX^{i-r} & \text{sinon} \end{array} \right. \qquad \text{et} \quad \psi(X^i) = \left\{ \begin{array}{cl} X^i & \text{si} \quad i \le r-1 \\ QX^{i-r} & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\xi) = \mathrm{Syl}(P, Q)$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\psi) = \left[\begin{array}{c|ccc} & b_0 & & (0) \\ I_r & \vdots & \ddots & \\ & \vdots & & b_0 \\ \hline & b_r & & \vdots \\ 0_{q,r} & & \ddots & \vdots \\ & (0) & & b_r \end{array}\right]$$

□

25.c. Montrer que ψ est un automorphisme.

On a

$$\det(\psi) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}(\psi)) = \det(I_r) \times b_r^q = b_r^q \neq 0$$

donc ψ est un automorphisme. □

25.d. Exprimer $\tilde{f}$ en fonction de ξ et ψ.

Pour tout $i \in [\![0, r]\!]$, on a
$$(\tilde{f} \circ \psi)(X^i) = \tilde{f}(X^i) = PX^i = \xi(X^i),$$
et, pour tout $i \in [\![r+1, q+r-1]\!]$, on a
$$(\tilde{f} \circ \psi)(X^i) = \tilde{f}(QX^{i-r}) = QX^{i-r} = \xi(X^i).$$

Ainsi,
$$\tilde{f} \circ \psi = \xi$$
et donc
$$\tilde{f} = \xi \circ \psi^{-1}.$$

$\square$

26. Montrer que $\operatorname{Res}_{\mathbf{K}}(P, Q) = b_r^q \det(f)$.

On a
$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\mathbf{K}}(P, Q) &= \det \operatorname{Syl}(P, Q) \quad \text{(par définition)} \\ &= \det(\xi) \quad \text{(d'après 25.b.)} \\ &= \det(\tilde{f} \circ \psi) \quad \text{(d'après 25.d.)} \\ &= \det(\tilde{f}) \det(\psi) \\ &= \det(f) \det(\psi) \quad \text{(d'après 24.d.)} \\ &= \det(f) b_r^q \quad \text{(d'après 25.c.)} \end{aligned}$$

$\square$

Partie VI : autre preuve de l'assertion (1)

27. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

27.a. Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

Soit $P = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{bmatrix}$. Alors $P^{-1} = P$ et un produit par blocs donne
$$P^{-1} \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

$\square$

27.b. Démontrer que les matrices $\begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ sont semblables.

Soit $P = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{bmatrix}$. Alors $P^{-1} = P$ et un produit par blocs donne
$$P^{-1} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}.$$

$\square$

28. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que le polynôme caractéristique de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ est dans $\mathbf{R}[X]$.

Posons
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}.$$

En appliquant successivement les résultats de la question 27, on a
$$\overline{M} = \begin{bmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ -B & A \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A & -B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix} = M.$$

Ainsi,
$$\overline{\chi_M} = \chi_{\overline{M}} = \chi_M$$
et donc
$$\chi_M \in \mathbf{R}[X].$$

$\square$

29. On considère le C-espace vectoriel $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ dont on écrira les éléments sous la forme : $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ avec $(X, Y) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Soit θ : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n & \longrightarrow & \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \\ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{bmatrix} \end{array} \right.$.

29.a. Démontrer que θ est une application R-linéaire et que θ commute avec tous les endomorphismes de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ de matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

C'est un calcul direct que nous laissons au lecteur. $\square$

29.b. Que vaut $\theta \circ \theta$?

Un calcul direct montre que $\theta \circ \theta = -\mathrm{id}$. $\square$

29.c. Soit $v \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ non nul. Démontrer que v et $\theta(v)$ sont linéairement indépendants (sur C) et que $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v, \theta(v))$ est stable par θ (où $\mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v, \theta(v))$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ engendré par v et $\theta(v)$).

Supposons $(v, \theta(v))$ liée. Puisque v est non-nul, cela signifie qu'il existe un $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\theta(v) = \lambda v$, autrement dit, v est un vecteur propre de θ associé à la valeur propre λ. Mais puisque $\theta^2 = -\mathrm{id}$ (29.b), $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de θ et donc $\mathrm{Sp}(\theta) \subset \{\pm i\}$. Supposons que $\theta(v) = iv$, en écrivant $v = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}
\theta(v) = iv \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iX \\ iY \end{bmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\overline{Y} & = iX \\ \overline{X} & = iY \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \overline{Y} & = -iX \\ X & = -i\overline{Y} \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \overline{Y} & = -iX \\ \overline{Y} & = iX \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} X & = 0 \\ Y & = 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad v = 0,
\end{aligned}$$

une contradiction. Il en est de même si $\theta = -i$. Ainsi $(v, \theta(v))$ est libre.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$. On a

$$\begin{aligned}
\theta(\lambda v + \mu\theta(v)) &= \theta\left(\begin{bmatrix} \lambda X - \mu\overline{Y} \\ \lambda Y + \mu\overline{X} \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} -\overline{\lambda}\overline{Y} - \overline{\mu}X \\ \overline{\lambda}\overline{X} - \overline{\mu}Y \end{bmatrix} \\
&= \overline{\lambda} \begin{bmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{bmatrix} - \overline{\mu} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \\
&= \overline{\lambda}\theta(v) - \overline{\mu}v \in \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v, \theta(v)).
\end{aligned}$$

$\square$

29.d. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$ stable par θ et soit $v \notin E$.
Démontrer que : $E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v, \theta(v)) = \{0\}$.

Soit $x \in E \cap \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v, \theta(v))$, et soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ tels que $x = \lambda v + \mu\theta(v)$. Il suit de la question 29.c que $\theta(x) = \overline{\lambda}\theta(v) - \overline{\mu}v$. En outre, $\theta(x) \in E$ car E est θ-stable. Ainsi, $\overline{\lambda}x - \mu\theta(x) \in E$ mais alors

$$\overline{\lambda}x - \mu\theta(x) = |\lambda|^2 v + |\mu|^2 v = (|\lambda|^2 + |\mu|^2)v \in E.$$

Puisque $v \notin E$, il vient $\lambda = \mu = 0$ et donc $x = 0$. $\square$

30. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$.
On désigne par E_λ le sous-espace propre associé et par E'_λ le sous-espace caractéristique associé.

30.a. Démontrer que $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre de $\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$ et que : $\theta(E'_\lambda) = E'_{\overline{\lambda}}$.

Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. On sait que $\chi_M \in \mathbf{R}[X]$ d'après 28 donc les racines de χ_M sont conjuguées et donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement si $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}(M)$, ce qui prouve la première assertion. En outre, les multiplicités algébriques respectives a_λ et $a_{\overline{\lambda}}$ de ces valeurs propres sont égales.

D'après 29.a, on sait que θ commute à l'endomorphisme g associé à M. En outre, pour tout v, on a $\theta(\lambda v) = \overline{\lambda}\theta(v)$. Soit alors $v \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$. Puisque θ est un automorphisme, on a

$$\begin{aligned}
v \in E'_\lambda &\Leftrightarrow v \in \ker(g - \lambda \mathrm{id})^{a_\lambda} \\
&\Leftrightarrow (g - \lambda \mathrm{id})^{a_\lambda}(v) = 0 \\
&\Leftrightarrow \theta((g - \lambda \mathrm{id})^{a_\lambda}(v)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (g - \overline{\lambda} \mathrm{id})^{a_\lambda}(\theta(v)) = 0 \\
&\Leftrightarrow (g - \overline{\lambda} \mathrm{id})^{a_{\overline{\lambda}}}(\theta(v)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \theta(v) \in \ker((g - \overline{\lambda} \mathrm{id})^{a_{\overline{\lambda}}}) \\
&\Leftrightarrow \theta(v) \in E'_{\overline{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\theta(E'_\lambda) = E'_{\overline{\lambda}}.$$

□

30.b. Démontrer que si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\dim_{\mathbf{C}} E'_\lambda$ est paire.

Si $\lambda \in \mathbf{R}$, il suit de la question 30.a que E'_λ est θ-stable.

Soit $v_1 \in E'_\lambda$ non nul. Alors il suit de 29.c que $(v_1, \theta(v_1))$ est libre, c'est donc une base d'un sous-espace vectoriel V_1 de E'_λ. Si $V_1 = E'_\lambda$, on a terminé. Sinon, on choisit $v_2 \in E'_\lambda \setminus V_1$ et on pose $V_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbf{C}}(v_2, \theta(v_2))$. Alors $\dim V_2 = 2$ et $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ d'après 29.d. Ainsi, $V_1 \oplus V_2$ est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de E'_λ. E'_λ étant de dimension finie, on construit ainsi par récurrence $V_1, \dots, V_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension 2 tels que

$$E'_\lambda = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p$$

et alors

$$\dim E'_\lambda = 2p.$$

□

31. Démontrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}\right) \in \mathbf{R}_+$.

Soit $M = \begin{bmatrix} A & B \\ -\overline{B} & \overline{A} \end{bmatrix}$. On a

$$\det(M) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \lambda^{a_\lambda}.$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $a_\lambda \in 2\mathbf{N}$ d'après 30.b, on pose $a_\lambda = 2p_\lambda$. Sinon, $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}(M)$ et $a_{\overline{\lambda}} = a_\lambda$ d'après 30.a. Ainsi, si on pose H^+ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, on a

$$\det(M) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap \mathbf{R}} \lambda^{2p_\lambda} \times \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap H_+} \lambda^{a_\lambda} \overline{\lambda}^{a_\lambda} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap \mathbf{R}} (\lambda^{p_\lambda})^2 \times \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M) \cap H_+} |\lambda|^{2a_\lambda} \in \mathbf{R}_+.$$

□

Fin du problème
