EMLyon 2018 - Voie Économique - Sujet

Exercice 1

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad g(x, y, z) = (x + y - z,\, 2y,\, -x + y + z).$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1.$$

1. **a.** Calculer v.

b. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

c. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

2. **a.** Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathscr{C}$.

b. En déduire les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

d. Expliciter, sans justification, le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.

3. **a.** Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$.

b. Montrer : $B^2 = 2B$.

c. En déduire les valeurs propres de g, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

d. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

On pose : $\mathscr{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R}) \mid BM = MA\}$.

4. **a.** Montrer que $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel.

b. Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

5. On cherche à montrer que $\mathscr{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a. Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^tA) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

b. En déduire que les matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathscr{E}$.

d. En déduire : $\dim(\mathscr{E}) \geq 2$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - b \leq \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b. En déduire : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. **a.** Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b. Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1. function b = valeur_approchee(epsilon)
2.        n = 0
3.        while ........
4.                n = n+1
5.        end
6.        b = suite(n)
7. endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt.$$

8. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

9. En déduire les variations de Φ sur $]0,+\infty[$.

10. Montrer : $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 \leq \Phi(x) \leq x$.

11. **a.** Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.
On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

b. Montrer : $\lim\limits_{x\to 0} \Phi'(x) = 0$.
On admet quer la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

12. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

13. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x,y) de U.

b. Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question **2**.

14. **a.** Écrire la matrice hessienne, notée M_a, de H au point $(a, \ln(a))$.

b. Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = a + 1 \\ \lambda_1\lambda_2 & = a - 1. \end{cases}$$

c. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

15. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

Exercice 3

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. **a.** Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}, \mathbf{P}\left([X = n]\right) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.
On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

2. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbf{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

c. En déduire, pour tout k de $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{P}\left([U = k]\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbf{P}\left([X = n]\right) \quad \text{puis} \quad \mathbf{P}\left([U = k]\right) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

d. Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

b. Déterminer, pour tout n de $\mathbf{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

c. En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

5. Que vaut $\mathbf{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathbf{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0; 1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

— le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;

— le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;

— Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

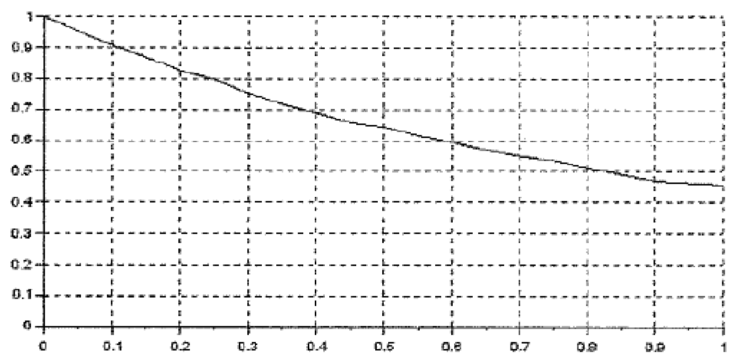
6. **Simulation informatique**

   a. Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

   b. On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0;1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
function r = mystere(p)
        r = 0
        N = 10^4
         for k = 1:N
                x = simule_X()
                y = simule_Y(p)
                if x <= y then
                        r = r + 1/N
                end
         end
 endfunction
```

   c. On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



   À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

7. **Étude de la variable aléatoire Y**

   On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

   a. Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

   b. Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

   c. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}([Y \geq n]) = (1-p)^n$.

8. **a.** Montrer : $\mathbf{P}([X \leq Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = n])\, \mathbf{P}([Y \geq n])$.

   b. Déduire des résultats précédents : $\mathbf{P}([X \leq Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

   c. Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.