EDHEC - 2018 - VOIE E

Correction proposée par G. Dupont.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A, puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application f qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, associe :

$$f(M) = AM.$$

3. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
4. (a) Déterminer une base de $\ker(f)$ et vérifier que $\ker(f)$ est de dimension 2.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{im}(f)$.
   (c) On pose $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et on rappelle que la famille (E_1, E_2, E_3, E_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Écrire $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_3)$ et $f(E_4)$ sous forme de combinaisons linéaires de E_1, E_2, E_3 et E_4, puis donner une base de $\mathrm{im}(f)$.
5. (a) Déterminer l'image par f des vecteurs de base de $\mathrm{im}(f)$.
   (b) Donner les valeurs propres de f puis conclure que f est diagonalisable.
6. Généralisation : f est toujours l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ défini par $f(M) = AM$, mais cette fois, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On admet que f et A possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.
   (a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur colonne propre associé.
   Justifier que $X\,{}^tX$ appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, puis montrer que c'est un vecteur propre de f. En déduire que λ est valeur propre de f.
   (b) Soit λ une valeur propre de f et M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ vecteur propre de f associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes C_1 et C_2 de M, montrer que λ est valeur propre de A.

Solution :

1. Si on note C_1 et C_2 les deux colonnes de A, on a $C_2 = 2C_1$ donc $\mathrm{rg}(A) = 1 < 2$. Puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, il vient :

$$\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\Leftrightarrow A - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)(6-\lambda) - 2 \times 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{0, 7\}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 7\}.}$$

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. Alors

$$\begin{aligned} X \in E_0(A) &\Leftrightarrow AX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= 0 \\ 3x + 6y &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -2y \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned} X \in E_7(A) &\Leftrightarrow AX = 7X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= 7x \\ 3x + 6y &= 7y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = 3x \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_7(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right).}$$

3. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on a

$$f(M) = AM \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$$

donc f est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) \\ &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda f(M) + f(N). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbf{R})).}$$

4. (a) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Alors

$$\begin{aligned}
M \in \ker(f) &\Leftrightarrow AM = 0\\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2c &= 0\\ b+2d &= 0\\ 3a+6c &= 0\\ 3b+6d &= 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a &= -2c\\ b &= -2d\end{cases}\\
&\Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} -2c & -2d\\ c & d\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow M = c\begin{bmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right).}$$

La famille $\left(\begin{bmatrix} -2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$ est libre. Ainsi,

$$\boxed{\dim\ker(f) = 2.}$$

(b) Il suit du théorème du rang que

$$\dim \mathrm{im}(f) = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) - \dim\ker(f) = 4 - 2 = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{\dim \mathrm{im}(f) = 2.}$$

(c) On a

$$f(E_1) = AE_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix} = E_1 + 3E_3,$$

$$f(E_2) = AE_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix} = E_2 + 3E_4,$$

$$f(E_3) = AE_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0\\ 6 & 0\end{bmatrix} = 2E_1 + 6E_3,$$

$$f(E_4) = AE_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2\\ 0 & 6\end{bmatrix} = 2E_2 + 6E_4.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(f) &= \mathrm{Vect}(f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4))\\
&= \mathrm{Vect}(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4, 2E_1 + 6E_3, 2E_2 + 6E_4)\\
&= \mathrm{Vect}(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{im}(f) = \operatorname{Vect}(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4).}$$

On vérifie facilement que la famille $(E_1 + 3E_3, E_2 + 3E_4)$ est libre, il s'agit donc d'une base de $\operatorname{im}(f)$.

5. (a) On a

$$f(E_1 + 3E_3) = f(E_1) + 3f(E_3) = 7E_1 + 21E_3 = 7(E_1 + 3E_3),$$
$$f(E_2 + 3E_4) = f(E_2) + 3f(E_4) = 7E_2 + 21E_4 = 7(E_2 + 3E_4).$$

Ainsi,

$$\boxed{f(E_1 + 3E_3) = 7(E_1 + 3E_3) \quad \text{et} \quad f(E_2 + 3E_4) = 7(E_2 + 3E_4).}$$

(b) Il suit de la question précédente que $\operatorname{im}(f) \subset E_7(f)$ et donc

$$\dim E_7(f) \geq \dim \operatorname{im}(f) = 2.$$

Par ailleurs, d'après 4.a, on a

$$\dim E_0(f) = \dim \ker(f) = 2.$$

Puisque la somme des dimensions des espaces propres ne peut excéder la dimension totale, on a

$$\dim E_0(f) = \dim E_7(f) = 2$$

et donc

$$\dim E_0(f) + \dim E_7(f) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$$

et ainsi,

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

6. Généralisation.

(a) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$. On pose

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}.$$

On a ${}^tX \in \mathcal{M}_{1,2}$ donc

$$X\,{}^tX = \begin{bmatrix} x^2 & y^2 \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$$

et $X\,{}^tX$ est non nul car X est non nul de sorte que x et y ne peuvent être tous les deux nuls. Par ailleurs

$$f(X\,{}^tX) = A(X\,{}^tX) = (AX)\,{}^tX = (\lambda X)\,{}^tX = \lambda X\,{}^tX.$$

Il s'ensuit que $X\,{}^tX$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) \subset \operatorname{Sp}(f).}$$

(b) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ et $M \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$. Posons

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(f) &\Leftrightarrow AM = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} ax+by & = \lambda x \\ cx+dy & = \lambda y \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{ll} az+bt & = \lambda z \\ cz+dt & = \lambda t \end{array} \right. \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \\ A \times \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} & = \lambda \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

La matrice M étant non-nulle, l'une de ses deux colonnes est non-nulle. Ainsi, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Il s'ensuit que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Sp}(A).}$$

En combinant avec la réponse à la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A).}$$

□

Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout $i \in \{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : « on choisit la pièce numérotée i ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k = \overline{P_k}$.
On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 2$, $P(X=n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (c) En déduire la valeur de $P(X=0)$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X) = \frac{4}{3}$.
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P(Y=j)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$.
6. Loi de $X+Y$.
   (a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
   (b) Montrer que $P(X+Y=1) = \frac{2}{3}$.

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X+Y=n) = ([X=1] \cap [Y=n-1]) \cup ([Y=1] \cap [X=n-1]).$$

(d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X+Y=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

7. Informatique.
On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable).
On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

(a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1,1,'uin',---,---)
x = 1
if piece == 0 then
        lancer = grand(1,1,'uin',---,---)
        while lancer == 0
                lancer = ---
                x = ---
        end
else
        if piece == 1 then
                x = ---
        end
end
disp(x)
```

(b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numéro 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Solution :

1. (a) On a $(X=1) = P_1$. Par ailleurs, puisque (A_0, A_1, A_2) est un système complet d'événements, on a

$$(X=1) = (A_0 \cap P_1) \sqcup (A_1 \cap P_1) \sqcup (A_2 \cap P_1)$$

donc

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(A_0)\, P_{A_0}(P_1) + P(A_1)\, P_{A_1}(P_1) + P(A_2)\, P_{A_2}(P_1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P(X=1) = \frac{1}{2}.}$$

(b) On a $X^{A_0} \rightsquigarrow \mathcal{G}(1/2)$, X^{A_1} est constante nulle et X^{A_2} est constante égale à 1. Ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P(A_0)\, P_{A_0}(X=n) + P(A_1)\, P_{A_1}(X=n) + P(A_2)\, P_{A_2}(X=n) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P\left(X=n\right)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
P\left(X=0\right) &= 1-P\left(X\geq 1\right)\\
&= 1-P\left(X=1\right)-P\left(X\geq 2\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}-\sum_{n=2}^{+\infty}P\left(X=n\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1-\frac{1}{2}\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(2-1-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{P\left(X=0\right)=\frac{1}{3}.}$$

Note : Ce résultat est conforme à l'intuition puisqu'il correspond à la probabilité de tirer la pièce numéro 1.

2. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} nP\left(X=n\right)$ converge (absolument) or

$$\sum_{n\geq 0} nP\left(X=n\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 2}\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{n\geq 2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

et on reconnaît une série géométrique dérivée de raison $1/2$, elle est donc convergente. Ainsi X admet un espérance et

$$\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \sum_{n=0}^{+\infty}nP\left(X=n\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2}-1\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E\left[X\right]=1.}$$

3. D'après le théorème de transfert $X(X-1)$ possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} n(n-1)P(X=n)$ converge (absolument). Mais

$$\sum_{n\geq 0} n(n-1)P(X=n) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{12}\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison 1/2, il s'agit donc d'une série convergente. Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) \\ &= \frac{1}{12}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ &= \frac{1}{12}\times\frac{2}{(1-1/2)^3} \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Puisque $X^2 = X(X-1)+X$, X^2 admet une espérance et

$$E\left[X^2\right] = E[X(X-1)] + E[X] = \frac{7}{3}.$$

Il s'ensuit que X admet une variance et

$$V(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}.$$

Ainsi

$$\boxed{V(X) = \frac{4}{3}.}$$

4. La situation modélisée est parfaitement symétrique entre "pile" et "face". Il s'ensuit que :

$$\boxed{Y \text{ suit la même loi que } X.}$$

5. (a) Soit $j\geq 2$. Alors

$$(X=1, Y=j) = P_1\cap\cdots\cap P_{j-1}\cap F_j$$

mais

$$(Y=j) = P_1\cap\cdots\cap P_{j-1}\cap F_j$$

donc

$$(X=1, Y=j) = (Y=j)$$

et

$$\boxed{P(X=1, Y=j) = P(Y=j).}$$

(b) Soit $i\geq 2$. Alors

$$(X=i, Y=1) = F_1\cap\cdots\cap F_{i-1}\cap P_i$$

et

$$(X = i) = F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i$$

donc

$$(X = i, Y = 1) = (X = i)$$

et

$$\boxed{P(X = i, Y = 1) = P(X = i).}$$

6. Loi de $X + Y$.

   (a) X et Y sont à valeurs dans $\mathbf{N}$ donc $(X + Y)(\Omega) \subset \mathbf{N}$. En outre

   $$(X + Y = 0) = (X = 0, Y = 0)$$

   ce qui signifie que l'on ne fait aucun "pile", ni aucun "face", un événement impossible. Ainsi,

   $$(X + Y = 0) = \emptyset.$$

   Aussi

   $$(X + Y = 2) = (X = 2, Y = 0) \sqcup (X = 1, Y = 1) \sqcup (X = 0, Y = 2)$$

   mais $(X = 2, Y = 0) = \emptyset$ car cela correspondrait à ne faire aucun "face" tout en ne faisant le premier "pile" qu'au deuxième lancer. De même $(X = 0, Y = 2) = \emptyset$. Enfin, $(X = 1, Y = 1) = \emptyset$ car cela signifie que l'on obtient le premier "pile" et le premier "face" au premier lancer, une absurdité. Ainsi,

   $$(X + Y = 2) = \emptyset.$$

   Enfin,

   $$(X + Y = 1) \supset (X = 1, Y = 0) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} P_i \neq \emptyset$$

   et, pour tout $i \geq 2$

   $$(X + Y = i + 1) \supset (X = i, Y = 1) \neq \emptyset.$$

   Ainsi,

   $$\boxed{(X + Y)(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, 2\}.}$$

   (b) On a

   $$(X + Y = 1) = (X = 1, Y = 0) \sqcup (X = 0, Y = 1) = (Y = 0) \sqcup (X = 0).$$

   Ainsi, il suit de la question 1.c que

   $$P(X + Y = 1) = P(X = 0) + P(Y = 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

   et donc

   $$\boxed{P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}.}$$

   (c) Pour tout entier $n \geq 3$, on a

   $$(X + Y = n) = \bigsqcup_{i \geq 0} (X = i, Y = n - i)$$

   mais, pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$, on a $(X = i, Y = j) = \emptyset$ si $1 \notin \{i, j\}$ car on doit faire soit "pile" soit "face" au premier lancer. Ainsi,

$$\boxed{(X+Y=n)=(X=1,Y=n-1)\sqcup(X=n-1,Y=1).}$$

(d) Pour tout entier $n \geq 3$, on a

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) &= P(X=1,Y=n-1)+P(X=n-1,Y=1) \\ &\underset{(5)}{=} P(Y=n-1)+P(X=n-1) \\ &\underset{(4)}{=} 2P(X=n-1) \\ &\underset{(1.\mathrm{b})}{=} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq 3, \quad P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

7. Informatique.

(a) Nous proposons le script `Scilab` suivant. pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1,1,'uin',0,2)
x = 1
if (piece == 0) then
    lancer = grand(1,1,'uin',0,1)
    while (lancer == 0)
        lancer = grand(1,1,'uin',0,1)
        x = x+1
    end
else
    if (piece == 1) then
        x = 0
    end
end
disp(x)
```

(b) Si `piece` prend la valeur 2, alors on doit assigner à `x` la valeur 1. Mais puisque `x` est initialisé à cette valeur en début de script, il n'y a aucune instruction à exécuter dans ce cas.

□

Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{a}e^{-x^2/2a} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y=\dfrac{X^2}{2a}$.

(a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

(b) On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script `Scilab` demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

4. (a) Vérifier que la fonction g, qui à tout réel x associe $x^2 e^{-x^2/2a}$, est paire.

   (b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant une loi normale de paramètres 0 et a.

   (c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

5. (a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

   (b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$V(X) = \frac{(4-\pi)a}{2}.$$

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.

   On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k^2$.

   (a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

   (b) Montrer que X^2 possède une variance et que $V\left(X^2\right) = 4a^2$.

   (c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a. En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

   (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \epsilon > 0, \quad P\left(|S_n - a| \leq \epsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2}.$$

   (b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

Solution :

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x < 0$, on a $f(x) = 0 \geq 0$. Si $x \geq 0$, alors $f(x) = \dfrac{x}{a}\exp(-x^2/2a)$ est positif car une exponentielle et toujours positive et a, x sont tous deux positifs. Ainsi, f est positive.

   f est constante sur $\mathbf{R}_-^*$ donc elle y est continue. f est continue sur $\mathbf{R}_+$ comme produit de fonctions continues. Ainsi, f est continue sur $\mathbf{R}^*$.

   Enfin, on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a}\,dx \\ &= \lim_{M:+\infty} \int_0^M \frac{x}{a} e^{-x^2/2a}\,dx \\ &= \lim_{M:+\infty} \left[-e^{-x^2/2a}\right]_0^M \\ &= \lim_{M:+\infty} 1 - e^{-M^2/2a} \\ &= 1.\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

2. Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\ dx.$$

Si $t \leq 0$, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, t]$ donc $F_X(t) = 0$.
Si $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\ dx \\ &= \int_{0}^{t} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a}\ dx \\ &= \left[-e^{-x^2/2a}\right]_0^t \\ &= 1 - e^{-t^2/2a}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-t^2/2a} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.
   (a) Déterminons la fonction de répartition de Y. Puisque Y est positive, pour tout $t \leq 0$, on a $F_Y(t) = 0$. Soit $t > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) \\ &= P\left(X^2 \leq 2at\right) \\ &= P\left(X \leq \sqrt{2at}\right) \qquad \text{car } X \geq 0 \\ &= F_X(\sqrt{2at}) \\ &= 1 - e^{-2at/2a} \\ &= 1 - e^{-t}. \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

   On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(1)$ et donc

$$\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(1).}$$

   (b) On a $Y = \dfrac{X^2}{2a}$ et X est positive donc $X = \sqrt{2aY}$. Ainsi, pour simuler X, on peut utiliser le script suivant :

```
y = grand(1,1,'exp',1)
a = input('Entrer la valeur de a :')
x = sqrt(2*a*y)
disp(x)
```

4. (a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$g(-x) = (-x)^2 \exp(-(-x)^2/2a) = x^2 \exp(-x^2/2a) = g(x).$$

   Ainsi,

$$\boxed{g \text{ est paire.}}$$

(b) Si $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,a)$, on a

$$E\left[Z^2\right] = V\left(Z\right) + E\left[Z\right]^2 = a + 0^2 = a.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
E\left[Z^2\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{a2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2\right)\, dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)\, dx \\
&= \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{a = E\left[Z^2\right] = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx.}$$

(c) On a, sous réserve de convergence,

$$E\left[X\right] = \int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$$

mais cette intégrale converge car, d'après la question précédente,

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\, dx = a\frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{E\left[X\right] = \frac{\sqrt{2a\pi}}{2}.}$$

5. (a) On a $Y = \dfrac{X^2}{2a}$ donc $X^2 = 2aY$. Mais $E\left[Y\right] = 1$ donc X^2 admet une espérance et

$$\boxed{E\left[X^2\right] = 2a.}$$

(b) On a, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\begin{aligned}
V\left(X\right) &= E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2 \\
&= 2a - \left(\frac{\sqrt{2a\pi}}{2}\right)^2 \\
&= 2a - \frac{2a\pi}{4} \\
&= \frac{4a - a\pi}{2} \\
&= \frac{(4-\pi)}{2}a.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{V\left(X\right) = \frac{4-\pi}{2}a.}$$

6. (a) Par linéarité de l'espérance, on a

$$\begin{aligned}E[S_n] &= E\left[\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right]\\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} E\left[X_k^2\right]\\ &= \frac{1}{2n} nE\left[X^2\right]\\ &= \frac{2na}{2n}\\ &= a.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E[S_n] = a.}$$

(b) $X^2 = 2aY$ et Y admet une variance donc X^2 admet une variance et

$$V\left(X^2\right) = V(2aY) = 4a^2 V(Y) = 4a^2$$

puisque $V(Y) = 1$ du fait que $Y \rightsquigarrow \mathcal{E}(1)$. Ainsi,

$$\boxed{V\left(X^2\right) = 4a^2.}$$

(c) Puisque S_n est un estimateur sans biais de a, on a

$$\begin{aligned}r_a(S_n) &= V(S_n)\\ &= V\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)\\ &= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} V\left(X_k^2\right) \quad \text{par indépendance}\\ &= \frac{1}{4n^2} \times n \times 4a^2 \quad \text{d'après 6.b}\\ &= \frac{a^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{S_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$$

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

(a) Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}P(|S_n - a| \leq \epsilon) &= P(|S_n - E[S_n]| \leq \epsilon)\\ &= 1 - P(|S_n - E[S_n]| > \epsilon)\\ &\geq 1 - \frac{V(S_n)}{\epsilon^2} \quad \text{d'après l'inégalité de Tchebychev}\\ &= 1 - \frac{a^2}{n\epsilon^2}\\ &\geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2} \quad \text{car } a \leq 1.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad P\left(|S_n - a| \leq \epsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2}.}$$

(b) On veut un intervalle de confiance pour a avec une précision $\epsilon = \dfrac{1}{10}$. D'après la question précédente, il suffit de choisir n tel que

$$1 - \frac{1}{n\epsilon^2} \geq 0,95,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n\epsilon^2} \leq \frac{5}{100}$$

ou encore

$$n \geq \frac{100}{5\epsilon^2}.$$

Avec $\epsilon = 0,1$, on trouve :

$$\boxed{n \geq 2000.}$$

□

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)\, dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : étude de f

1. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbf{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
2. (a) Montrer que f est impaire.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. (a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

   (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ est une intégrale convergente.
   (b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.
   (c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).$$

   (d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbf{R}$.

   On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est-à-dire :
$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3).$$
   (b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

   (c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. (on trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$)
6. On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$. Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de $f(1)$.

```
U = grand(1,100 000,'unf',0,1)
V = log(1+U.^2)
f = ------
disp(f)
```

Partie II : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \int_0^1 (\ln(1 + t^2)^n)\, dt$.

7. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
   (b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.
8. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
9. (a) Établir l'encadrement suivant :
$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n.$$
   (b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$? Sur la série de terme général u_n ?
10. (a) Montrer que :
$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1 + t^2))^n}{1 - \ln(1 + t^2)}\, dt \leq \frac{u_n}{1 - \ln 2}.$$
    (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1 + t^2))^n}{1 - \ln(1 + t^2)}\, dt$.
    (c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1 + t^2))^n}{1 - \ln(1 + t^2)}\, dt.$$
    (d) En déduire que l'on a :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1 + t^2)}\, dt.$$
    (e) Modifier le script présenté à la question 6 pour donner une valeur approchée de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Solution :

Partie I : étude de f

1. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $1 + t^2 \geq 1$ donc
$$\ln(1 + t^2) \geq \ln(1) = 0.$$

Si $x \geq 0$, on a par croissance de l'intégrale,

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\ dt \geq 0.$$

Si $x < 0$, on a

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\ dt = -\int_x^0 \ln(1+t^2)\ dt \leq 0.$$

Ainsi

$$\boxed{f(x) \text{ est du signe de } x.}$$

(b) $h : t \mapsto \ln(1+t^2)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f est la primitive de h qui s'annule en 0. Il s'ensuit que f est dérivable et que $f' = h$ est continue. Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = \ln(1+x^2).}$$

(c) Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a $f'(x) = \ln(1+x^2) > \ln(1) = 0$ donc :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R}.}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-x} \ln(1+t^2)\ dt \\ &= -\int_{-x}^0 \ln(1+t^2)\ dt \\ &= -\int_0^x \ln(1+t^2)\ dt \quad (\text{ par parité de } h) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$

(b) Comme observé en 1.b, f est une primitive de h qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, et en deux fois dérivable. En outre, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$f''(x) = h'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

donc $f''(x)$ est du signe de x. Il s'ensuit que :

$$\boxed{f \text{ est concave sur } \mathbf{R}_-, \text{ convexe sur } \mathbf{R}_+ \text{ et la courbe admet un point d'inflexion en 0.}}$$

3. (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}.}$$

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x 1 \times \ln(1+t^2)\, dt \\
&\underset{\text{IPP}}{=} \left[t \ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x t \frac{2t}{1+t^2}\, dt \\
&= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\, dt \\
&\underset{\text{3.a.}}{=} x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt.}$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}_+$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$ converge. Par ailleurs

$$\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ converge aussi. Il s'ensuit que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ converge.}}$$

(b) En utilisant 3.b, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x\ln(1+x^2)} &= \frac{x\ln(1+x^2)}{x\ln(1+x^2)} - \frac{2x}{x\ln(1+x^2)} + \frac{2}{x\ln(1+x^2)}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&= 1 - \frac{2}{\ln(1+x^2)} + \frac{2}{x\ln(1+x^2)}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 - 0 + 0 = 1,
\end{aligned}$$

les deux dernières limites étant nulles comme quotient d'une limite finie par une limite infinie. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2).}$$

(c) Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+x^2) &= \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right] \\
&= \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \\
&= 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\
&\underset{+\infty}{\sim} 2\ln(x) + \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$x\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x) + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).$$

et donc

$$\boxed{x\ln(1+x^2) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).}$$

(d) f étant impaire, pour tout $x < 0$, on a $-x > 0$ et, d'après 4.c,

$$f(x) = -f(-x) \underset{-\infty}{\sim} -2(-x)\ln(-x) = 2x\ln(-x).$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2x\ln(-x).}$$

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

(a) On a déjà observé en 2.b que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est donc en particulier $\mathcal{C}^3$.

(b) On a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \ln(1+x^2), \quad f''(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{et} \quad f^{(3)}(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

donc

$$\boxed{f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(3)}(0) = 2.}$$

(c) En appliquant la formule de Taylor-Young à l'ordre 3, il vient :

$$f(x) = 2\frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}.}$$

6.
```
U = grand(1,100 000,'unf',0,1)
V = log(1+U.^2)
f = mean(V)
disp(f)
```

Remarque : Si le candidat n'a pas vu cette méthode de Monte-Carlo en cours, il s'agit d'une simple application du théorème de transfert appliqué à $\ln(1+X^2)$, avec $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$. On peut aussi simplement se laisser guider par l'heuristique suivante : l'intégrale d'une fonction sur un segment $[a,b]$ est égale à sa valeur moyenne sur ce segment, multipliée par la longueur du segment. Ainsi, l'intégrale sur $[0,1]$ de $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est égale à sa valeur moyenne sur ce segment. Et pour estimer cette valeur moyenne, il suffit de prendre des points au hasard et de calculer la moyenne des valeurs obtenues.

Partie II : étude d'une suite

7. (a) On a bien

$$\int_0^1 (\ln(1+t^2))^0 \; dt = \int_0^1 \; dt = 1 = u_0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La valeur de } u_0 \text{ est cohérente avec l'expression générale.}}$$

(b) On a

$$u_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2) \; dt = f(1).$$

Ainsi,

$$\boxed{u_1 = f(1).}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (\ln(1+t^2))^{n+1} \; dt - \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n \; dt \\ &= \int_0^1 (\ln(1+t^2))^{n+1} - (\ln(1+t^2))^n \; dt \\ &= \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n (\ln(1+t^2) - 1) \; dt. \end{aligned}$$

Mais, pour tout $t \in [0,1]$, $1 \leq 1+t^2 \leq 2 < e$ et donc $0 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln(2) < \ln(e) = 1$ et donc

$$(\ln(1+t^2))^n (\ln(1+t^2) - 1) < 0$$

et donc

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est décroissante.}}$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1+t^2 \geq 1$ donc $(\ln(1+t^2))^n \geq 0$ et donc

$$u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n \; dt \geq 0.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ est donc minorée par } 0.}$$

Il suit alors du théorème de convergence monotone que

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers une limite } \ell \geq 0.}$$

9. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} 1 \leq 1+t^2 \leq 2 &\Rightarrow 0 \leq \ln(1+t^2) \leq \ln 2 \\ &\Rightarrow 0 \leq (\ln(1+t^2))^n \leq (\ln 2)^n \end{aligned}$$

et donc, en intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$\boxed{0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n.}$$

(b) On a $1 < 2 < e$ donc $0 < \ln(2) < 1$. Il s'ensuit que $(\ln 2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suit alors du théorème d'encadrement que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

En outre, la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(\ln 2)^n$ converge donc, d'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge.}}$$

10. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leq \frac{1}{1-\ln 2}$$

donc

$$0 \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leq \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln 2}$$

et, en intégrant sur $[0,1]$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln 2}\,dt,$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt \leq \frac{u_n}{1-\ln 2}.}$$

(b) Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il suit du théorème d'encadrement que

$$\boxed{\int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^k\,dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt.}$$

(d) En reprenant l'identité établie en 10.c, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt - \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt,
\end{aligned}$$

la limite provenant du résultat démontré en 10.b.
Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\, dt.}$$

(e)
```
U = grand(1,100 000,'unf',0,1)
V = 1./(1-log(1+U.^2))
S = mean(V)
disp(S)
```

□