ESSEC - 2009 - VOIE E

(adapté pour Scilab)

Ce sujet comporte trois problèmes de décision inspirés de situations concrètes.
Ces problèmes sont indépendants.

Problème 1 : prédire le dernier succès

Présentation : soit un entier $n \geq 1$. On répète n fois, de façon indépendante, une même expérience qui conduit à un succès avec la probabilité $p \in]0,1[$ ou à un échec avec la probabilité $1-p$.
Le jeu proposé est de deviner quand aura lieu le dernier succès. A chaque succès, on peut décider d'annoncer ou non qu'il s'agit du dernier de toute la série d'expériences. On ne peut faire qu'une annonce par partie.
Le jeu est gagné si, à l'issue des n expériences, on a fait une annonce et qu'elle s'est révélée exacte. Le jeu est perdu si l'on n'a pas fait d'annonce ou si l'on s'est trompé en annonçant le dernier succès.

Stratégie : on choisit un entier $s \in [\![1, n]\!]$, et on laisse passer les $n-s$ premières expériences. Ensuite, dès qu'un succès se présente, on annonce que ce sera le dernier.
On note P_s la probabilité de gagner en utilisant cette stratégie.

1. Montrer que la stratégie est gagnante si et seulement si il y a exactement un succès lors des s dernières expériences.
2. En déduire une expression de P_s en fonction de p et de s.
3. Montrer l'équivalence : $\dfrac{P_{s+1}}{P_s} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad s \leq \dfrac{1}{p} - 1.$
4. En déduire que la probabilité P_s est maximale pour une ou deux valeurs de s.
5. Un exemple : on lance 10 fois un dé bien équilibré, et on doit prédire quand survient le dernier six. Quel choix convient-il de faire ?

Problème 2 : chercher une place de parking

Présentation : on est en voiture au départ d'une rue infiniment longue et à sens unique. On doit se rendre à un point d'arrivée située à une certaine distance du point de départ et on cherche à se garer le plus près possible de l'arrivée. À partir d'où doit-on commencer à accepter une place libre ?

Mise en place : au départ on est au numéro 0 de la rue. Pour chaque entier naturel n, il y a une place de parking au numéro n, qui peut être libre avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places se font indépendamment les unes des autres. L'arrivée est au numéro d.

Stratégie : on se donne $s \in [\![0, d]\!]$, et on conduit sans s'arrêter jusqu'au numéro s de la rue. On accepte alors la première place libre à partir du numéro s (inclus).
On note X le numéro de la place trouvée par cette méthode. La distance à l'arrivée est $|X - d|$ et l'espérance $D_s = \mathbf{E}[|X - d|]$ est la distance moyenne à l'arrivée.

1. Loi de X.
   (a) Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$.
   (b) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note A_k l'événement « la place au numéro k est occupée ».
   Pour $n \in X(\Omega)$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction des événements A_k.
   (c) Déterminer la loi de X.
   (d) Vérifier que $X - s + 1$ suit une loi géométrique.
   (e) En déduire l'espérance de X.
2. Calcul de $D_s = \mathbf{E}[|X - d|]$.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $|X - d|$ admet une espérance.
   (b) Établir : $D_s = \sum_{n=s}^{+\infty}(n-d)\mathbf{P}(X = n) - 2\sum_{n=s}^{d}(n-d)\mathbf{P}(X = n)$.
   (c) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, donner la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{N} x^k$ en fonction de N et x, et en déduire une expression de la somme $\sum_{k=0}^{N} kx^k$.
   (d) En déduire : $\sum_{n=s}^{d}(n-d)\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{p} + s - d - 1 - \frac{(1-p)^{d-s+1}}{p}$.
   (e) Montrer finalement : $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.
3. Optimisation.
   (a) Simplifier $D_{s+1} - D_s$ et en déduire que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à $\sigma_p = d + \frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$.
   (b) Montrer que si $p \geq \frac{1}{2}$, D_s est minimale pour $s = d$.
4. Exemple : il y a en moyenne 1 place sur 10 de libre, à quelle distance de l'arrivée doit-on commencer à chercher une place ?
   On utilisera l'encadrement suivant : $2^{-\frac{1}{6}} < 0,9 < 2^{-\frac{1}{7}}$.
5. Simulation informatique.
   L'algorithme ci-dessous permet de simuler la recherche de place.

```
p = input('Probabilité de place libre ? ')
x = rand()
--------
while(--------)
        x = rand()
        k = k+1
end
disp(k,'Place trouvée: ')
disp(abs(k-d),'Distance: ')
```

(a) Laquelle de ces instructions manque à la troisième ligne ?

   i. `k = s-1`

   ii. `k = s`

   iii. `k = s+1`

(b) Compléter la quatrième ligne.

Problème 3 : vendre par petites annonces

Présentation : On met en vente un objet dans les petites annonces d'un journal. On reçoit chaque jour une nouvelle offre (et une seule), que l'on peut accepter ou refuser. Cette décision est définitive : en cas de refus, on ne pourra plus accepter cette offre dans les jours qui suivent ; en cas d'acceptation, on gagne le montant de l'offre et la parution s'arrête. Le nombre d'offres est a priori illimité, mais le journal facture un coût $c > 0$ pour chaque jour de parution. Quand doit-on accepter l'offre proposée ?

Mise en place : On fait les hypothèses suivantes.

— Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note X_k l'offre du k-ième jour. Les variables X_k sont indépendantes et suivent toutes la même loi qu'une variable aléatoire X.

— X est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, et admet une densité notée f. On notera F la fonction de répartition.

— X admet une espérance notée m.

On appelle N le numéro de l'offre acceptée, c'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, et G le gain final que l'on tire de la vente.
On a ainsi $G = X_N - Nc$.

Stratégie : On se donne une valeur $s \in \mathbf{R}_+$, et on choisit d'accepter la première offre supérieure ou égale à s. On cherche une valeur de s qui maximise le gain moyen $\mathbf{E}[G]$.

1. Expliquer pourquoi on peut supposer que s est tel que $F(s) \in [0, 1[$.
   Cette condition sera vérifiée dans toute la suite du sujet.
2. Calcul de l'espérance de G.
   (a) Justifier que N suit une loi géométrique dont on exprimera le paramètre en fonction de $F(s)$.
   Donner l'espérance de N.
   (b) Justifier : $\mathbf{P}(X_N < s) = 0$.
   (c) Soit $x \geq s$.
      i. Justifier : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(X_N > x) \cap (N = n) = (X_n > x) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k < s) \right)$.
      ii. En déduire : $\mathbf{P}(X_N \leq x) = \dfrac{F(x) - F(s)}{1 - F(s)}$.
   (d) Déterminer une densité de X_N.
   (e) Montrer que X_N admet une espérance.
   (f) Montrer que G admet une espérance, donnée par $\mathbf{E}[G] = \dfrac{1}{1 - F(s)} \left(\displaystyle\int_s^{+\infty} x f(x)\, dx - c \right)$.
3. Optimisation.
   On pose $g(s) = \mathbf{E}[G]$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{s \to +\infty} g(s) = -\infty$ et interpréter ce résultat.
   (b) Que vaut $g(0)$? Interpréter la valeur trouvée.
   (c) Montrer que si $c \geq m$, alors $g(s) \leq 0$ pour toute valeur de s.
   On suppose dans toute la suite que $c < m$.
   (d) Montrer que g est dérivable et mettre sa dérivée sous la forme $g'(s) = \dfrac{f(s)h(s)}{(1 - F(s))^2}$, où h est une fonction à préciser.
   (e) Montrer que h est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.
   (f) Montrer que $h(s)$ est négatif pour s suffisamment grand.
   (g) En déduire que h s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}_+$.
   (h) Soit σ un réel positif tel que $h(\sigma) = 0$.
      i. Montrer que g est maximale en σ.
      ii. Montrer que $g(\sigma) = \sigma$.
      iii. En déduire l'unicité de σ.

4. Variations en fonction de c.

   L'espérance de G dépend en fait de s et de c. On la note dorénavant $g(s,c)$. La question précédente prouve qu'à c fixé, $g(s,c)$ est maximale pour une valeur unique que l'on note maintenant σ_c, et qui vérifie $g(\sigma_c, c) = \sigma_c$.

   (a) Soit c et c' deux réels positifs tels que $c \leq c'$.
   Vérifier que $g(s,c) \geq g(s,c')$ pour tout s.

   (b) En déduire $\sigma_c \geq \sigma_{c'}$.

   (c) La fonction $c \mapsto \sigma_c$ est ainsi décroissante. Ce résultat était-il prévisible ?

5. Un exemple : la loi uniforme.

   On suppose que X suit la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ avec a et b réels positifs.

   (a) Calculer $g(s,c)$.

   (b) Montrer qu'à c fixé, $\mathbf{E}[G]$ est maximale lorsque $s = b - \sqrt{2(b-a)c}$.

6. Simulation informatique.

   L'algorithme ci-dessous propose d'expérimenter la stratégie dans le cas où X suit la loi uniforme sur $[a,b]$.
   Compléter les instructions manquantes.

```
n = 0
a = input('Valeur de a:')
b = input('Valeur de b:')
x = rand()
y = --------
while (y < s)
        x = rand()
        y = --------
        --------
end
disp(y-n*c,'Gain : ')
```