

AGRÉGATION INTERNE DE MATHÉMATIQUES 2018

COMPOSITION 2

Correction proposée par G. Dupont et S. Porret-Blanc.

Version du 11 avril 2018.

AVANT-PROPOS DES CORRECTEURS

Présentation du sujet. Le thème général de ce sujet est l'étude de la distance d'un point à un sous-ensemble d'un espace métrique. Les techniques utilisées au fil de l'épreuve relèvent essentiellement de la topologie métrique ou des espaces vectoriels normés, de l'analyse réelle, de la géométrie affine et de l'algèbre linéaire. Le niveau de difficulté est très hétérogène. Les deux premières parties, classiques et abordables, peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. Les deux dernières parties sont nettement plus originales et certaines questions présentent des difficultés réelles ; il nous semble bien difficile d'en venir à bout dans le temps imparti.

Partie I : Topologie métrique et matricielle. La première partie se divise en deux sous-parties. La première établit des résultats généraux concernant la distance d'un point à une partie dans un espace métrique à l'aide de techniques relevant de la topologie métrique. Ces résultats sont surtout utiles à partir de la partie **III** du problème.

La seconde sous-partie de la partie **I** établit, indépendamment de ce qui suivra dans le problème, des résultats relatifs à la distance dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On y établit notamment la décomposition polaire d'une matrice inversible en vue d'étudier la distance d'une matrice au groupe spécial linéaire ou à l'ensemble des matrices singulières. Les techniques utilisées dans cette partie relèvent de l'algèbre linéaire et des espaces vectoriels normés.

Partie II : Analyse réelle. Cette deuxième partie vise à évaluer les compétences des candidats sur des sujets très classiques d'analyse réelle : étude de fonctions, théorème de convergence dominée, calcul de séries, etc. L'objectif est d'y étudier l'ensemble des points sur une courbe représentative de fonction d'une variable réelle situés à égale distance d'une droite donnée. Elle est indépendante de la suite du problème et les techniques sont ici purement analytiques.

Partie III : Ligne médiatrice de deux fermés séparés par une droite. Nous entrons ici dans le cœur du problème. Dans cette partie, pour A, B deux fermés non vides du plan euclidien inclus respectivement dans le demi-espace supérieur et le demi-espace inférieur, nous montrons que l'ensemble $\Gamma_{A,B}$ des points équidistants de A et de B est le graphe d'une fonction $\varphi_{A,B} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Nous établissons ensuite des propriétés de $\Gamma_{A,B}$ et de $\varphi_{A,B}$ dans différents cas. Les techniques utilisées dans cette partie sont mixtes : analyse réelle, géométrie affine, topologie. Le niveau général de cette partie est plus élevé que le niveau des parties précédentes.

Partie IV : Asymptote de la ligne médiatrice. Cette dernière partie vise à montrer que $\Gamma_{A,B}$ admet une asymptote et à la déterminer précisément. On commence par l'étude d'un cas particulier relativement élémentaire mais reposant sur les résultats précédemment établis, puis on passe au cas général, plus ardu. Les techniques utilisées dans cette partie relèvent là aussi de l'analyse réelle, de la géométrie affine et de la topologie. La difficulté de cette partie est nettement supérieure à celle du reste du problème.

Commentaires sur la correction. Cette correction n'a aucun caractère officiel et a été rédigée par deux enseignants n'ayant aucun lien avec le jury du concours. Elle est le seul fruit de la réflexion de deux collègues travaillant bénévolement sur un sujet qu'ils ont jugé intéressant.

Mise en garde : Il est possible qu'elle contienne des erreurs ou des imprécisions ; il est probable qu'elle contienne des maladresses ou des détours. Les commentaires sont bienvenus sur la page dédiée à cette correction sur maths-concours.fr.

Notations spécifiques à la correction. En sus des notations rappelées dans le sujet, nous utiliserons les notations suivantes :

— Si (E, d) est un espace métrique, $x \in E$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, on note

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in E \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in E \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

les boules respectivement ouvertes et fermées de centre x et de rayon ε .

— Si un espace vectoriel E est muni d'une structure euclidienne et $x, y \in E$, on note $\langle x, y \rangle$ leur produit scalaire et $\|x\|$ la norme euclidienne de x .

— Si E est un espace affine euclidien et F un sous-espace affine de E , on note p_F la projection orthogonale sur F .

— Si d_1, d_2, \dots, d_n sont des réels, on note

$$\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{bmatrix} d_1 & & & (0) \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & d_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).$$

— On note $\text{Sp}(u)$ le spectre d'un endomorphisme u et $\text{Sp}(A)$ le spectre d'une matrice A .

— On note $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur \mathbf{R} à valeurs dans \mathbf{R} et $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, ou simplement \mathcal{C}^∞ les fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbf{R} .

— Si une fonction f est dérivable à gauche en un point x , on note $f'_g(x)$ sa dérivée à gauche en x . Si elle est dérivable à droite en x , on note $f'_d(x)$ sa dérivée à droite.

SUJET

Dans ce problème, on s'intéresse à des propriétés illustrant la notion de distance d'un point à une partie d'un ensemble.

Dans la partie **I-A**, on étudie les généralités sur cette notion dans le cas d'un espace métrique et d'un espace affine euclidien.

Dans la partie **I-B**, on donne des exemples de calcul de distance dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Dans la partie **II**, on étudie les points d'une courbe situés à égale distance d'une droite.

Cette partie **II** est indépendante de la partie **I**.

Dans la partie **III**, on étudie la notion de ligne médiatrice de deux fermés non vides séparés par une droite. Cette partie **III** est indépendante des parties **I-B** et **II**.

Dans la partie **IV**, on s'intéresse à l'asymptote de la ligne médiatrice de deux compacts non vides séparés par une droite.

PRÉAMBULE : NOTATIONS ET RAPPELS

- \mathbf{N} désigne l'ensemble des entiers naturels et \mathbf{R} le corps des nombres réels.
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille $n \geq 1$ à coefficients dans \mathbf{R} . On note I_n son élément unité et 0_n la matrice nulle.
- $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Si $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, on note A^{-1} son inverse.
- $O_n(\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\det(A)$ et tA désignent respectivement le déterminant et la transposée de A .
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée.

On **rappelle** les définitions et propriétés suivantes :

- Soit E un espace métrique muni d'une distance d .
Pour $x \in E$ et A une partie non vide de E , on appelle distance de x à A , le réel défini par :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Pour une partie non vide de E , on définit l'application $d_A : x \mapsto d(x, A)$ de E dans \mathbf{R} .

- On se donne, dans \mathbf{R}^2 muni de sa structure affine euclidienne usuelle, un point F et une droite Δ ne contenant pas F . La parabole de foyer F et de directrice Δ est l'ensemble des points m de \mathbf{R}^2 tels que : $d(m, F) = d_\Delta(m)$ (où d désigne la distance euclidienne de \mathbf{R}^2).
- Soit E un espace métrique muni d'une distance d . Soit $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ une application et k un réel strictement positif. On dit que f est k -lipschitzienne si : $\forall (x, y) \in E^2, |f(x) - f(y)| \leq kd(x, y)$.
On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f est k -lipschitzienne.

PARTIE I : QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA DISTANCE À UN FERMÉ

I-A : GÉNÉRALITÉS

Soit E un espace métrique muni d'une distance d .

1. Soient A et B des parties non vides de E avec $A \subset B$.

Démontrer que : $\forall x \in E, d_B(x) \leq d_A(x)$.

Soit $x \in E$. Pour tout $y \in A$, puisque $A \subset B$, on a $y \in B$ et donc

$$d(x, y) \geq \inf_{z \in B} d(x, z) = d_B(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in A$, on a

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y) \geq d_B(x).$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, d_B(x) \leq d_A(x).$$

□

2. On considère A une partie non vide de E et on note \bar{A} son adhérence.

Démontrer que : $\forall x \in E, \quad d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$.

Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} d_A(x) = 0 &\Leftrightarrow \inf_{y \in A} d(x, y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, d(x, y) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in \bar{A}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}.$$

□

3. On considère A une partie non vide de E .

3.a. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y)$.

$\forall (x, y) \in E^2, \forall z \in A$, on a

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in A$, on a

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

et donc

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y).$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y).$$

□

3.b. En déduire que d_A est une application lipschitzienne de E dans \mathbf{R} .

D'après la question 3.a, on a, pour tous $x, y \in E$,

$$d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y)$$

et par symétrie, on

$$d_A(y) - d_A(x) \leq d(y, x) = d(x, y).$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

Autrement dit,

$$d_A \text{ est 1-lipschitzienne.}$$

□

4. On considère A une partie non vide de E et on note \bar{A} son adhérence.

Démontrer que $d_A = d_{\bar{A}}$.

On a $A \subset \bar{A}$ donc $d_{\bar{A}} \leq d_A$ d'après 1.

Soit $x \in E$ et $y \in \bar{A}$. Alors d'après 3.a et 2, on a

$$d_A(x) \underset{(3.a)}{\leq} d(x, y) + d_A(y) \underset{(2)}{=} d(x, y).$$

Ainsi,

$$d_A(x) \leq \inf_{y \in \bar{A}} d(x, y) = d_{\bar{A}}(x).$$

Il vient

$$d_A = d_{\bar{A}}.$$

□

5.a. Soient A et B deux parties fermées non vides de E . Démontrer que : $d_A = d_B \Leftrightarrow A = B$.

Si $A = B$, on a évidemment $d_A = d_B$.

Réciproquement, supposons $d_A = d_B$. Soit $x \in B$. Alors $0 = d_B(x) = d_A(x)$ et donc $x \in \bar{A}$ d'après 2. Mais A est fermé par hypothèse, donc $x \in A$ et donc $B \subset A$. Par symétrie, on obtient de même $A \subset B$ et donc $A = B$.

Ainsi,

$$\text{Pour } A, B \subset E \text{ fermés non vides, on a } d_A = d_B \Leftrightarrow A = B.$$

□

5.b. En déduire alors une condition nécessaire et suffisante très simple sur des parties non vides A et B de E pour avoir la relation $d_A = d_B$.

On a

$$d_A = d_B \Leftrightarrow_{(4)} d_{\bar{A}} = d_{\bar{B}} \Leftrightarrow_{(5.a)} \bar{A} = \bar{B}.$$

Ainsi,

$$\text{Pour } A, B \subset E \text{ non vides, on a } d_A = d_B \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}.$$

□

6. On suppose que A est un compact non vide de E .

Montrer que, pour tout élément x de E , il existe $a \in A$ tel que : $d_A(x) = d(x, a)$.

Soit $x \in E$. L'application $d_{\{x\}} : y \mapsto d(x, y) \in \mathbf{R}$ est continue d'après 3 donc $d_{\{x\}}(A)$ est un compact non vide de \mathbf{R} , ainsi il est minoré et

$$\inf d_{\{x\}}(A) = \min d_{\{x\}}(A).$$

Il existe donc $a \in A$ tel que $\inf d_{\{x\}}(A) = d_{\{x\}}(a)$, c'est-à-dire

$$d(x, a) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d_A(x).$$

□

7. On suppose que E est un espace affine euclidien et que d est la distance euclidienne associée.

On considère A une partie fermée non vide de E .

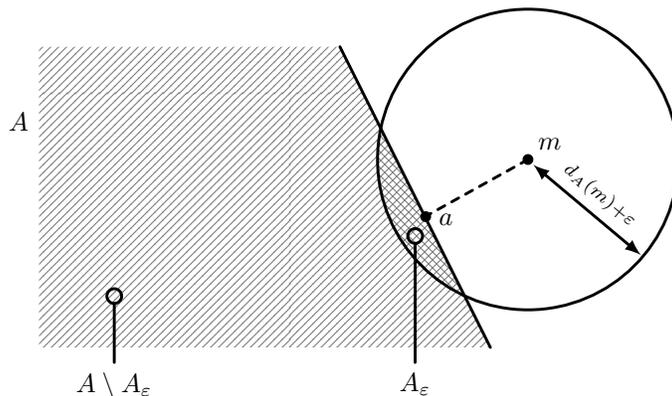
Montrer que, pour tout point m de E , il existe $a \in A$ tel que : $d_A(m) = d(a, m)$.

Si A est compact, cela suit de la question 6. Dans le cas général, on fixe $\varepsilon > 0$ et on pose

$$A_\varepsilon = A \cap \bar{B}(m, d_A(m) + \varepsilon)$$

qui est compact car fermé (comme intersection de fermés) et borné (puisque $\bar{B}(m, d_A(m) + \varepsilon)$ l'est) d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors d'après la question 6, il existe $a \in A_\varepsilon$ tel que

$$d_{A_\varepsilon}(m) = d(a, m).$$



Il ne reste plus qu'à observer que $d_A(m) = d_{A_\varepsilon}(m)$ puisque, pour tout $z \in A \setminus A_\varepsilon$, on a $d(z, m) > d_A(m) + \varepsilon \geq d(a, m)$, et que $a \in A$ puisque $a \in A_\varepsilon \subset A$.

Ainsi,

Si A est fermé et non vide, alors : $\forall m \in E, \exists a \in A, d_A(m) = d(a, m)$.

□

8.a. On se place dans $E = \mathbf{R}$ muni de sa distance usuelle et on considère une partie non vide A de \mathbf{R} . On suppose que, pour tout réel x , il existe un unique élément $a \in A$ tel que : $d_A(x) = d(x, a) = |x - a|$.

8.a. Démontrer que A est un fermé. Soit $x \in \overline{A}$. Alors $d_A(x) = 0$ d'après la question 2. Par hypothèse, il existe donc $x \in A$ tel que $0 = d_A(x) = d(x, a)$, et donc $x = a$. Ainsi,

$$\overline{A} = A.$$

□

8.b. Démontrer que A est un intervalle.

Supposons que A ne soit pas intervalle. Alors il existe $x_0 \in \mathbf{R} \setminus A$ tel que

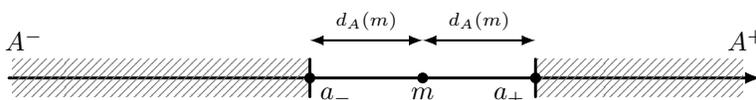
$$A^- = \{x \in A \mid x \leq x_0\} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A^+ = \{x \in A \mid x \geq x_0\} \neq \emptyset.$$

Posons alors :

$$a^- = \sup(A^-) \quad \text{et} \quad a^+ = \inf(A^+)$$

qui sont bien définis car A^- et A^+ sont non vides et respectivement majorés et minorés par x_0 . Puisque $A^- =]-\infty, x_0] \cap A$ et $A^+ = [x_0, +\infty[\cap A$ sont fermés comme intersections de fermés, on a $a^- \in A^-$ et $a^+ \in A^+$. Enfin, puisque A est une partie fermée (question 8.a), $\mathbf{R} \setminus A$ est un ouvert et il existe un voisinage ouvert de x_0 ne contenant pas d'éléments de A : cela implique que $a^- < a^+$. Posons alors :

$$m = \frac{a^- + a^+}{2}.$$



On a alors :

$$d_A(m) = d_{A^-}(m) = d_{A^+}(m)$$

et

$$d(a^-, m) = d_{A^-}(m) = d_{A^+}(m) = d(a^+, m),$$

ce qui contredit l'unicité d'un élément $a \in A$ tel que $d_A(m) = d(a, m)$ donnée en hypothèse. Ainsi, sous l'hypothèse de la question 8, on a

A est un intervalle.

□

9. On se place dans $E = \mathbf{R}^n$, avec $n \geq 1$, muni de sa structure affine euclidienne usuelle. On note d la distance euclidienne associée.

On considère H un hyperplan de \mathbf{R}^n dont une équation cartésienne est : $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$, où (a_1, \dots, a_n) est un élément non nul de \mathbf{R}^n et $b \in \mathbf{R}$.

Établir pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, la relation : $d_H(x) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}$.

Soit $x \in \mathbf{R}^n$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_n) = p_H(x)$ le projeté orthogonal de x sur H . Soit $a = (a_1, \dots, a_n)$. Puisque H admet pour équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0$, on a $a \in H^\perp$.

Puisque $x - x' \in H^\perp$ et que H^\perp est de dimension 1, a et $x - x'$ sont colinéaires et donc

$$\langle a, x - x' \rangle = \|a\| \times \|x - x'\|$$

mais

$$\begin{aligned} \langle a, x - x' \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i(x_i - x'_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_ix_i - \sum_{i=1}^n a_ix'_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_ix_i + b, \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du fait que $x' \in H$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d_H(x) &= d(x, x') \\ &= \|x - x'\| \\ &= \frac{\langle a, x - x' \rangle}{\|a\|} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a_ix_i + b}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$d_H(x) = \frac{|a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

□

I-B : QUELQUES EXEMPLES DANS $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit un entier $n \geq 2$. Soit $E = \mathbf{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle dont la norme est notée $\|\cdot\|$. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont u est l'endomorphisme de \mathbf{R}^n canoniquement associé, on pose :

$$\|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\| \quad \text{et} \quad \|M\| = \|u\|.$$

On rappelle que l'on définit ainsi une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ (notée également $\|\cdot\|$), c'est-à-dire une norme vérifiant :

- (1) $\|I_n\| = 1$;
- (2) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

En particulier, on a : $\forall k \in \mathbf{N}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on considère la distance d associée à la norme d'algèbre $\|\cdot\|$.
(i.e. $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, d(M, N) = \|M - N\|$.)

10.a. Soit u un endomorphisme symétrique de \mathbf{R}^n à valeurs propres positives ou nulles.

Démontrer à l'aide d'une réduction dans une base orthonormale que $\|u\|$ est le maximum de ses valeurs propres.

Puisque u est symétrique, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\lambda_{i_0} = \max \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}.$$

Alors $e_{i_0} \in E_{\lambda_{i_0}}$ et donc

$$\|u(e_{i_0})\| = \lambda_{i_0} \|e_{i_0}\| = \lambda_{i_0}.$$

Ainsi,

$$\|u\| \geq \lambda_{i_0}.$$

Soit maintenant $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \left\| u \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i x_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_{i_0}^2 x_i^2 \\ &= \lambda_{i_0}^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \lambda_{i_0}^2 \|x\|^2 \\ &= \lambda_{i_0}^2. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\|u\| \leq \lambda_{i_0}$.

Ainsi,

$$\|u\| = \lambda_{i_0} = \sup \text{Sp}(u).$$

□

10.b. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique avec des valeurs propres positives ou nulles, alors $\|A\|$ est le maximum de ses valeurs propres.

Puisque A est symétrique, l'endomorphisme u de \mathbf{R}^n canoniquement associé à A est symétrique. Le spectre de A est alors celui de u et $\|A\| = \|u\|$. Il suit alors de la question précédente que

$$\|A\| = \|u\| = \sup \text{Sp}(u) = \sup \text{Sp}(A).$$

□

11. On se donne $M \in GL(n, \mathbf{R})$.

11.a. Démontrer l'existence d'une matrice symétrique $C \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, à valeurs propres strictement positives telle que $C^2 = {}^tMM$.

La matrice tMM est symétrique car ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$. Il existe donc $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que

$${}^tMM = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Montrons que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont strictement positifs. Soit $\lambda \in \text{Sp}({}^tMM)$ et $X \in E_\lambda({}^tMM)$ non nul. Alors

$$\begin{aligned} {}^tMMX &= \lambda X \Rightarrow {}^tX {}^tMMX = \lambda {}^tXX \\ &\Leftrightarrow {}^t(MX)MX = \lambda {}^tXX \\ &\Leftrightarrow \|MX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2}. \end{aligned}$$

Mais $X \neq 0$ et M inversible donc $MX \neq 0$. Ainsi,

$$\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} > 0.$$

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lambda_i > 0$.

Posons

$$C = P \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

On a alors

$$C^2 = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1} = {}^tMM.$$

□

10.b. En déduire l'existence de $U \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $M = UC$.

On admettra l'unicité de la matrice C obtenue précédemment et donc du couple (U, C) dans la décomposition $M = UC$, appelée décomposition polaire de M .

On a ${}^tMM = C^2$ et M est inversible donc

$$M = ({}^tM)^{-1}C^2 = ({}^tM^{-1}C)C.$$

Posons

$$U = {}^tM^{-1}C.$$

Alors ${}^tU = {}^tCM^{-1} = CM^{-1}$ car

$$\begin{aligned} {}^tC &= {}^t(P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}) \\ &= {}^tP^{-1} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) {}^tP \\ &= P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1} \quad (\text{car } P \in O_n(\mathbf{R})) \\ &= C. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} U {}^tU &= {}^tM^{-1}CCM^{-1} \\ &= {}^tM^{-1}C^2M^{-1} \\ &= {}^tM^{-1} {}^tMMM^{-1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$U \in O_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad M = UC.$$

□

12. On considère $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\}$, le groupe spécial linéaire d'ordre n .

12.a. Démontrer que \mathcal{F} est fermé.

On a $\mathcal{F} = \det^{-1}(\{1\})$ et $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ est continue car

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)},$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ , est polynomiale en les entrées de A . Ainsi, \mathcal{F} est continue comme image réciproque du fermé $\{1\}$ par une application continue. □

12.b. Cet ensemble est-il compact ?

Considérons, pour tout $n \geq 2$, la matrice

$$M_n = \begin{bmatrix} n & & & (0) \\ & \frac{1}{n} & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ (0) & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors $\det(M_n) = 1$ donc $M_n \in \mathcal{F}$ mais, d'après 10.b,

$$\|M_n\| = n$$

de sorte que

$$\|M_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi, $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite non bornée de \mathcal{F} et donc \mathcal{F} n'est pas compact. □

13. En utilisant la notion de décomposition polaire vue précédemment, démontrer la relation $d(0_n, \mathcal{F}) = 1$.

Soit $M \in \mathcal{F}$. On écrit sa décomposition polaire $M = UC$.

Puisque $U \in O_n(\mathbf{R})$, c'est une matrice d'isométrie et donc $\|U\| = 1$ et, pour tout C , on a $\|UC\| = \|C\|$. En particulier, $\|M\| = \|C\|$. Par ailleurs, on sait que $\det M = 1$, $\det U = \pm 1$ et $\det(C) > 0$ donc $\det(C) = 1$.

Il suit alors de 11 et de 10.b que

$$\|C\| = \sup \text{Sp}(C) \geq 1,$$

sans quoi le déterminant de C , qui est égal au produit des valeurs propres de C , serait strictement inférieur à 1. Ainsi,

$$1 \leq \|M\| = \|M - 0_n\| = d(M, 0_n).$$

Ceci étant vrai pour toute matrice $M \in \mathcal{F}$, on a

$$1 \leq d(\mathcal{F}, 0_n).$$

Mais $I_n \in \mathcal{F}$ et $d(I_n, 0_n) = 1$ donc

$$d(\mathcal{F}, 0_n) = 1.$$



14. Déterminer avec précision l'ensemble des matrices de \mathcal{F} pour lesquelles cette distance est atteinte.

Avec les notations utilisées à la question 13, on a, pour tout $M \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} d(M, 0_n) = 1 &\Leftrightarrow \|M\| = 1 \\ &\Leftrightarrow \|C\| = 1 \\ &\Leftrightarrow \sup \text{Sp}(C) = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Sp}(C) \subset]0, 1], \\ 1 \in \text{Sp}(C) \end{cases} \end{aligned}$$

Mais on a vu que si $M \in \mathcal{F}$, alors $\det(C) = 1$ et donc nécessairement, $\text{Sp}(C) = \{1\}$. Puisque C est symétrique, elle est diagonalisable et donc $C = I_n$ et $M = U \in O_n(\mathbf{R})$.

Réciproquement, si $M \in O_n(\mathbf{R})$, c'est une matrice d'isométrie et donc $\|M\| = 1$.

Ainsi,

$$\forall M \in \mathcal{F}, \quad d(M, 0_n) = 1 \Leftrightarrow M \in O_n(\mathbf{R}).$$



15.a. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\|A\| < 1$. Démontrer que la série $\sum_{p \in \mathbf{N}} A^p$ converge absolument et que l'on a la relation :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} A^p = (I_n - A)^{-1}.$$

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a :

$$\sum_{p=0}^N \|A^p\| \leq \sum_{p=0}^N \|A\|^p \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \|A\|^p = \frac{1}{1 - \|A\|},$$

puisque $\|A\| < 1$. Ainsi, la série à termes positifs $\sum_{p \in \mathbf{N}} \|A^p\|$ est majorée, donc elle converge.

En outre, pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$(I_n - A) \sum_{p=0}^N A^p = I_n - A^{N+1}.$$

Mais

$$\|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$(I_n - A) \sum_{p=0}^{+\infty} A^p = I_n.$$

Ainsi,

$$I_n - A \in \text{GL}(n, \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad (I_n - A)^{-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} A^p.$$



15.b. Soit $T \in \text{GL}(n, \mathbf{R})$. A l'aide de la question précédente, montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \|T - M\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \Rightarrow M \in \text{GL}(n, \mathbf{R}).$$

On a

$$\begin{aligned}\|I_n - T^{-1}M\| &= \|T^{-1}(T - M)\| \\ &\leq \|T^{-1}\| \|T - M\| \\ &< 1.\end{aligned}$$

Il suit alors de la question 15.a que

$$\sum_{p \in \mathbf{N}} (I_n - T^{-1}M)^p = (I_n - (I_n - T^{-1}M))^{-1} = (T^{-1}M)^{-1}.$$

En particulier, $T^{-1}M \in \text{GL}(n, \mathbf{R})$ et donc

$$M \in \text{GL}_n(\mathbf{R}).$$

□

16. On pose $\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 0\}$, l'ensemble des matrices singulières de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et on considère $T \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$. Établir la relation :

$$d(T, \mathcal{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Indication : On pourra utiliser la décomposition polaire.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Si $d(T, M) < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, il suit de la question 16.b que $M \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$. Ainsi,

$$M \in \mathcal{S} \Rightarrow d(T, M) \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$$

et donc

$$d(T, \mathcal{S}) \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Montrons qu'il existe $M \in \mathcal{S}$ telle que $d(T, \mathcal{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Considérons la décomposition polaire $T = UC$ de T avec $U \in O_n(\mathbf{R})$ et $C^2 = {}^tTT$. On a ainsi $T^{-1} = C^{-1}U^{-1}$ et donc $\|T^{-1}\| = \|C^{-1}\|$. Par ailleurs

$$\|T - M\| = \|UC - M\| = \|C - U^{-1}M\| = \|C - N\|$$

avec $N = U^{-1}M$.

Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de tTT . Il existe ainsi $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que

$$C = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$$

donc

$$C^{-1} = P \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) P^{-1}$$

et ainsi

$$\frac{1}{\|C^{-1}\|} \stackrel{(10.b)}{=} \frac{1}{\sup \text{Sp}(C^{-1})} = \sqrt{\lambda_1}.$$

Posons

$$N = P \text{diag}(0, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1} \in \mathcal{S}.$$

On a donc

$$C - N = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, 0, \dots, 0) P^{-1}$$

et $P \in O_n(\mathbf{R})$ donc

$$\|C - N\| = \sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{\|C^{-1}\|}.$$

Alors, avec $M = UN \in \mathcal{S}$, on a

$$\|T - M\| = \|UC - UN\| = \|C - N\| = \frac{1}{\|C^{-1}\|} = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Il s'ensuit que

$$d(T, S) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

□

PARTIE II : POINTS D'UNE COURBE À ÉGALE DISTANCE D'UNE DROITE

On se place dans \mathbf{R}^2 muni de sa structure euclidienne usuelle et on note d la distance euclidienne associée.

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = \frac{2x}{e^x + 1}$.

17.a. Étudier avec soin les variations de f sur \mathbf{R} et montrer que f admet un maximum atteint en un point $\alpha \in]1, 2[$.

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} comme quotient de fonctions \mathcal{C}^∞ , le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 2 \frac{1 + e^x - xe^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe du numérateur. Étudions ainsi le signe de la fonction g définie sur \mathbf{R} par $g(x) = 1 + e^x - xe^x$. C'est une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad g'(x) = -xe^x.$$

Ainsi, g est strictement croissante sur \mathbf{R}_- et strictement décroissante sur \mathbf{R}_+ . En outre

$$\lim_{x: -\infty} g(x) = 1, \quad g(0) = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x: +\infty} g(x) = -\infty$$

donc g est strictement positive sur \mathbf{R}_- et donc f' aussi. Ainsi, f est strictement croissante sur \mathbf{R}_- .

Sur \mathbf{R}_+ , g' est strictement négative donc g est strictement décroissante. On a $g(1) = 1 > 0$ et $g(2) = 1 - e^2 < 0$ donc il existe un unique $\alpha \in]1, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Alors g est strictement positive sur $] -\infty, \alpha[$ et strictement négative sur $] \alpha, +\infty[$. Il s'ensuit que f est strictement croissante sur $] -\infty, \alpha[$ et strictement décroissante sur $] \alpha, +\infty[$. Elle atteint donc son maximum en $\alpha \in]1, 2[$.

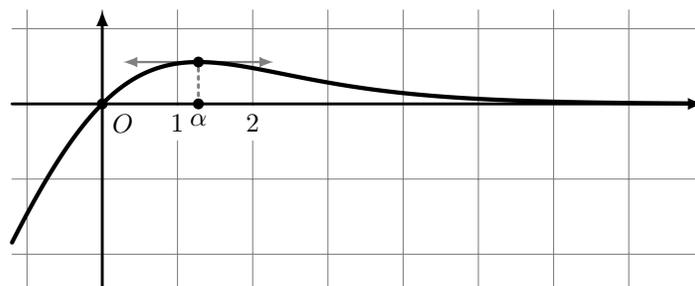
On remarque aussi que

$$\lim_{x: -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x: +\infty} f(x) = 0.$$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗		0	↘	$f(\alpha)$	0

□

17.b. Représenter graphiquement, sur la copie, la fonction f (allure de la courbe demandée). On notera Γ le graphe de f dans le repère affine usuel de \mathbf{R}^2 .



□

18. On suppose disposer d'un programme expo tel que si x est un nombre réel expo(x) calcule e^x .

Écrire une procédure en français alpha telle que si epsilon est un nombre réel de $]0, 1[$, l'instruction alpha(epsilon) donne une valeur approchée de α à epsilon près.

Nous proposons un simple programme de recherche dichotomique. Pour alléger, on définit en amont une fonction f à l'aide de la fonction expo, la syntaxe serait

```
Fonction f(x)
    r = 2*x/(expo(x)+1)
    Retourner r
```

Fin Fonction

On propose ensuite l'algorithme suivant :

```
a = 1
b = 2
Tant que (b-a) > epsilon
    m = (a+b)/2
    Si f(m) > 0
        a = m
    Sinon
        b = m
    Fin Si
Fin Tant que
Afficher a
```

□

19. Démontrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

f est continue sur $[0, +\infty[$ et positive donc intégrable sur tout segment de \mathbf{R}_+ . Par ailleurs, $x^2 f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$f(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Par suite,

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

□

20. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies sur $[0, +\infty[$ par : $\forall n \in \mathbf{N}, f_n : x \mapsto (-1)^n 2x e^{-(n+1)x}$.

Démontrer la relation : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f$ sur $[0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbf{R}_+$ et $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N f_n(x) &= \sum_{n=0}^N (-1)^n 2x e^{-(n+1)x} \\ &= 2x e^{-x} \sum_{n=0}^N (-1)^n e^{-nx} \\ &= 2x e^{-x} \sum_{n=0}^N (-e^{-x})^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2x e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 2x \frac{1}{e^x + 1} = f(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x).$$

□

21. On admet le résultat : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. **Démontrer alors que l'on a :** $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi^2}{6}$.

On a, d'après la question 20,

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Montrons que l'on peut intervertir les signes \sum et \int à l'aide du théorème de convergence dominée. On a les propriétés suivantes :

- (i) $\sum_{n \in \mathbf{N}} f_n$ converge simplement vers f sur \mathbf{R}_+ ;
- (ii) f est continue sur \mathbf{R}_+ ;
- (iii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue sur \mathbf{R}_+ et $x^2 |f_n(x)| = 2x^3 e^{-(n+1)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc f_n est intégrable sur \mathbf{R}_+ ;
- (iv) On a, pour tout $N \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt &= \sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} 2te^{-(n+1)t} dt \\ &\stackrel{\text{(IPP)}}{=} \sum_{n=0}^N \left[-2 \frac{e^{-(n+1)x}((n+1)x+1)}{(n+1)^2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{2}{(n+1)^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

de sorte que la série

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \text{ converge.}$$

Le théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions permet alors d'affirmer que :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

On a ainsi, en reprenant le calcul ci-dessus :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)^2} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} = 2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

22. On note Δ l'axe des abscisses du repère affine usuel de \mathbf{R}^2 .

22.a. On considère deux points M_1 et M_2 de Γ , d'abscisses réelles respectives x_1 et x_2 .

Montrer que $d(M_1, \Delta) = d(M_2, \Delta)$ si et seulement si $|f(x_1)| = |f(x_2)|$.

Pour tout $m = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a $p_\Delta(m) = (x, 0)$ donc $d(m, \Delta) = d(m, p_\Delta(m)) = \sqrt{y^2} = |y|$.

Ainsi, pour $m_1 = (x_1, f(x_1)) \in \Gamma$ et $m_2 = (x_2, f(x_2)) \in \Gamma$, on a

$$d(M_1, \Delta) = d(M_2, \Delta) \Leftrightarrow |f(x_1)| = |f(x_2)|.$$

□

22.b. Soit M un point de Γ , d'abscisse $x \in]0, \alpha]$. Montrer que, sur Γ , il existe un unique point N d'abscisse $y \in [\alpha, +\infty[$, tel que $d(M, \Delta) = d(N, \Delta)$.

Soit M un point de Γ d'abscisse x et N un point de Γ d'abscisse y , il suit de la question précédente que $d(M, \Delta) = d(N, \Delta)$ si et seulement si $|f(x)| = |f(y)|$, ce qui équivaut à $f(x) = f(y)$ car f est positive.

Supposons que $x \in]0, \alpha]$. f est strictement croissante et continue sur $]0, \alpha]$ et $f(0) = 0$ donc elle induit une bijection $f_1 :]0, \alpha] \rightarrow]0, f(\alpha)]$. De même f est strictement décroissante et continue sur $]\alpha, +\infty[$ et $\lim_{x: +\infty} f(x) = 0$ donc elle induit une bijection $f_2 :]\alpha, +\infty[\rightarrow]0, f(\alpha)]$.

Soit $z = f(x)$ de sorte que $M = (x, z)$. On a alors $z \in]0, f(\alpha)]$ et donc il existe un unique $y \in [\alpha, +\infty[$ tel que $f_2(y) = z$, c'est-à-dire tel que $f(y) = z = f(x)$. En d'autres termes, $N = (y, z)$ est l'unique point de Γ tel que $d(N, \Delta) = d(M, \Delta)$. □

A tout réel $x \in]0, \alpha]$, on associe ainsi un réel $y = \varphi(x) \in [\alpha, +\infty[$ de telle sorte que φ réalise une application de $]0, \alpha]$ dans $[\alpha, +\infty[$.

En particulier, pour tout $x \in]0, \alpha]$, on a : $\varphi(x) \geq \alpha$ et $f(x) = f(\varphi(x))$.

23. On note f_1 et f_2 les restrictions de f sur respectivement $]0, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$.

23.a. Montrer que ces fonctions sont strictement monotones et donner une expression de φ en fonction de f_1 et f_2 .

La monotonie de f_1 et f_2 a été établie dans la question 22, de même pour leur caractère bijectif. Ainsi, pour tout $x \in]0, \alpha]$, on a $\varphi(x) \in [\alpha, +\infty[$ donc

$$f_1(x) = f(x) = f(\varphi(x)) = f_2(\varphi(x)).$$

Il s'ensuit que

$$\forall x \in]0, \alpha], \quad \varphi(x) = f_2^{-1}(f_1(x))$$

et donc

$$\varphi = f_2^{-1} \circ f_1.$$

□

23.b. En déduire la continuité de φ , son sens de variation et sa limite en 0.

f_1 et f_2 sont des homéomorphismes donc φ est continue. Par ailleurs, f_1 est strictement croissante, f_2 est strictement décroissante donc f_2^{-1} aussi et donc $\varphi = f_2^{-1} \circ f_1$ est strictement décroissante. Enfin,

$$\lim_{x:0^+} \varphi(x) = \lim_{x:0^+} f_2^{-1}(f_1(x))$$

mais $f_1(x) = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$ et $f_2(x) = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$ donc $f_2^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x:0^+} \varphi(x) = +\infty.$$

□

24. Déterminer un équivalent de φ à l'origine.

Pour tout $x \in]0, \alpha]$, on a $f(x) = f(\varphi(x))$ et donc

$$\frac{2x}{e^x + 1} = \frac{2\varphi(x)}{e^{\varphi(x)} + 1}.$$

On a montré à la question 23.b que $\lim_{x:0^+} \varphi(x) = +\infty$ donc

$$e^{\varphi(x)} + 1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} e^{\varphi(x)}$$

et, de plus,

$$e^x + 1 \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 2.$$

Ainsi,

$$\frac{2\varphi(x)}{e^{\varphi(x)}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x,$$

ce qui équivaut à

$$\varphi(x) = xe^{\varphi(x)} \frac{1 + o(1)}{2}.$$

En appliquant le logarithme à ces deux quantités, on obtient

$$\ln(\varphi(x)) = \ln(x) + \varphi(x) + \ln\left(\frac{1 + o(1)}{2}\right)$$

et donc

$$\varphi(x) - (-\ln(x)) = -\ln(\varphi(x)) + \ln\left(\frac{1 + o(1)}{2}\right).$$

Mais comme $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, $\ln(\varphi(x)) = o(\varphi(x))$. De plus, $\ln\left(\frac{1 + o(1)}{2}\right) = o(1) = o(\varphi(x))$. Ainsi,

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x).$$

□

25. Démontrer que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, \alpha[$.

f est \mathcal{C}^∞ donc f_1 et f_2 aussi. Par ailleurs, f_2 est bijective sur $U =]\alpha, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a $f_2'(x) = f'(x) < 0$ donc f_2' ne s'annule pas sur U . Alors il suit du théorème d'inversion globale que f_2 est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de U vers $f_2(U) =]0, \alpha]$. En particulier, f_2^{-1} est \mathcal{C}^∞ et donc, par composition,

$$\varphi = f_2^{-1} \circ f_1 \in \mathcal{C}^\infty(]0, \alpha]).$$

26. Démontrer que φ est dérivable à gauche au point α .

f est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de α donc on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2).$$

Puisque $f'(\alpha) = 0$, si on pose $a = \frac{1}{2}f''(\alpha)$, on a

$$(1) \quad f(x) = f(\alpha) + a(x - \alpha)^2 + o((x - \alpha)^2).$$

Montrons que $a \neq 0$. Avec les notations de 17.a, on a

$$f'(x) = 2 \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2},$$

donc

$$f''(x) = 2 \frac{g'(x)(e^x + 1)^2 - g(x)((e^x + 1)^2)'}{(e^x + 1)^4}.$$

Mais $g(\alpha) = 0$ donc

$$f''(\alpha) = 2 \frac{g'(\alpha)(e^\alpha + 1)^2}{(e^\alpha + 1)^4} = 2 \frac{g'(\alpha)}{(e^\alpha + 1)^2} = -2 \frac{\alpha e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2} < 0.$$

En appliquant (1) à x et $\varphi(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) - f(\alpha) &= a(x - \alpha)^2(1 + o_{x \rightarrow \alpha}(1)) \\ f(\varphi(x)) - f(\alpha) &= a(\varphi(x) - \alpha)^2(1 + o_{x \rightarrow \alpha}(1)). \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux équations, puisque $f(x) = f(\varphi(x))$, on obtient

$$a(x - \alpha)^2(1 + o_{x \rightarrow \alpha}(1)) = a(\varphi(x) - \alpha)^2(1 + o_{x \rightarrow \alpha}(1))$$

et donc, pour tout $x \neq \alpha$,

$$\left(\frac{\varphi(x) - \alpha}{x - \alpha} \right)^2 = \frac{1 + o_{x \rightarrow \alpha}(1)}{1 + o_{x \rightarrow \alpha}(1)}.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{\varphi(x) - \alpha}{x - \alpha} \right| \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} 1.$$

Il reste à observer, par décroissance de φ que si $x < \alpha$, alors $\varphi(x) > \varphi(\alpha) = \alpha$ donc

$$\forall x < \alpha, \quad \frac{\varphi(x) - \alpha}{x - \alpha} < 0$$

et donc

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(\alpha)}{x - \alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha^-} -1.$$

En d'autres termes,

φ est dérivable à gauche en α et $\varphi'_g(\alpha) = -1$.

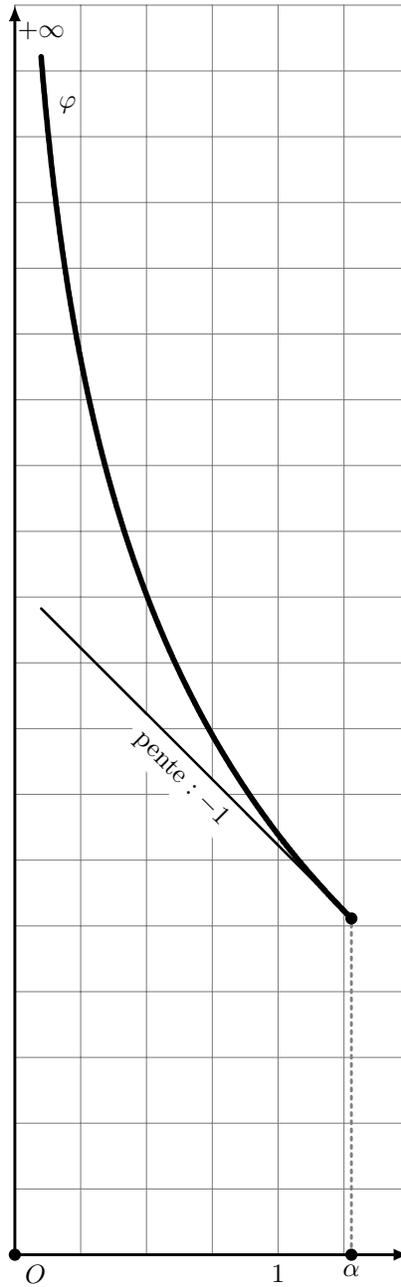


FIGURE 1. Fonction φ calculée numériquement et courbe d'équation $y = -(x - \alpha) + \alpha$.

PARTIE III : COURBE MÉDIATRICE DE DEUX FERMÉS DANS \mathbf{R}^2

Soit $\mathcal{P} = \mathbf{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne usuelle et de son repère canonique \mathcal{R} .

On note d la distance euclidienne usuelle sur \mathcal{P} et on pose :

$$\mathcal{P}^+ = \{(x, y) \mid y > 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^- = \{(x, y) \mid y < 0\}.$$

Jusqu'à la fin du problème, A et B désignent deux fermés non vides tels que $A \subset \mathcal{P}^+$ et $B \subset \mathcal{P}^-$.

On appelle courbe médiatrice de A et B l'ensemble : $\Gamma_{A,B} = \{m \in \mathcal{P} \mid d_A(m) = d_B(m)\}$.

Par exemple, si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$, où $a \in \mathcal{P}^+$ et $b \in \mathcal{P}^-$, la courbe médiatrice $\Gamma_{A,B}$ est la médiatrice du segment $[a, b]$.

On se propose de montrer que $\Gamma_{A,B}$ est le graphe dans \mathcal{R} d'une fonction $\varphi_{A,B} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et d'étudier quelques-unes de ses propriétés.

Dans la suite, il est vivement recommandé de s'aider des figures pour mener les raisonnements.

27. Déterminer la courbe médiatrice de A et B dans les cas particuliers suivants :

27.a. A est réduit à un point et B est une droite horizontale.

On pose $A = \{a\}$ avec $a = (x_a, y_a)$ et $b \in \mathbf{R}$ tel que B est la droite d'équation $(y = b)$.

Soit $m = (x, y) \in \mathcal{P}$ et $h = p_B(m) = (x, b)$ le projeté orthogonal de m sur B .

Puisque $A \subset \mathcal{P}^+$ et $B \subset \mathcal{P}^-$, on a $y_a \neq b$ et donc

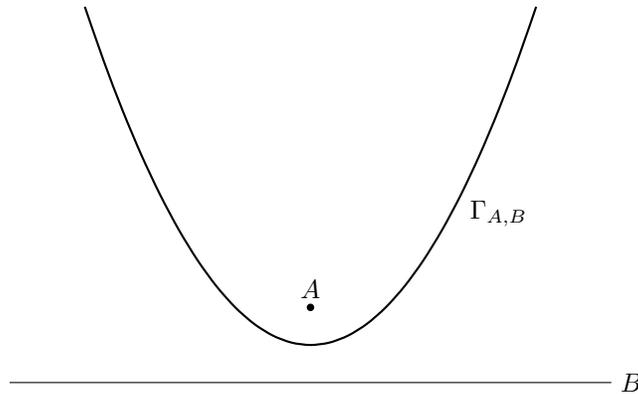
$$\begin{aligned} d_A(m) = d_B(m) &\Leftrightarrow d(m, a) = d(m, h) \\ &\Leftrightarrow d(m, a)^2 = d(m, h)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (y - b)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - x_a)^2 = (y - b)^2 - (y - y_a)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - x_a)^2 = (y_a - b)(2y - b - y - a) \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{(x - x_a)^2}{y_a - b} + b + y_a \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Gamma_{A,B} \text{ est la parabole d'équation } y = \frac{1}{2} \left(\frac{(x - x_a)^2}{y_a - b} + b + y_a \right).$$

Autrement dit, en se référant à la terminologie rappelée en début d'énoncé,

$$\Gamma_{A,B} \text{ est la parabole de foyer } a \text{ et de directrice } B.$$



□

27.b. $A = \{(0, 1)\}$ et $B = \{(-1, -1), (1, -1)\}$.

Posons $B_1 = (-1, -1)$ et $B_2 = (1, -1)$. Alors

$$d_B(m) = \min(d(B_1, m), d(B_2, m)).$$

La médiatrice de $[B_1, B_2]$ étant la droite d'équation $(x = 0)$, on a, pour $m = (x, y)$,

$$d_B(m) = \begin{cases} d(B_1, m) & \text{si } x \leq 0 \\ d(B_2, m) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Supposons $x \leq 0$ et $m = (x, y)$. Alors

$$d_A(m) = d_B(m) \Leftrightarrow d_A(m) = d_{B_1}(m)$$

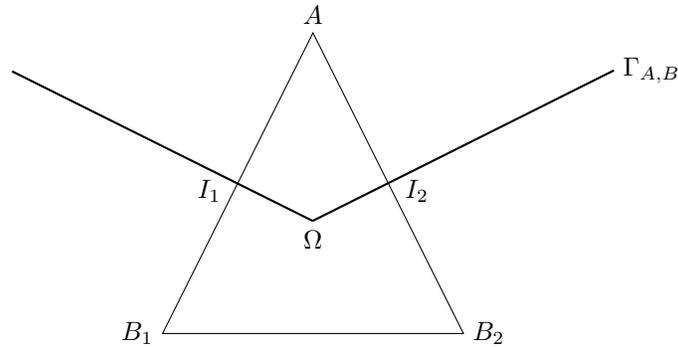
ce qui signifie que m est sur la médiatrice de $[A, B_1]$.

Supposons $x \geq 0$ et $m = (x, y)$. Alors

$$d_A(m) = d_B(m) \Leftrightarrow d_A(m) = d_{B_2}(m)$$

ce qui signifie que m est sur la médiatrice de $[A, B_2]$.

Ainsi, $\Gamma_{A,B}$ est la réunion des deux demi-droites $[\Omega, I_1]$ et $[\Omega, I_2]$ où Ω est le centre du triangle AB_1B_2 , I_1 est le milieu de $[A, B_1]$ et I_2 est le milieu de $[A, B_2]$.



□

28. On se propose d'établir l'existence de $\varphi_{A,B} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que son graphe dans \mathcal{R} soit $\Gamma_{A,B}$.

Si K est une partie non vide de \mathcal{P} et si $(x, y) \in \mathcal{P}$, on notera $d_K(x, y)$ le réel $d_K((x, y))$.

On considère un réel x_0 et on définit sur \mathbf{R} la fonction :

$$\Phi_{x_0} : t \mapsto d_A(x_0, t) - d_B(x_0, t).$$

28.a. Soit a un point de A . Montrer que, pour tout $t \geq 0$: $\Phi_{x_0}(t) \leq d(a, (x_0, t)) - t$.

Soit $a \in A$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

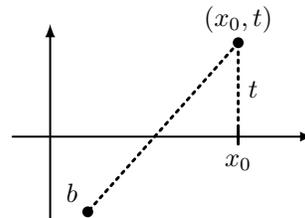
$$d_A(x_0, t) \leq d(a, (x_0, t))$$

donc

$$\Phi_{x_0}(t) \leq d(a, (x_0, t)) - d_B(x_0, t).$$

Mais $B \subset \mathcal{P}^-$ donc, pour tout $t \geq 0$ et pour tout $b \in B$, on a

$$d(b, (x_0, t)) > d((x_0, 0), (x_0, t)) = t.$$



Ainsi, $d_B(x_0, t) \geq t$ et donc

$$\forall t \geq 0, \Phi_{x_0}(t) \leq d(a, (x_0, t)) - t.$$

□

28.b. Montrer l'existence de réels $\lambda > 0$ et μ tels que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad d((x_0, t), a) - t = -\frac{\lambda t + \mu}{d((x_0, t), a) + t}.$$

Soit $a = (x_a, y_a) \in A$ et $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} (d((x_0, t), a) - t)(d((x_0, t), a) + t) &= d((x_0, t), a)^2 - t^2 \\ &= (x_0 - x_a)^2 + (t - y_a)^2 - t^2 \\ &= (x_0 - x_a)^2 + y_a^2 - 2ty_a \\ &= -2y_a t + (x_0 - x_a)^2 \\ &= -(\lambda t + \mu) \end{aligned}$$

avec $\lambda = 2y_a > 0$ car $A \subset \mathcal{P}^+$, et $\mu = -(x_0 - x_a)^2$. Ainsi, en divisant par $d((x_0, t), a) + t$, on obtient

$$d((x_0, t), a) - t = -\frac{\lambda t + \mu}{d((x_0, t), a) + t}.$$

Si $t > 0$, le dénominateur est positif et le numérateur est équivalent quand t tend vers $+\infty$ à $-\lambda$ qui est strictement négatif. Ainsi, il existe $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que,

$$t \geq t_0 \Rightarrow d((x_0, t), a) - t < 0$$

et donc, d'après 28.a,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad t \geq t_0 \Rightarrow \Phi_{x_0}(t) < 0.$$

□

28.c. En adaptant le raisonnement qui précède, montrer que Φ_{x_0} peut prendre également des valeurs strictement positives dans \mathbf{R} .

Le raisonnement se fait de manière analogue en montrant que pour $b \in B$, on a

$$\forall t \leq 0, \quad \Phi_{x_0}(t) \geq -t - d(b, (x_0, t))$$

et avec $\lambda' = 2y_b < 0$, on montre comme en 28.b que

$$-t - d(b, (x_0, t)) = \frac{\lambda' t + \mu'}{d(b, (x_0, t)) - t}.$$

En faisant tendre t vers $-\infty$, on trouve l'existence de $t_1 < 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad t \leq t_1 \Rightarrow -t - d(b, (x_0, t)) > 0$$

et donc

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad t \leq t_1 \Rightarrow \Phi_{x_0}(t) > 0.$$

□

28.d. Démontrer qu'il existe $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\Phi_{x_0}(y_0) = 0$.

Les fonctions $t \mapsto d_A(x, 0, t)$ et $t \mapsto d_B(x, 0, t)$ sont continues sur \mathbf{R} car lipschitziennes en vertu de la question 3.b. Ainsi,

$$\Phi_{x_0} : t \mapsto d_A(x_0, t) - d_B(x_0, t)$$

est continue sur \mathbf{R} .

Avec t_0 et t_1 construits en 28.b et 28.c, on a $\Phi(t_0) < 0$ et $\Phi(t_1) > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure donc :

$$\exists y_0 \in]t_0, t_1[\subset \mathbf{R}, \quad \Phi_{x_0}(y_0) = 0.$$

□

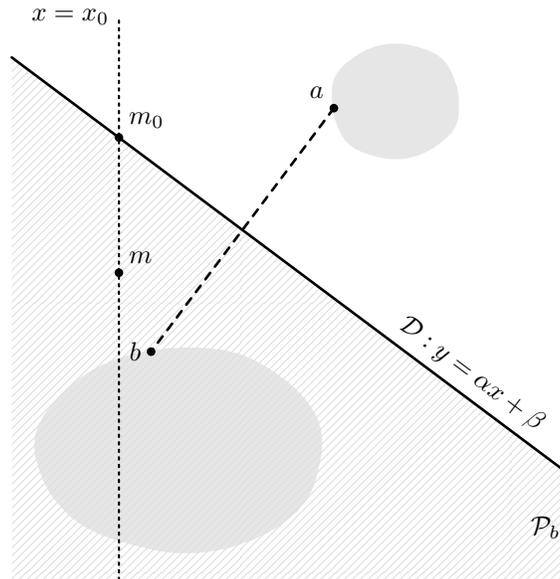
Soit m_0 le point de coordonnées (x_0, y_0) et b un point de B réalisant la distance de m_0 à B , c'est-à-dire vérifiant $b \in B$ et $d_B(m_0) = d(b, m_0)$.

28.e. Soit $y < y_0$ et m le point de coordonnées (x_0, y) .

Démontrer que : $\forall a \in A, d(m, a) > d(m, b)$ puis que : $\Phi_{x_0}(y) > 0$.

Soit $a \in A$ et $b \in B$ tel que $d_B(m_0) = d(b, m_0)$, avec $m_0 = (x_0, y_0)$. Puisque $\Phi_{x_0}(y_0) = 0$, on a $d_A(m_0) = d_B(m_0)$. Ainsi

- (1) $d(a, m_0) \geq d_A(m_0) = d_B(m_0) = d(b, m_0)$ et donc $m_0 \in \mathcal{P}_b$, où $\mathcal{P}_b = \{m \in \mathcal{P} \mid d(m, b) \leq d(m, a)\}$.
- (2) \mathcal{P}_b est le demi-plan contenant b délimité par la médiatrice \mathcal{D} sur segment $[a, b]$,
- (3) \mathcal{D} a pour équation $y = \alpha x + \beta$ pour un certain couple $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$. En effet, \mathcal{D} ne peut être verticale car $a \in \mathcal{P}^+$ et $b \in \mathcal{P}^-$, donc $[a, b]$ ne peut être horizontal.



b étant contenu dans le demi-plan situé sous \mathcal{D} , on a

$$\mathcal{P}_b = \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid y \leq \alpha x + \beta\}.$$

En effet, notons $\Omega = \mathcal{D} \cap [a, b]$, si bien que

$$\mathcal{P}_b = \{M \in \mathcal{P} \mid \langle \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega b} \rangle \geq 0\}.$$

Du fait de l'équation cartésienne de \mathcal{D} le vecteur $\overrightarrow{\Omega b}$ s'écrit $\lambda(\alpha \vec{i} - \vec{j})$ où $\lambda \in \mathbf{R}$. Du fait que $y_b < y_a$, on a $y_{\overrightarrow{\Omega b}} < 0$ et donc $\lambda > 0$. Finalement :

$$\mathcal{P}_b = \left\{ M = (x, y) \in \mathcal{P} \mid \lambda(x - x_\Omega)\alpha - \lambda(y - y_M) \geq 0 \right\} = \left\{ M = (x, y) \in \mathcal{P} \mid y \leq \alpha x + \overbrace{(y_M - \alpha x_M)}^{\beta \text{ car } \Omega \in \mathcal{D}} \right\}.$$

Ainsi, si $y < y_0$, puisque $(x_0, y_0) \in \mathcal{P}_b$, on a $m = (x_0, y) \in \mathcal{P}_b$ et donc $d(m, b) \leq d(m, a)$.

Montrons que l'inégalité est stricte. Si $d(m, a) = d(m, b)$, alors $m = (x_0, y) \in \mathcal{D}$ mais la droite d'équation $(x = x_0)$ n'a qu'un seul point d'intersection avec \mathcal{D} qui est $m_0 = (x_0, y_0)$. Ainsi

$$d(m, a) > d(m, b)$$

Mais $d(m, b) \geq d_B(m)$ donc $d(m, a) > d_B(m)$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, c'est en particulier vrai pour a tel que $d_A(m) = d(a, m)$. Ainsi,

$$d_A(m) > d_B(m).$$

En conclusion,

$$\text{Si } y < y_0, \Phi_{x_0}(y) = d_A((x_0, y)) - d_B((x_0, y)) = d_A(m) - d_B(m) > 0.$$

28.f. En déduire l'existence de l'application $\varphi_{A,B}$ annoncée.

Soit $x_0 \in \mathbf{R}$, on a établi à la question 28 l'existence d'un unique $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\Phi_{x_0}(y_0) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$\Gamma_{A,B} \cap \{(x, y) \in \mathcal{P} \mid x = x_0\} = \{y_0\}.$$

Posons

$$\varphi_{A,B} : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x_0 & \longmapsto & y_0 \in \Phi_{x_0}^{-1}(\{0\}) \end{cases}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \Gamma_{A,B} &= \{(x_0, y_0) \in \mathcal{P} \mid d_A(x_0, y_0) = d_B(x_0, y_0)\} \\ &= \{(x_0, y_0) \in \mathcal{P} \mid \Phi_{x_0}(y_0) = 0\} \\ &= \{(x_0, y_0) \in \mathcal{P} \mid y_0 \in \Phi_{x_0}^{-1}(\{0\})\} \\ &= \{(x_0, y_0) \in \mathcal{P} \mid y_0 = \varphi_{A,B}(x_0)\} \\ &= \{(x_0, \varphi_{A,B}(x_0)) \mid x_0 \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Gamma_{A,B} \text{ est le graphe de l'application } \varphi_{A,B}.$$

29. On considère une suite réelle bornée $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et un réel σ . On suppose que σ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers σ .

C'est un résultat classique. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers σ . Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \in \mathbf{N}$, il existe $n \geq n_0$ avec $|u_n - \sigma| \geq \varepsilon$. On peut alors construire par récurrence l'application $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante par :

$$\varphi(0) = \min \{k \geq 0 \mid |u_k - \sigma| \geq \varepsilon\}$$

et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \varphi(n+1) = \min \{k > \varphi(n) \mid |u_k - \sigma| \geq \varepsilon\}.$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ ainsi définie est bornée car extraite d'une suite bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(u_{(\psi \circ \varphi)(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers un réel σ' . Ainsi, σ' est une valeur d'adhérence de $(u_{\varphi(n)})$, donc de (u_n) , et alors $\sigma = \sigma'$ par hypothèse. Or, par construction de φ , on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{(\psi \circ \varphi)(n)} - \sigma| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\sigma' - \sigma| \geq \varepsilon,$$

une contradiction.

Ainsi,

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sigma.$$

30. On se propose d'établir la continuité de $\varphi_{A,B}$ sur \mathbf{R} .

30.a. Montrer l'existence de deux polynômes de degré deux, P_1 et P_2 , tels que $P_1 \leq \varphi_{A,B} \leq P_2$.

Soit $a \in A$, de sorte que $\{a\} \subset A$. Par ailleurs, on a $B \subset \mathcal{P}^-$. Ainsi, si $m \in \mathcal{P}$ est tel que $d_A(m) = d_B(m)$, on a

$$d_{\{a\}}(m) \geq d_A(m) = d_B(m) \geq d_{\overline{\mathcal{P}^-}}(m).$$

Or

$$d_{\overline{\mathcal{P}^-}}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \in \mathcal{P}^- \\ d_{\{y=0\}}(m) & \text{si } m \in \mathcal{P}^+. \end{cases}$$

où $\{y = 0\}$ désigne la droite d'équation $(y = 0)$. Ainsi,

$$\Gamma_{\{a\}, \overline{\mathcal{P}^-}} = \Gamma_{\{a\}, \{y=0\}}$$

qui est une parabole d'après la question 27.a.

Ainsi, si m est tel que $d_A(m) = d_B(m)$, alors $d_{\{a\}}(m) \geq d_{\overline{P^-}}(m)$ et, d'après la question 28. en m se trouve au-dessous de $\Gamma_{\{a\}, P^-}$, c'est-à-dire que la parabole $\Gamma_{\{a\}, P^-}$ est située au-dessus de $\Gamma_{A,B}$. Si on note P_2 le polynôme du second degré tel que $(y = P_2(x))$ est l'équation de la parabole $\Gamma_{\{a\}, P^-}$, on a ainsi

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_{A,B}(x) \leq P_2(x).$$

De manière duale, pour $b \in B$, on obtient que $\Gamma_{A,B}$ est au-dessus de $\Gamma_{\{b\}, P^+}$ qui est aussi une parabole d'après 27.a. Ainsi, si on note P_1 le polynôme du second degré tel que $(y = P_1(x))$ est l'équation de cette parabole, on obtient

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_1(x) \leq \varphi_{A,B}(x) \leq P_2(x).$$

□

Soit $x \in \mathbf{R}$. On se propose d'établir la continuité de $\varphi_{A,B}$ en ce point x .

30.b. On considère une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n: +\infty} x_n = x$ et on introduit la suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que :

$\forall n \in \mathbf{N}, y_n = \varphi_{A,B}(x_n)$. **Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.**

On a $P_1 \leq \varphi_{A,B} \leq P_2$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P_1(x_n) \leq \varphi_{A,B}(x_n) \leq P_2(x_n).$$

Les polynômes P_1 et P_2 étant continus et la suite $(x_n)_n$ étant convergente, les suites $(P_1(x_n))_n$ et $(P_2(x_n))_n$ convergent. Elles sont donc bornées. Ainsi, il existe $M_1, M_2 \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad M_1 \leq P_1(x_n) \leq \varphi_{A,B}(x_n) \leq P_2(x_n) \leq M_2.$$

Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad M_1 \leq y_n \leq M_2.$$

□

30.c. Démontrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

La suite $(y_n)_n$ étant bornée, il suit du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'elle admet une valeur d'adhérence.

Soit σ une valeur d'adhérence de $(y_n)_n$ et $\varphi : N \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(y_{\varphi(n)})_n$ converge vers σ . Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y_n = \varphi_{A,B}(x_n)$ donc

$$d_A(x_n, y_n) = d_B(x_n, y_n).$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad d_A(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) = d_B(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$$

En passant à la limite, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad d_A(x, \sigma) = d_B(x, \sigma)$$

et donc $\sigma = \varphi_{A,B}(x)$. Ainsi

$$(y_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ admet } \varphi_{A,B}(x) \text{ pour unique valeur d'adhérence.}$$

□

30.d. En déduire que $\varphi_{A,B}$ est continue au point x puis que $\varphi_{A,B}$ est continue sur \mathbf{R} .

$(y_n)_n$ est une suite bornée (30.b) qui admet $\varphi_{A,B}(x)$ pour une unique valeur d'adhérence (30.c). Ainsi, d'après 29, $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\varphi_{A,B}(x)$. Autrement dit,

$$\lim_{n: +\infty} \varphi_{A,B}(x_n) = \varphi_{A,B} \left(\lim_{n: +\infty} x_n \right).$$

et donc $\varphi_{A,B}$ est continue en x .

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\varphi_{A,B} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}).$$

□

31. Montrer à l'aide d'un exemple que la fonction $\varphi_{A,B}$ n'est pas toujours lipschitzienne sur \mathbf{R} .

On reprend les résultats de 27.a et on pose

$$A = \{(0, 1)\} \subset \mathcal{P}^+ \quad \text{et} \quad B = \{(x, -1) \mid x \in \mathbf{R}\} \subset \mathcal{P}^-.$$

Alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_{A,B}(x) = \frac{x^2}{4}$$

qui n'est pas lipschitzienne sur \mathbf{R} (car non uniformément continue).

□

Soit $I = [\alpha, \beta]$, où $a < \beta$. On se propose d'établir, jusqu'à la fin de la partie III, que $\varphi_{A,B}$ est lipschitzienne sur I .

32. On note Γ' le graphe de la restriction à I de $\varphi_{A,B}$ dans le repère \mathcal{R} .

32.a. Montrer que Γ' est un compact de \mathbf{R}^2 .

On a

$$\Gamma' = \{(x, \varphi_{A,B}(x)) \mid x \in I\} = (\text{id}, \varphi_{A,B})(I)$$

or $(\text{id}, \varphi_{A,B}) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ est continue car chacune de ses coordonnées l'est, et $I = [\alpha, \beta]$ est compact. Ainsi,

Γ' est compact comme image d'un compact par une application continue.

□

32.b. Démontrer l'existence d'un réel $R_0 > 0$ tel que : $\forall m \in \Gamma', d_A(m) \leq R_0$.

La restriction

$$d' : \begin{cases} \Gamma' & \longrightarrow \mathbf{R}_+ \\ m & \mapsto d_A(m) \end{cases}$$

de d_A à Γ' est continue car d_A l'est (3.b). Par ailleurs, Γ' étant compact, d' est bornée et donc, il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\forall m \in \Gamma', \quad d'(m) = d_A(m) \leq R_0.$$

□

32.c. En déduire l'existence d'un réel $R > 0$ tel que tout disque fermé de rayon R_0 , centré sur un point du compact Γ' , soit contenu dans $\overline{B}(0, R) = \{\xi \in \mathbf{R}^2 \mid \|\xi\| \leq R\}$.

Soit $k = (x_0, \varphi_{A,B}(x_0)) \in \Gamma'$ et $m \in \overline{B}(k, R_0)$. On a, par inégalité triangulaire,

$$d(0, m) \leq d(0, k) + d(k, m) \leq d(0, k) + R_0.$$

Mais Γ' est bornée donc il existe $R_1 \in \mathbf{R}_+$ tel que $\Gamma' \subset \overline{B}(0, R_1)$. Ainsi, $d(0, k) \leq R_1$ et donc

$$d(0, m) \leq d(0, k) + d(k, m) \leq R_1 + R_0.$$

Si on pose $R = R_1 + R_0 > 0$, on a

$$\bigcup_{m \in \Gamma'} \overline{B}(m, R_0) \subset \overline{B}(0, R).$$

□

33. On pose $K_A = A \cap \overline{B}(0, R)$ et $K_B = B \cap \overline{B}(0, R)$.

Montrer que ces parties sont des compacts non vides de \mathbf{R}^2 vérifiant $K_A \subset \mathcal{P}^+$ et $K_B \subset \mathcal{P}^-$ et que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi_{A,B}(x) = \varphi_{K_A, K_B}(x).$$

$K_A = A \cap \overline{B}(0, R)$ est fermé comme intersection de fermés, et borné car contenu dans $\overline{B}(0, R)$. Ainsi, K_A est un fermé borné de \mathbf{R}^2 qui est de dimension finie, c'est donc un compact. En outre $A \cap \overline{B}(0, R) \neq \emptyset$ car, pour tout $m \in \Gamma'$, $d_A(m) \leq R_0$ donc $\emptyset \neq A \cap \overline{B}(m, R_0) \subset A \cap \overline{B}(0, R)$. Enfin, $K_A \subset A \subset \mathcal{P}^+$.

De même K_B est un compact non vide de \mathbf{R}^2 contenu dans \mathcal{P}^- .

Soit $x \in I$. Montrons que $\varphi_{A,B}(x) = \varphi_{K_A, K_B}(x)$. Posons $m = (x, \varphi_{A,B}(x))$. On a

$$d_A(m) = d_B(m).$$

Mais $K_A \subset A$ et $K_B \subset B$ donc $d_A(m) \leq d_{K_A}(m)$ et $d_B(m) \leq d_{K_B}(m)$.

D'après 32, on a $d_A(m) \leq R_0$. Ainsi, si $a \in A$ est tel que $d_A(m) = d(a, m)$, on a $a \in \overline{B}(m, R_0) \subset \overline{B}(0, R)$ et donc $a \in K_A$. Ainsi, $d_A(m) = d(a, m) \geq d_{K_A}(m)$ et donc

$$d_A(m) = d_{K_A}(m).$$

De même, on obtient $d_B(m) = d_{K_B}(m)$ et donc $m = (x, \varphi_{K_A, K_B}(x))$. Ainsi,

$$\varphi_{K_A, K_B} = \varphi_{A, B}.$$

□

34. Soit J un intervalle compact de \mathbf{R} .

Soit $\psi : J \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction et Γ son graphe dans le repère canonique \mathcal{R} .

Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on désigne par \mathcal{R}_θ l'image de \mathcal{R} par la rotation d'angle θ et de centre O , origine du repère \mathcal{R} .

On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que, $\forall \theta \in]-\rho, \rho[$, Γ est encore, dans le repère \mathcal{R}_θ , le graphe d'une fonction.

Démontrer que ψ est lipschitzienne.

Observons que Γ reste le graphe d'une fonction lorsque l'on tourne \mathcal{R} d'un angle θ si, pour tous x, y tels que $x < y$ dans J , les points $(x, \psi(x))$ et $(y, \psi(y))$ ne se retrouvent pas alignés verticalement, c'est-à-dire, si on note \vec{u}_θ le vecteur directeur du second axe de \mathcal{R}_θ , on a

$$\det \left(\vec{u}_\theta, \begin{bmatrix} x - y \\ \psi(x) - \psi(y) \end{bmatrix} \right) \neq 0,$$

autrement dit

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\sin \theta & x - y \\ \cos \theta & \psi(x) - \psi(y) \end{bmatrix} \right) \neq 0$$

ou encore

$$-\sin(\theta)(\psi(x) - \psi(y)) - \cos(\theta)(x - y) \neq 0.$$

Soit ρ tel que donné dans l'énoncé et

$$\Delta : \begin{cases}]-\rho, \rho[& \rightarrow \mathbf{R} \\ \theta & \mapsto -\sin(\theta)(\psi(x) - \psi(y)) - \cos(\theta)(x - y) \end{cases}.$$

C'est une fonction continue et, sous les hypothèses de l'énoncé, elle ne s'annule pas, elle est donc de signe constant. Puisque $\Delta(0) = x - y > 0$, elle est strictement positive. Ainsi,

$$\forall \theta \in]-\rho, \rho[, \quad -\sin(\theta)(\psi(x) - \psi(y)) - \cos(\theta)(x - y) > 0.$$

On observe que l'on a nécessairement $\rho < \frac{\pi}{2}$ car sinon

$$\Delta \left(\frac{\pi}{2} \right) = \psi(y) - \psi(x) = -(\psi(x) - \psi(y)) = -\Delta \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

ce qui contredirait la stricte positivité de Δ sur $]-\rho, \rho[$. Ainsi, on a, pour tout $\theta \in]-\rho, \rho[$,

$$-\sin(\theta)(\psi(x) - \psi(y)) > \cos(\theta)(x - y).$$

Pour $\theta = \rho$, comme $\sin(\rho) > 0$, on a :

$$\psi(x) - \psi(y) < -\frac{\cos(\rho)}{\sin \rho}(x - y) < \frac{|x - y|}{\sin(\rho)}.$$

Si $\theta = -\rho$, on obtient de même :

$$\psi(y) - \psi(x) < \frac{|x - y|}{\sin \rho}.$$

Ainsi,

$$|\psi(y) - \psi(x)| = \frac{|x - y|}{\sin \rho}.$$

et donc

$$\psi \text{ est lipschitzienne de rapport } \frac{1}{\sin \rho}.$$

□

35. En déduire que $\varphi_{A,B}$ est lipschitzienne sur I . D'après 33, on a $\varphi_{A,B} = \varphi_{K_A, K_B}$. Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, la rotation r_θ d'angle θ étant une isométrie, on a pour tout $m \in \mathcal{P}$,

$$d_{K_A}(m) = d_{K_B}(m) \Leftrightarrow d_{r_\theta(K_A)}(r_\theta(m)) = d_{r_\theta(K_B)}(r_\theta(m)).$$

Mais, comme d'après 28, $\Gamma_{A', B'}$ est le graphe d'une fonction dès que A', B' sont des fermés non vides tels que $A' \subset \mathcal{P}^+$ et $B' \subset \mathcal{P}^-$, il suffit de montrer que l'on peut trouver $\rho > 0$ tel que

$$\forall \theta \in]-\rho, \rho[, \quad \begin{cases} r_\theta(K_A) \subset \mathcal{P}^+, \\ r_\theta(K_B) \subset \mathcal{P}^-. \end{cases}$$

On pourra alors conclure à l'aide de la question 34.

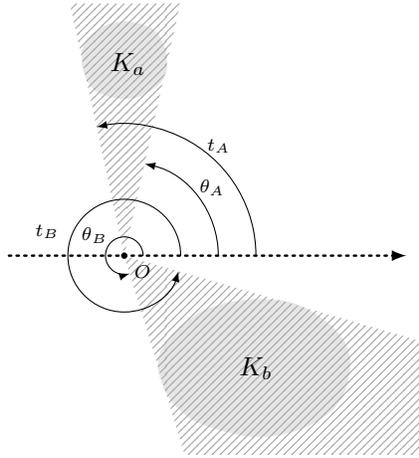


FIGURE 2. Définition des angles t_A, θ_A, t_B et θ_B .

Soit $m = (x, y) \in K_A$. On a $K_A \subset \mathcal{P}^+$ et un argument de $x + iy$ est :

$$h_A : (x, y) \mapsto \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \in]0, \pi[.$$

De même si $m = (x, y) \in K_B$, on a $K_B \subset \mathcal{P}^-$ et un argument de $x + iy$ est :

$$h_B : (x, y) \mapsto 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \in]\pi, 2\pi[.$$

Les fonctions h_A et h_B étant continues sur K_A et K_B respectivement, elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Il existe donc des réels $\theta_A, t_A, \theta_B, t_B$ tels que

$$K_A \subset \{m \in \mathcal{P} \mid h_A(m) \in [\theta_A, t_A]\} \quad \text{et} \quad K_B \subset \{m \in \mathcal{P} \mid h_B(m) \in [\theta_B, t_B]\}.$$

Ainsi, pour tout $\theta \in]\max(-\theta_A, \pi - \theta_B), \min((\pi - t_A), 2\pi - t_B)[$, on a $r_\theta(K_A) \subset \mathcal{P}^+$ et $r_\theta(K_B) \subset \mathcal{P}^-$. Posons

$$\rho = \min(|\max(-\theta_A, \pi - \theta_B)|, |\min((\pi - t_A), 2\pi - t_B)|).$$

Alors,

$$\forall \theta \in]-\rho, \rho[, \quad \begin{cases} r_\theta(K_A) \subset \mathcal{P}^+, \\ r_\theta(K_B) \subset \mathcal{P}^-. \end{cases}$$

Il suit alors de la question 34 que φ_{K_A, K_B} est lipschitzienne sur I , et donc, puisque $\varphi_{K_A, K_B} = \varphi_{A, B}$,

$\varphi_{A, B}$ est lipschitzienne sur I .

□

PARTIE IV : EXISTENCE D'ASYMPTOTES LORSQUE A ET B SONT COMPACTS

On reprend les notations et définitions de la partie III et on considère deux fermés non vides A et B tels que $A \subset \mathcal{P}^+$ et $B \subset \mathcal{P}^-$.

Pour $(a, b) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{P}^-$, on note $\varphi_{a, b}$, $\varphi_{a, B}$ et $\varphi_{A, b}$ les fonctions $\varphi_{\{a\}, \{b\}}$, $\varphi_{\{a\}, B}$ et $\varphi_{A, \{b\}}$.

36. Dans cette question, on étudie la courbe médiatrice $\Gamma_{A, B}$ de A et B dans le cas particulier suivant : $A = \{a\}$ où a est un point de l'axe $x = 0$ et B est un rectangle plein du demi-plan $x \leq 0$, dont l'un des côtés est contenu par l'axe $x = 0$ (voir figure 3).

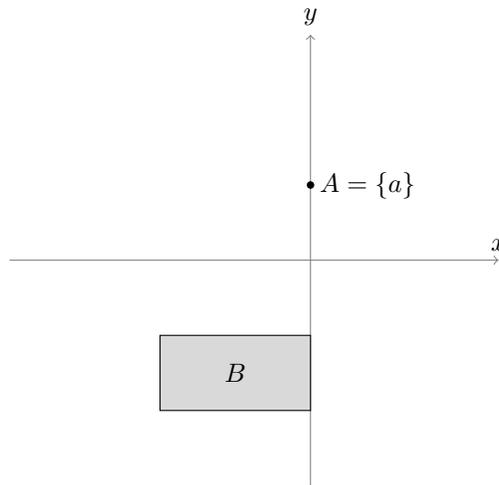


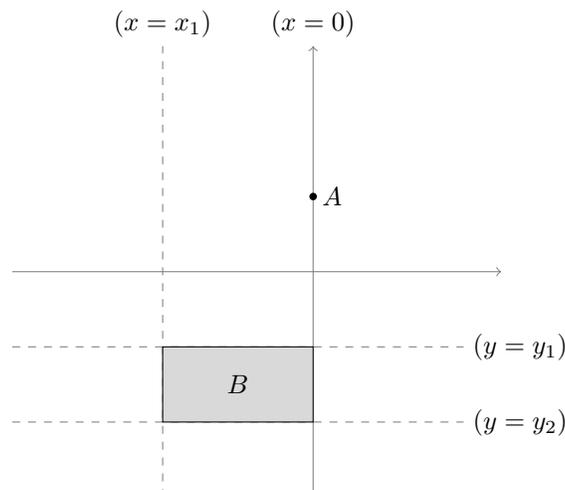
FIGURE 3. Configuration de la question 36.

36.a. Démontrer que $\Gamma_{A, B}$ est au-dessus de la droite contenant le côté horizontal le plus haut de B .

Notons

$$x_1 = \inf \{x \in \mathbf{R} \mid (x, y) \in B\}, \quad y_1 = \sup \{y \in \mathbf{R} \mid (x, y) \in B\} \quad \text{et} \quad y_2 = \inf \{y \in \mathbf{R} \mid (x, y) \in B\}.$$

et posons $a = (x_a, y_a)$.



Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $m = (x, y)$. Nous allons procéder par contraposée en faisant une disjonction de cas. Supposons $y \geq y_1$.

— Si $y \in]y_2, y_1]$, alors

$$d(m, a)^2 = x^2 + (y - y_a)^2$$

mais $y_a > 0$ et $y \leq y_1 < 0$ donc

$$d(m, a)^2 > x^2 + y^2.$$

Par ailleurs,

$$d_B(m)^2 = \min(d(m, (x_1, y))^2, d(m, (0, y))^2) = \min((x - x_1)^2, x^2).$$

Ainsi,

$$d_B(m)^2 \leq x^2 < d_A(m)^2$$

et donc $m \notin \Gamma_{A,B}$.

— Si $y < y_2$.

— Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} d_B(m)^2 &= d(m, (0, y_2))^2 \\ &= x^2 + (y - y_2)^2 \\ &< x^2 + (y - y_a)^2 \\ &= d_A(m)^2 \end{aligned}$$

et donc $m \notin \Gamma_{A,B}$.

— Si $x < x_1$, alors

$$\begin{aligned} d_B(m)^2 &= d(m, (x_1, y_2))^2 \\ &= (x - x_1)^2 + (y - y_2)^2 \\ &< x^2 + (y - y_a)^2 \\ &= d_A(m)^2 \end{aligned}$$

et donc $m \notin \Gamma_{A,B}$.

— Si $x \in [x_1, 0]$, alors

$$\begin{aligned} d_B(m)^2 &= d(m, (x, y_2))^2 \\ &= (y - y_2)^2 \\ &< x^2 + (y - y_a)^2 \\ &= d_A(m)^2 \end{aligned}$$

et donc $m \notin \Gamma_{A,B}$.

Ainsi, on a

$$\forall m = (x, y) \in \mathcal{P}, \quad (m \in \Gamma_{A,B} \Rightarrow y \geq y_1).$$

□

36.b. En déduire que $\Gamma_{A,B}$ est la réunion de deux demi-droites et d'une courbe que l'on précisera.

D'après 36.a, on sait que si $(x, y) \in \Gamma_{A,B}$, alors $y \geq y_1$. Ainsi en reprenant notations précédentes, on procède à une disjonction de cas.

— Si $x < x_1$. Alors

$$d_A(m) = d(a, m)$$

et

$$d_B(m) = d(m, (x_1, y_1)).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma_{A,B} &\Leftrightarrow m \in \Gamma_{a, (x_1, y_1)} \\ &\Leftrightarrow m \text{ est sur la médiatrice de } [a, (x_1, y_1)] \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2(y_1 - y_a)} (x_1^2 + y_1^2 - y_a^2 - 2xx_1). \end{aligned}$$

— Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} m = (x, y) \in \Gamma_{a,B} &\Leftrightarrow d(a, (x, y)) = d((0, y_1), (x, y)) \\ &\Leftrightarrow m \text{ est sur la médiatrice de } [a, (0, y_1)] \\ &\Leftrightarrow y = \frac{y_1 + y_a}{2}. \end{aligned}$$

— Si $x \in [x_1, 0]$, alors en désignant par Δ la droite d'équation $(y = y_1)$, on a $d_B(m) = d_\Delta(m)$ et

$$\begin{aligned} m = (x, y) \in \Gamma_{a,B} &\Leftrightarrow d(a, m) = d_\Delta(m) \\ &\Leftrightarrow m \in \Gamma_{a,\Delta} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{y_a - y_1} + y_1 + y_a \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\varphi_{A,B}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(y_1 - y_a)} (x_1^2 + y_1^2 - y_a^2 - 2x_1x) & \text{si } x < x_1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{y_a - y_1} + y_1 + y_a \right) & \text{si } x \in [0, x_1], \\ \frac{y_1 + y_a}{2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

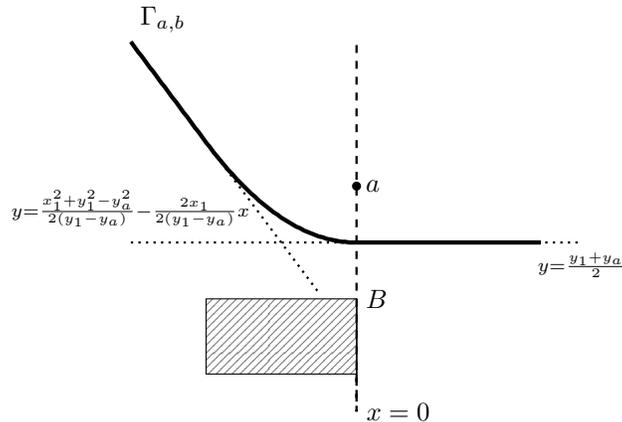


FIGURE 4. Médiatrice composée de deux demi-droites et d'un morceau de parabole.

□

36.c. La fonction $\varphi_{A,B}$ est-elle dérivable sur \mathbf{R} ?

Il suit de la question précédente que $\varphi_{A,B}$ est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbf{R} \setminus \{x_1, 0\}$.

En x_1 : En calculant la limite du taux d'accroissement dans les expressions trouvées en 36.b, on obtient

$$(\varphi_{A,B})'_g(x_1) = -\frac{2x_1}{2(y_1 - y_a)} = \frac{x_1}{y_a - y_1}$$

et

$$(\varphi_{A,B})'_d(x_1) = \frac{2x_1}{2(y_a - y_1)} = \frac{x_1}{y_a - y_1}.$$

Ainsi, $\varphi_{A,B}$ est dérivable en x_1 .

En 0 : On obtient de même

$$(\varphi_{A,B})'_g(0) = 0 = (\varphi_{A,B})'_d(0)$$

de sorte que $\varphi_{A,B}$ est dérivable en 0.

En conclusion,

$\varphi_{A,B}$ est dérivable sur \mathbf{R} .

□

On revient au cas général.

37. Démontrer à l'aide de la question III-28.e que, pour tout $m = (x, y) \in \mathcal{P}$, on a :

$$d_A(m) \geq d_B(m) \Leftrightarrow y \leq \varphi_{A,B}(x).$$

Cette propriété a déjà été démontrée en 28.e.

□

38. Soit $a \in A$.

38.a. Démontrer que, pour tout $b \in B$, on a : $\varphi_{a,b} \leq \varphi_{a,B}$.

Soit $b \in B$. D'après 37 appliqué à $A = \{a\}$ et $B = B$, on a

$$\varphi_{a,b}(x) \leq \varphi_{a,B}(x) \Leftrightarrow d_{\{a\}}(x, \varphi_{a,b}(x)) \geq d_B(x, \varphi_{a,b}(x)).$$

Or, si $m = (x, \varphi_{a,b}(x))$, on a

$$d_{\{a\}}(m) = d(m, a) = d(m, b) \geq \inf_{b' \in B} d(m, b') = d_B(m).$$

Ainsi,

$\varphi_{a,b}(x) \leq \varphi_{a,B}(x).$

□

38.b. Démontrer la relation : $\sup_{b \in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{a,B}$.

Pour tout $a \in A$, on a, pour tout $b \in B$,

$$\varphi_{a,b} \leq \varphi_{a,B}$$

donc

$$\sup_{b \in B} \varphi_{a,b} \leq \varphi_{a,B}.$$

Mais, pour tout $x \in \mathbf{R}$, puisque B est fermé, il suit de la question 7 qu'il existe $b_x \in B$ tel que

$$d((x, \varphi_{a,B}(x)), b_x) = d_B((x, \varphi_{a,B}(x)))$$

donc

$$\varphi_{a,B}(x) = \varphi_{a,b_x}(x)$$

et donc

$$\varphi_{a,B}(x) \leq \sup_{b \in B} \varphi_{a,b}(x).$$

Ainsi,

$$\varphi_{a,B} \leq \sup_{b \in B} \varphi_{a,b}$$

et

$\sup_{b \in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{a,B}.$

□

39. Démontrer les relations : $\inf_{a \in A} \sup_{b \in B} \varphi_{a,b} = \varphi_{A,B} = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \varphi_{a,b}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $a \in A$, on a

$$d_A((x, \varphi_{a,B}(x))) \leq d((x, \varphi_{a,B}(x)), a) = d_B((x, \varphi_{a,B}(x))),$$

ce qui équivaut, d'après 37, à

$$\varphi_{a,B}(x) \geq \varphi_{A,B}(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on a

$$\inf_{a \in A} \varphi_{a,B}(x) \geq \varphi_{A,B}(x).$$

Puis, comme à la question 38, il existe $a_x \in A$ tel que

$$d((x, \varphi_{A,B}(x)), a_x) = d_A((x, \varphi_{A,B}(x))) = d_B((x, \varphi_{A,B}(x)))$$

donc

$$\varphi_{A,B}(x) = \varphi_{a_x,B}(x)$$

et donc

$$\varphi_{A,B}(x) \geq \inf_{a \in A} \varphi_{a,B}(x).$$

On a ainsi démontré que

$$\varphi_{A,B} = \inf_{a \in A} \varphi_{a,B} = \inf_{a \in A} \sup_{b \in B} \varphi_{a,b} \quad (38)$$

Nous allons déduire la seconde relation de celle-ci en effectuant une symétrie σ d'axe (Oy) . En effet, si on pose $B' = \sigma(A) \subset \mathcal{P}^-$ et $A' = \sigma(B) \subset \mathcal{P}^+$, alors un point $M(x, y)$ se trouve à égale distance de A et B si et seulement si $\sigma(M) = (x, -y)$ est équidistant de $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$, cela fournit l'égalité :

$$\varphi_{\sigma(A),\sigma(B)} = -\varphi_{A,B}$$

et comme, pour $X \subset \mathbf{R}$ non vide et majoré, on a $\inf(-X) = -\sup(X)$, on obtient

$$\varphi_{A,B} = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \varphi_{a,b}.$$

□

40. On considère une partie non vide S de \mathcal{P} . On dira qu'une droite \mathcal{D} de \mathcal{P} , non horizontale, s'appuie sur S à droite si S reste à gauche de \mathcal{D} et rencontre \mathcal{D} . (voir figure 5)

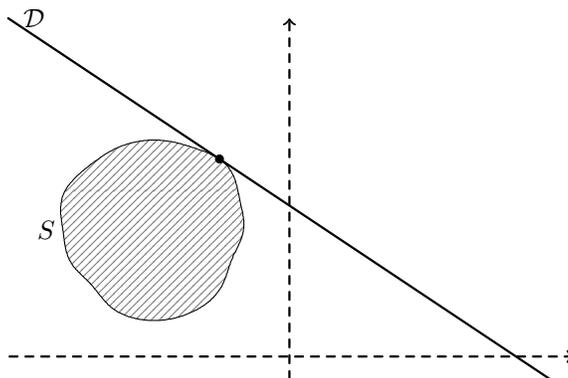
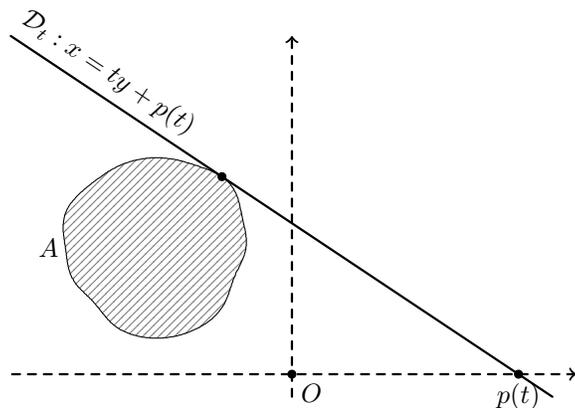


FIGURE 5. Droite s'appuyant à droite sur S .

Autrement dit : si \mathcal{D} admet comme équation $x = u_0y + v_0$, avec $(u_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$, la droite \mathcal{D} s'appuie sur S à droite si S est contenue dans le demi-plan $\{(x, y) \in \mathcal{P} \mid x \leq u_0y + v_0\}$ et $\mathcal{D} \cap S \neq \emptyset$.

40.a. Montrer que, pour tout réel t , il existe un unique réel $p(t)$ tel que la droite \mathcal{D}_t dont une équation est : $x = ty + p(t)$ s'appuie sur A à droite. (voir figure 6)

FIGURE 6. Définition de $p(t)$.

Soit $t \in \mathbf{R}$. Considérons l'application continue $\Phi_t : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x - ty \in \mathbf{R}$. Comme A est un compact de \mathbf{R}^2 , $\Phi_t(A)$ est un compact de \mathbf{R} et notons alors $p = \sup \Phi_t(A) = \max \Phi_t(A)$. Il existe ainsi un couple $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ tel que $p = \Phi_t(x_0, y_0) = x_0 - ty_0$ et de plus pour tout $(x, y) \in A$, $x - ty \leq p$. Finalement, la droite \mathcal{D} d'équation $x = ty + p$ s'appuie à droite sur A en (x_0, y_0) . Supposons maintenant qu'il existe deux réels $p_0 < p_1$ tels que les droites \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_1 d'équations $x = ty + p_0$ et $x = ty + p_1$ s'appuient sur A à droite en respectivement (x_0, y_0) et (x_1, y_1) . Alors $x_1 \stackrel{(*)}{=} ty_1 + p_1$ mais comme $(x_1, y_1) \in A$ et que \mathcal{D}_0 est à droite de A , on a $x_1 \stackrel{(**)}{\leq} ty_1 + p_0$. Des équations $(*)$ et $(**)$, on a $p_1 \leq p_0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur p_0 et p_1 . Pour tout $t \in \mathbf{R}$, il existe alors un unique réel $p(t)$ tel que la droite d'équation $x = ty + p(t)$ s'appuie sur A à droite. \square

40.b. Démontrer que $p : t \mapsto p(t)$ est lipschitzienne sur \mathbf{R} .

Considérons deux réels t et t_1 tels que $t < t_1$. Les droites \mathcal{D}_t et \mathcal{D}_{t_1} s'appuient sur A à droite en respectivement (X, Y) et (X_1, Y_1) .

Comme $A \subset \mathcal{P}^+$, on a $Y_1 > 0$ et comme A est à gauche de \mathcal{D}_t , on a :

$$X_1 \leq tY_1 + p(t) \stackrel{t < t_1}{\leq} t_1Y_1 + p(t).$$

On a de plus l'égalité $X_1 = t_1Y_1 + p(t_1)$, donc $p(t_1) \leq p(t)$.

De plus, comme \mathcal{D}_{t_1} est à droite de A , elle est à droite de (X, Y) , ce qui entraîne :

$$X \leq t_1Y + p(t_1), \text{ et donc } p(t_1) \geq X - t_1Y.$$

Finalement, si $t < t_1$, on a :

$$0 \leq p(t) - p(t_1) \leq p(t) - (X - t_1Y) = X - tY - (X - t_1Y) \leq Y(t_1 - t).$$

Mais A étant compact, il existe un réel M_Y majorant l'ensemble $\{y \in \mathbf{R} \mid (x, y) \in A\}$ et quitte à échanger les rôles de y et y_1 , on obtient :

p est M_Y -lipschitzienne.

\square

40.c. Démontrer que $p : t \mapsto p(t)$ est une bijection strictement décroissante de \mathbf{R} dans \mathbf{R} .

Par la question précédente, on sait déjà que p est décroissante. Montrons maintenant que p est injective, on aura alors la stricte décroissance. Supposons qu'il existe $t_1 < t_2$ tel que $p(t_1) = p(t_2)$. La droite \mathcal{D}_{t_2} s'appuie à droite sur A en un certain point $(X_2, Y_2) \in A$, donc en particulier $X_2 = t_2Y_2 + p(t_2)$. Mais $A \subset \mathcal{P}^+$, et comme $t_2 > t_1$, on a $X_2 > t_1Y_2 + p(t_2)$. Mais par hypothèse, $p(t_1) = p(t_2)$, ce qui entraîne que $X_2 > t_1Y_2 + p(t_1)$. Ainsi (X_2, Y_2) est à gauche de \mathcal{D}_{t_1} , ce qui contredit la définition de $p(t_1)$. La fonction p est alors strictement décroissante.

Il reste alors à démontrer que $p(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ pour obtenir le résultat. Fixons alors $\pi \in \mathbf{R}$ et considérons l'application continue $\Psi_\pi : (x, y) \in \mathcal{P}^+ \mapsto \frac{x-\pi}{y} \in \mathbf{R}$. Comme A est compacte, il existe un couple $(x_0, y_0) \in A$ tel que $\sup \Psi_\pi(A) = \max \Psi_\pi(A) = \Psi_\pi(x_0, y_0)$

et finalement :

$$\forall (x, y) \in A : \quad \frac{x - \pi}{y} \leq \frac{x_0 - \pi}{y_0}, \text{ c'est-à-dire } x \leq \left(\frac{x_0 - \pi}{y_0} \right) y + \pi.$$

La droite d'équation $x = \left(\frac{x_0 - \pi}{y_0} \right) y + \pi$ s'appuie alors en (x_0, y_0) à droite de A et $\pi = p \left(\frac{x_0 - \pi}{y_0} \right)$.

Ainsi,

$p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une bijection strictement décroissante.

□

41. Montrer l'existence d'une unique droite δ de \mathcal{P} qui s'appuie simultanément sur A et sur B à droite. (voir figure 7)

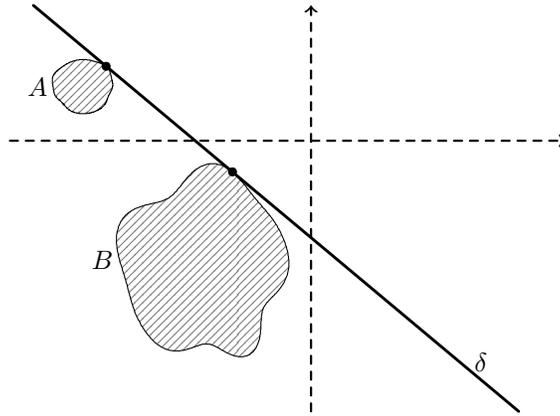


FIGURE 7. Droite δ s'appuyant simultanément sur A et B .

Notons p_A l'application p définie à la question 40. Soit $B \in \mathcal{P}^-$, et notons σ la symétrie par rapport à l'axe (Ox) . Par continuité de σ , la partie $\sigma(B)$ reste compacte, et est de plus incluse dans \mathcal{P}^+ . La question 40 assure donc l'existence d'une fonction p_σ telle que pour tout $t \in \mathcal{R}$, la droite d'équation $x = ty + p_\sigma(t)$ s'appuie sur $\sigma(B)$ à droite. Finalement, en notant que $\sigma(x, y) = (x, -y)$, on obtient que la droite d'équation $x = ty - p_\sigma(t)$ s'appuie sur B à droite. On montre de manière semblable à la question 40, qu'il existe une unique valeur $p_B(t)$ vérifiant que la droite d'équation $x = ty + p_B(t)$ s'appuie à droite sur B et finalement p_B s'écrit $-p_\sigma$. Par décroissance de p_σ , la fonction p_B est croissante. L'application p_σ étant lipschitzienne, il en est de même de son opposée p_B . Comme $p_\sigma(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$, on a aussi $p_B(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et finalement, p_B est une bijection strictement croissante de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .

L'application $p_B - p_A$ est alors continue et strictement croissante de \mathbf{R} sur \mathbf{R} , elle s'annule donc pour une unique valeur $t_0 \in \mathbf{R}$. On a alors $p_B(t_0) = p_A(t_0)$ et la droite d'équation $x = t_0 y + p_A(t_0)$ s'appuie simultanément à droite sur A et B . L'unicité d'une telle droite provient du fait que dès qu'une droite d'équation $x = ty + p_1$ s'appuie simultanément sur A et B , cela entraîne $p_A(t) = p_B(t) = p_1$ et donc $p_A(t) - p_B(t) = 0$: la seule valeur possible pour t est donc t_0 .

En conclusion,

Il existe une unique droite δ de \mathcal{P} qui s'appuie simultanément sur A et sur B à droite.

□

42. Montrer que, parmi les segments inclus dans δ dont les extrémités sont respectivement sur A et B , il en existe un unique de longueur minimale. Celui-ci sera noté $[m_A, m_B]$, avec $(m_A, m_B) \in A \times B$.

La droite δ ne peut pas être horizontale par définition donc intersecte l'axe (Ox) en un point Ω . La partie $\delta \cap A$ est par définition non vide, incluse dans \mathcal{P}^+ et est l'intersection d'un fermé et d'un compact donc reste une partie compacte. De manière semblable, $\delta \cap B$ est une partie compacte non vide de \mathcal{P}^- . Pour tout point $M_A \in \delta \cap A$ et tout point $M_B \in \delta \cap B$ on a clairement :

$$M_A M_B = \Omega M_A + \Omega M_B.$$

De part la continuité de la fonction $M \mapsto \Omega M$, la compacité des parties $\delta \cap A$ et $\delta \cap B$, il existe $m_a \in \delta \cap A$ et $m_b \in \delta \cap B$ tels que :

$$\forall (M_A, M_B) \in \delta \cap A \times \delta \cap B : \quad \Omega m_a \leq \Omega M_A \text{ et } \Omega m_b \leq \Omega M_B,$$

ce qui entraîne alors que $m_a m_b \leq M_A M_B$ pour tout $(M_A, M_B) \in \delta \cap A \times \delta \cap B$. En utilisant l'équation de δ et en calculant alors Ωm_a et Ωm_b , il est aisé de montrer que le point m_a correspond au point de $\delta \cap A$ d'ordonnée minimum et le point m_b correspond au point de $\delta \cap B$ d'ordonnée la plus grande. On montre alors sans peine que $m_a m_b$ est l'unique segment inclus dans δ , de cette longueur et ayant pour extrémité un point de A et un point de B (dans le cas contraire, on contredirait la maximalité ou la minimalité de l'ordonnée de m_b ou m_a).

Ainsi,

$[m_a, m_b]$ est le segment inclus dans δ de longueur minimale dont les extrémités sont respectivement dans A et B .

□

43. Montrer que la médiatrice δ' de $[m_a, m_b]$ est asymptote à la courbe $\Gamma_{A,B}$ en $+\infty$. (voir figure 8)

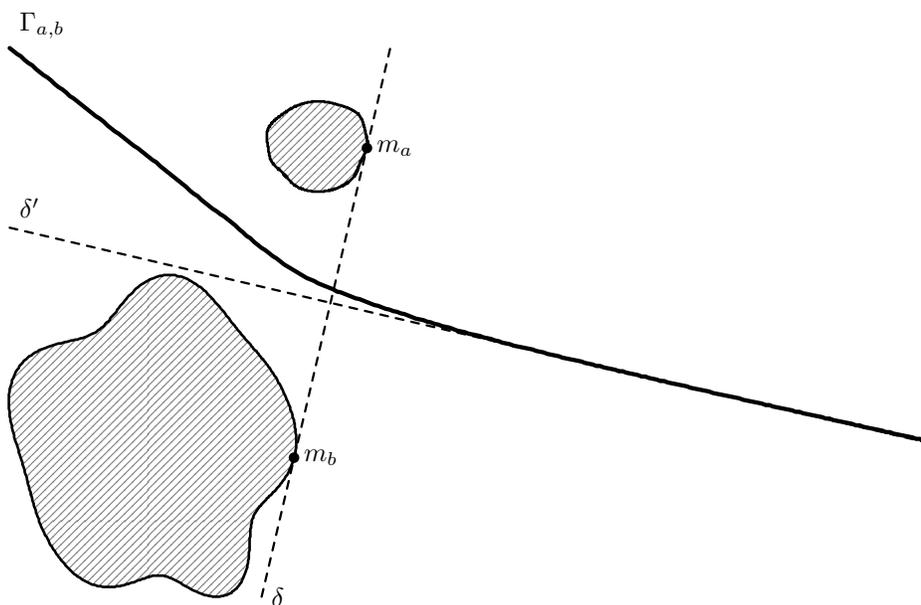


FIGURE 8. Médiatrice δ' de $[m_a, m_b]$ et médiatrice $\Gamma_{A,B}$ de A et B

Afin de montrer le résultat, nous allons établir que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une valeur X_ε pour laquelle dès que $x \geq X_\varepsilon$, le point $M(x) = (x, \varphi_{A,B}(x))$ se trouve à distance au plus égale à ε de δ' . Nous aurons alors montré la propriété :

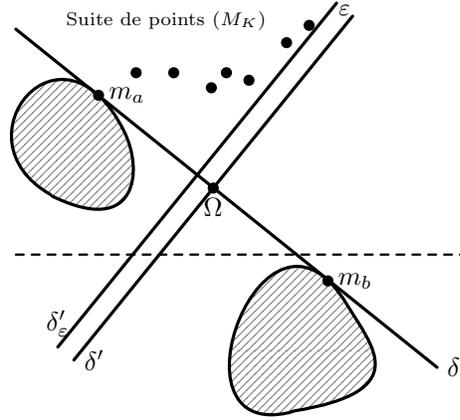
$$\forall \varepsilon > 0, \exists X_\varepsilon : x \in]X_\varepsilon, +\infty[\implies d_{\delta'}(M(x)) \leq \varepsilon,$$

qui est équivalente au résultat voulu.

Procédons par l'**absurde** et supposons qu'il existe une suite de réels $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ telle que :

- (x_k) soit croissante,
- $\lim_{k: +\infty} x_k = +\infty$,
- $\forall k \in \mathbf{N}, d_{\delta'}(M_k) > \varepsilon$ où l'on note $M_k = (x_k, \varphi_{A,B}(x_k))$.

Par symétrie du problème, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que tous les points M_k se trouvent dans le demi-plan supérieur délimité par la droite δ' . Si l'on définit la droite δ'_ε se trouvant dans ce demi-plan supérieur, et parallèle à distance ε de δ' , on suppose alors que tous les points M_k se trouvent dans le demi-plan supérieur délimité par δ'_ε (voir figure 9).

FIGURE 9. Position de la suite de points (M_k) .

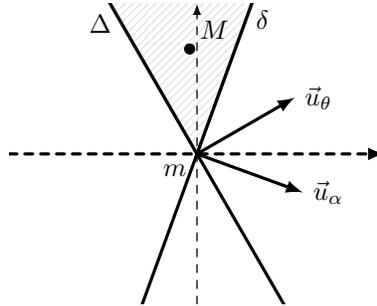
Notons Ω le milieu du segment $[m_a, m_b]$. La démonstration se déroule en deux étapes :

- (1) Dans un premier temps, nous montrons qu'à partir d'un certain rang, la suite de points (M_k) se trouve à une distance inférieure à $\frac{m_a m_b}{2}$ de δ' .
- (2) Ensuite, nous montrerons que l'existence de cette suite (M_k) implique l'existence d'un point a de $\delta \cap A$ tel que $\Omega a < \Omega m_a$, ce qui contredira la définition de m_a .

La partie (1) de la démonstration fait appel au lemme suivant :

Lemme : Notons \vec{u}_t le vecteur $\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$. Soit $m \in \mathcal{P}$ et soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\theta \in]\alpha, \frac{\pi}{2}[$. On définit les deux droites δ et Δ qui passent par m et qui sont respectivement de vecteur normal \vec{u}_α et \vec{u}_θ . Les points se trouvant à gauche de δ et à droite de Δ ont tous une ordonnée supérieure à celle de m ; dit autrement :

$$\left. \begin{array}{l} \langle \overrightarrow{mM} | \vec{u}_\theta \rangle \geq 0 \\ \langle \overrightarrow{mM} | \vec{u}_\alpha \rangle \leq 0 \end{array} \right\} \implies y_M \geq y_m.$$



Preuve du lemme : Notons X et Y les coordonnées de \overrightarrow{mM} , on souhaite alors montrer que $Y \geq 0$. Les hypothèses s'écrivent :

$$\begin{cases} X \cos \theta + Y \sin \theta = p \geq 0 \\ X \cos \alpha + Y \sin \alpha = n \leq 0. \end{cases}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}$, on a $\alpha - \theta \in]-\pi, 0[$. Le système en (X, Y) ci-dessus est donc de Cramer (son déterminant est $\cos \theta \sin \alpha - \cos \alpha \sin \theta = \sin(\alpha - \theta) < 0$) et on a :

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & p \\ \cos \alpha & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\overbrace{n \cos \theta - p \cos \alpha}^{\leq 0 \text{ car } \alpha, \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[}}{\underbrace{\sin(\alpha - \theta)}_{< 0}} \geq 0.$$

□

- (1) Montrons qu'un point $M \in \Gamma_{A,B}$ d'abscisse supérieure à l'abscisse de m_a se trouve nécessairement à distance strictement inférieure à $\frac{m_a m_b}{2} = \Omega m_a$ de δ' . On aura alors la première partie de la démonstration. Pour cela supposons le contraire (voir figure 10).

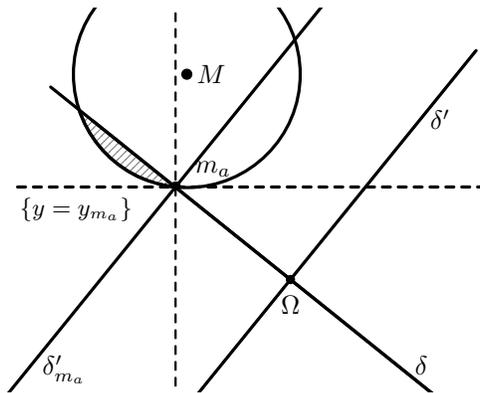


FIGURE 10. La zone hachée doit contenir un élément de B .

Soit $b \in B$ tel que $d_B(M) = d(b, M)$: comme $M \in \Gamma_{A,B}$, on a $d_A(M) = d_B(M)$. De plus, comme $m_a \in A$, la distance de M à A est inférieure à Mm_a . Ainsi, le point b doit nécessairement appartenir à $\overline{B}(M; Mm_a)$.

- Si M appartient à la droite δ'_{m_a} passant par m_a et parallèle à δ' , alors $\overline{B}(M; Mm_a)$ est inclus dans le demi-plan délimité par δ et contenant M . Mais B se trouve à droite de δ donc le point b ne peut qu'être au point de contact entre la boule $\overline{B}(M; Mm_a)$ et le demi-plan à gauche de δ c'est à dire en m_a , ce qui n'est pas possible car $m_a \in A$.
- Si M n'appartient pas à δ'_{m_a} (comme sur la figure 10), on peut se ramener au lemme en utilisant (voir figure 11) :

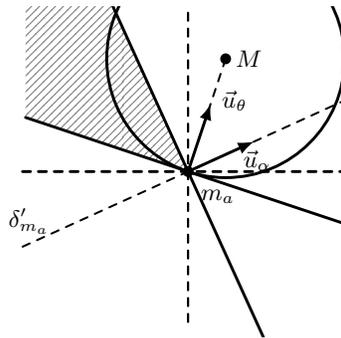


FIGURE 11. Lien avec le lemme précédent.

pour m : m_a ,

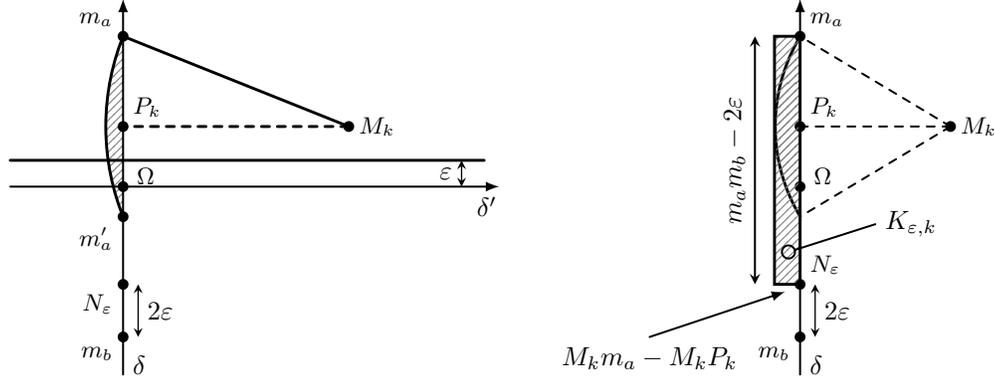
pour \vec{u}_α : vecteur unitaire dirigeant la normale à δ (et de première coordonnée strictement positive, ce qui est possible car ce vecteur unitaire ne peut être verticale),

pour \vec{u}_θ : le vecteur $\frac{\overrightarrow{m_a M}}{\|\overrightarrow{m_a M}\|}$.

La position supposée du point M assure que les hypothèses du lemme sont vérifiées, et le lemme assure alors que si un point est à gauche de δ et à droite de la droite passant par m_a et de normale \vec{u}_θ , il doit avoir une ordonnée supérieure à celle de m_a , donc en particulier strictement positive. Finalement, comme $b \in \overline{B}(M; Mm_a)$, partie se trouvant dans ce demi-plan, l'ordonnée de b doit donc être strictement positive, ce qui n'est pas possible car $B \subset \mathcal{P}^-$.

Finalement, dès que x_k dépasse l'abscisse de m_a , le point M_k est à distance strictement inférieure à Ωm_a de δ' .

- (2) On suppose, quitte à « oublier » les premiers termes, que tous les points M_k vérifient $d_{\delta'}(M_k) \in]\varepsilon; \Omega m_a[$. Quitte à appliquer deux isométries — une rotation et une translation — on suppose pour la suite que $\Omega = (0, 0)$ et que δ est la droite d'équation $x = 0$. Sans perte de généralité, on suppose que la valeur de ε est suffisamment petite ($0 < \varepsilon < \frac{m_a m_b}{4}$). Utilisons alors les définitions suivantes (voir figure 12) :

FIGURE 12. Définitions de P_k et $K_{\epsilon,k}$.

- $P_k = (0, \varphi_{A,B}(x_k))$ est le projeté orthogonal de $M_k = (x_k, \varphi_{A,B}(x_k))$ sur δ .
- m'_a est le symétrique de $m_a(0, y_{m_a})$ par rapport à P_k ,
- N_ϵ est le point de coordonnées $(0, -y_{m_a} + 2\epsilon)$.
- $K_{\epsilon,k}$ est le rectangle s'appuyant à gauche sur δ le long du segment $N_\epsilon m_a$ et d'épaisseur $M_k m_a - M_k P_k$.

Montrons alors que pour tout k , la partie de $\overline{B}(M_k, M_k m_A)$ à gauche de δ se trouve nécessairement dans $K_{\epsilon,k}$. Il est aisé de montrer que cette partie se trouve dans le rectangle d'épaisseur $M_k m_a - M_k P_k$, s'appuyant à droite sur δ le long du segment $m'_a m_a$.

Ensuite, $\Omega m_a = \Omega P_k + P_k m_a > \epsilon + P_k m_a$, c'est-à-dire $P_k m_a < \Omega m_a - \epsilon$. Finalement :

$$m'_a m_a = 2P_k m_a \leq m_a m_b - 2\epsilon = N_\epsilon m_a,$$

et la partie de $\overline{B}(M_k, M_k m_A)$ à gauche de δ se trouve bien nécessairement dans $K_{\epsilon,k}$.

Considérons alors l'épaisseur de $K_{\epsilon,k}$, c'est-à-dire $M_k m_a - M_k P_k$: on montre sans difficulté que cette quantité tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$. En effet, on a successivement :

$$\begin{aligned} M_k m_a - P_k M_k &= \sqrt{M_k P_k^2 + P_k m_a^2} - P_k M_k \quad (\text{Pythagore}) \\ &= x_k \left(\sqrt{1 + \frac{P_k m_a^2}{x_k^2}} - 1 \right) \quad \text{car } P_k M_k = x_k \\ &= x_k \left(1 + \frac{P_k m_a^2}{2x_k^2} + o\left(\frac{P_k m_a^2}{x_k^2}\right) - 1 \right) \quad \text{car } P_k m_a \leq y_{m_a} \text{ donc } \frac{P_k m_a}{x_k} \rightarrow 0 \\ &\sim \frac{P_k m_a^2}{2x_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Quitte à extraire une sous-suite, considérons que la suite de compacts $K_{\epsilon,k}$ est décroissante. Ainsi, sachant que tous les points $M_k \in \Gamma_{A,B}$, il existe nécessairement un point $b_k \in B \cap K_{\epsilon,k}$ (car dans le cas contraire, la distance de M_k à B est nécessairement supérieure à $M_k m_a$, ce qui n'est pas possible). Les parties $B \cap K_{\epsilon,k}$ restent compactes, décroissantes et non vides. On sait alors que $\bigcap_{k \in \mathbf{N}} B \cap K_{\epsilon,k} \neq \emptyset$. Notons b un élément de cette intersection : par définition des parties

$K_{\epsilon,k}$, l'ordonnée de b dépasse celle de $m_b + 2\epsilon$. De plus, comme l'épaisseur de ces parties converge vers 0, l'abscisse de b est nulle et $b \in \delta \cap B$. On contredirait alors la définition de m_b (car le segment $[m_a; b]$ serait de longueur strictement inférieure à $m_a m_b$). Contradiction.

On a donc bien montré par l'absurde que :

$\Gamma_{A,B}$ admet comme asymptote en $+\infty$ la médiatrice de $[m_a m_b]$.

□