

## Exercice 1

On considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

1. Vérifier que  $A$  n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice  $A$ , puis trouver les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

Dans la suite de cet exercice, on considère l'application  $f$  qui, à toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ , associe :

$$f(M) = AM.$$

3. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ .
4. (a) Déterminer une base de  $\ker(f)$  et vérifier que  $\ker(f)$  est de dimension 2.  
(b) En déduire la dimension de  $\text{im}(f)$ .  
(c) On pose  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et on rappelle que la famille  $(E_1, E_2, E_3, E_4)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ . Écrire  $f(E_1)$ ,  $f(E_2)$ ,  $f(E_3)$  et  $f(E_4)$  sous forme de combinaisons linéaires de  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et  $E_4$ , puis donner une base de  $\text{im}(f)$ .
5. (a) Déterminer l'image par  $f$  des vecteurs de base de  $\text{im}(f)$ .  
(b) Donner les valeurs propres de  $f$  puis conclure que  $f$  est diagonalisable.
6. Généralisation :  $f$  est toujours l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  défini par  $f(M) = AM$ , mais cette fois,  $A$  est une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ . On admet que  $f$  et  $A$  possèdent des valeurs propres et on se propose de montrer que ce sont les mêmes.
  - (a) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur colonne propre associé.  
Justifier que  $X^t X$  appartient à  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ , puis montrer que c'est un vecteur propre de  $f$ . En déduire que  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ .
  - (b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$  et  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  vecteur propre de  $f$  associé à cette valeur propre. En considérant les colonnes  $C_1$  et  $C_2$  de  $M$ , montrer que  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ .

---

## Exercice 2

On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut  $\frac{1}{2}$  et celle d'obtenir "face" vaut également  $\frac{1}{2}$ , une pièce numérotée 1, donnant "face" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2, donnant "pile" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.

Pour tout  $i \in \{0, 1, 2\}$ , on note  $A_i$  l'événement : « on choisit la pièce numérotée  $i$  ».

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $P_k$  l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro  $k$  » et on pose  $F_k = \overline{P_k}$ .

On considère la variable aléatoire  $X$ , égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire  $Y$ , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à  $X$  la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à  $Y$  la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer  $P(X = 1)$ .  
(b) Montrer que :  $\forall n \geq 2$ ,  $P(X = n) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .  
(c) En déduire la valeur de  $P(X = 0)$ .
2. Montrer que  $X$  admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que  $X(X - 1)$  possède une espérance. En déduire que  $X$  possède une variance et vérifier que  $V(X) = \frac{4}{3}$ .
4. Justifier que  $Y$  suit la même loi que  $X$ .

5. (a) Montrer que, pour tout entier  $j$  supérieur ou égal à 2,  $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P(Y = j)$ .  
(b) Montrer que, pour tout entier  $i$  supérieur ou égal à 2,  $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P(X = i)$ .
6. Loi de  $X + Y$ .
  - (a) Expliquer pourquoi  $X + Y$  prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.
  - (b) Montrer que  $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$ .
  - (c) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1]).$$

- (d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

## 7. Informatique.

On rappelle que, pour tout entier naturel  $m$ , l'instruction `grand(1, 1, 'uin', 0, m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et  $m$  (ceci de façon équiprobable).

On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

- (a) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire  $X$  lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```

piece = grand(1,1,'uin',---,---)
x = 1
if piece == 0 then
    lancer = grand(1,1,'uin',---,---)
    while lancer == 0
        lancer = ---
        x = ---
    end
else
    if piece == 1 then
        x = ---
    end
end
disp(x)

```

- (b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numéro 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

## Exercice 3

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} e^{-x^2/2a} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est une densité.

*Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$ .*

2. Déterminer la fonction de répartition  $F_X$  de  $X$ .

3. On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par :  $Y = \frac{X^2}{2a}$ .

- (a) Montrer que  $Y$  suit la loi exponentielle de paramètre 1.

- (b) On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de  $a$  à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire  $X$ .
4. (a) Vérifier que la fonction  $g$ , qui à tout réel  $x$  associe  $x^2 e^{-x^2/2a}$ , est paire.  
 (b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire  $Z$  suivant une loi normale de paramètres 0 et  $a$ .  
 (c) En déduire que  $X$  possède une espérance et la déterminer.
5. (a) Rappeler l'espérance de  $Y$  puis montrer que  $X$  possède un moment d'ordre 2 et le calculer.  
 (b) En déduire que la variance de  $X$  est donnée par :

$$V(X) = \frac{(4 - \pi)a}{2}.$$

*On suppose désormais que le paramètre  $a$  est inconnu et on souhaite l'estimer.*

6. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que  $X$ .

On note  $S_n$  la variable aléatoire définie par  $S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n X_k^2$ .

- (a) Montrer que  $S_n$  est un estimateur sans biais de  $a$ .  
 (b) Montrer que  $X^2$  possède une variance et que  $V(X^2) = 4a^2$ .  
 (c) Déterminer le risque quadratique  $r_a(S_n)$  de  $S_n$  en tant qu'estimateur de  $a$ . En déduire que  $S_n$  est un estimateur convergent de  $a$ .
7. On suppose que  $a$  est inférieur ou égal à 1.

- (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire  $S_n$  et en déduire :

$$\forall \epsilon > 0, \quad P(|S_n - a| \leq \epsilon) \geq 1 - \frac{1}{n\epsilon^2}.$$

- (b) Déterminer une valeur de  $n$  pour laquelle  $\left[ S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10} \right]$  est un intervalle de confiance pour  $a$  avec un niveau de confiance au moins égal à 95%.

## Problème

On considère la fonction  $f$  qui à tout réel  $x$  associe :  $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2) dt$ .

*Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.*

### Partie I : étude de $f$

- (a) Déterminer le signe de  $f(x)$  selon le signe de  $x$ .  
 (b) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbf{R}$  et calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$ .  
 (c) En déduire les variations de  $f$  sur  $\mathbf{R}$  (on ne cherchera pas à calculer les limites de  $f$ ).
- (a) Montrer que  $f$  est impaire.  
 (b) Étudier la convexité de la fonction  $f$  et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.
- (a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

- (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$f(x) = x(\ln(1+x^2) - 2) + 2 \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

4. Recherche d'un équivalent de  $f(x)$  au voisinage de  $+\infty$ .

(a) Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$  est une intégrale convergente.

(b) En déduire que  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \ln(1+x^2)$ .

(c) Vérifier que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a  $\ln(1+x^2) = 2 \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ , puis établir l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x \ln(x).$$

(d) Donner sans calcul un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x$  est au voisinage de  $-\infty$ .

5. Recherche d'un équivalent de  $f(x)$  au voisinage de 0.

(a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $\mathbf{R}$ .

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction  $f$ , c'est-à-dire :

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + o(x^3).$$

(b) Déterminer  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  et  $f^{(3)}(0)$ .

(c) En déduire alors un équivalent de  $f(x)$  au voisinage de 0. (on trouve  $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{3}$ )

6. On rappelle qu'en **Scilab**, la commande `grand(1,1,'unf',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[a, b]$ . Compléter le script **Scilab** suivant pour qu'il calcule et affiche, à l'aide de la méthode de Monte-Carlo, une valeur approchée de  $f(1)$ .

```
U = grand(1,100 000,'unf',0,1)
V = log(1+U.^2)
f = -----
disp(f)
```

## Partie II : étude d'une suite

On pose  $u_0 = 1$ , et pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n = \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt$ .

7. (a) La valeur donnée à  $u_0$  est-elle cohérente avec l'expression générale de  $u_n$  ?

(b) Exprimer  $u_1$  à l'aide de la fonction  $f$ .

8. (a) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante.

(b) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

9. (a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n.$$

(b) Que peut-on en déduire sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  ? Sur la série de terme général  $u_n$  ?

10. (a) Montrer que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt \leq \frac{u_n}{1 - \ln 2}.$$

(b) En déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt$ .

(c) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1 - (\ln(1+t^2))^n}{1 - \ln(1+t^2)} dt.$$

(d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1 - \ln(1+t^2)} dt.$$

(e) Modifier le script présenté à la question 6 pour donner une valeur approchée de  $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ .