ESSEC II - 2010 - VOIE E

Correction proposée par G. Dupont.

Introduction

L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service, etc.) démarré à la date $t = 0$ et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier les propriétés de la date de la première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour toute variable aléatoire Y, on notera $\mathbf{E}[Y]$ sont espérance lorsqu'elle existe.

On adoptera les conventions suivantes. On dira qu'une fonction f continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et continue à droite en 0 est continue sur $\mathbf{R}_+$. En outre, si T est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité f continue sur $\mathbf{R}_+$, sa fonction de répartition $F_T(t) = \mathbf{P}(T \leq t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\, du$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et dérivable à droite sur $\mathbf{R}_+$. On conviendra d'écrire $F_T'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $F_T'(0)$ désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

I : Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre μ ($\mu > 0$) si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre μ.
   (a) Donner l'espérance $\mathbf{E}[X]$ et la variable $\mathbf{V}(X)$.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, X^n admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre $\mathbf{E}\left[X^{n+1}\right]$ et $\mathbf{E}[X^n]$ pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire $\mathbf{E}[X^n]$ pour tout $n > 0$.
   (d) Retrouver la valeur de $\mathbf{V}(X)$ à l'aide de la question précédente.
2. Propriété caractéristique.
   (a) Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.
   Justifier que pour tout réel x positif ou nul, le nombre $\mathbf{P}(X > x)$ est non nul.
   Montrer que pour tous réels positifs x et y,
   $$\mathbf{P}_{(X>x)}(X > x + y) = \mathbf{P}(X > y).$$
   (b) Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbf{R}_+$, et telle que pour tous réels positifs x et y,
   $$\mathbf{P}_{(X>x)}(X > x + y) = \mathbf{P}(X > y).$$
      i. Soit $R(x) = \mathbf{P}(X > x)$. Justifier que $R(x)$ est non nul pour tout réel positif.
      ii. On pose $\mu = f(0)$. Montrer que pour tout x réel positif, on a la relation $R'(x) + \mu R(x) = 0$.
      iii. Calculer la dérivée de $x \mapsto R(x)e^{\mu x}$ sur $\mathbf{R}_+$.
      iv. Déduire que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   (c) Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2.
      i. On pose $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire la densité de la variable aléatoire Y.
      ii. On pose $Z = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z et en déduire la loi de Z.

II : Fiabilité

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur $\mathbf{R}_+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbf{R}_+^*$.

On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur $\mathbf{R}_+$ par

$$R_T(t) = \mathbf{P}\left(T \geq t\right) = \mathbf{P}\left(T > t\right) = 1 - F_T(t),$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

1. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif.
   La dégradation du système sur l'intervalle $[t, t+h]$ est mesurée par la probabilité $\mathbf{P}\left(t \leq T \leq t+h\right)$.
   Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction R_T.
2. Montrer que, pour tout réel t positif ou nul,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\mathbf{P}\left(t \leq T \leq t+h\right)}{h} = f_T(t).$$

3. (a) Justifier que pour tout réel t positif, $R_T(t) > 0$.

   On appelle taux de défaillance la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par le rapport $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$.

   (b) Montrer que $\lambda(t) = \dfrac{d}{dt} \ln\left(\dfrac{1}{R_T(t)}\right)$.

   (c) Déduire l'expression de R_T en fonction de λ à l'aide d'une intégrale.
4. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur $\mathbf{R}_+$, admettant une espérance. On pose $R_Z(t) = \mathbf{P}\left(Z > t\right)$ pour $t \geq 0$.

   (a) Soit v la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $v(t) = tR_Z(t)$.
   Montrer que

$$tg(t) = R_Z(t) - v'(t),$$

   où v' désigne la dérivée de v.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

   (c) En déduire que $\mathbf{E}\left[Z\right] = \displaystyle\int_0^{+\infty} R_Z(t)\ dt$.
5. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé ; le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.
   On a donc, pour tout réel x positif

$$R_{T_t}(x) = \mathbf{P}\left(T_t > x\right) = \mathbf{P}_{(T>t)}(T > t + x).$$

   (a) Montrer que, pour tout réel x positif,

$$R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}.$$

   (b) En déduire que

$$\mathbf{E}\left[T_t\right] = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\ du.$$

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

6. (a) On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ. Déterminer la fiabilité et le faux de défaillance.

   (b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
   Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

(c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
Déterminer la fiabilité du système.

7. Soit $\varphi_{n,\beta}$ la fonction définie par

$$\varphi_{n,\beta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(n-1)!}(\beta t)^{n-1}e^{-\beta t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad t < 0, \end{cases}$$

où $\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

(a) Vérifier que $\varphi_{\eta,\beta}$ est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

(b) On suppose que T admet pour densité la fonction $\varphi_{n,\beta}$. Montrer que la fiabilité à la date t est

$$R_T(t) = e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

8. Soit $\psi_{\eta,\beta}$ la fonction définie par

$$\psi_{\eta,\beta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0, \end{cases}$$

où $\beta \geq 1$, $\eta > 0$.

(a) Vérifier que $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité (loi de Weibull).

(b) On suppose que T a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$. Déterminer la fiabilité $R_T(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t.

(c) Étudier $\lim\limits_{t\to+\infty}\lambda(t)$ en fonction de la valeur de β.

III : Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0, t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.

On notera en particulier que pour $s \leq t$, on a $N_s \leq N_t$.

On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

— $N_0 = 0$ et $0 < \mathbf{P}(N_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$.

— Pour tous réels $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables N_{t_0}, $N_{t_1} - N_{t_0}$, $N_{t_2} - N_{t_1}$, ..., $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).

— Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires).

— $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{\mathbf{P}(N_h > 1)}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geq 0$ et pour tout $s \in [0, 1]$, $G_u(s) = \mathbf{E}\left[s^{N_u}\right]$, avec la convention $0^0 = 1$.

1. (a) Justifier que pour tout $u \geq 0$, $G_u(s)$ existe pour tout $s \in [0, 1]$ et qu'on a, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N_u = k)\,s^k.$$

(b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leq s \leq 1$, on a

$$G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s).$$

2. On fixe s tel que $0 \leq s \leq 1$.

(a) Montrer que $G_1(s) > 0$.

On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geq 0$, $\psi(u) = G_u(s)$.

(b) Montrer que $\psi(k) = e^{-k\theta(s)}$, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

(c) Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

(d) Montrer que si p est un entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi(r) = e^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \dfrac{p}{q}$.

(e) Montrer que pour tout réel positif u, $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$.

(f) En déduire que pour tout $s \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{G_h(s)-1}{h} = -\theta(s)$.

3. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbf{P}(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)(s^k - 1).$$

4. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0.$$

5. (a) En déduire qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha = \displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathbf{P}(N_h = 1)}{h}$ et que pour tout $s \in [0,1]$, $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

(b) En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

6. (a) On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_u = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k.$$

(b) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t\geq 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

7. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$. Comparer les événements $(T > t)$ et $(N_t = 0)$. En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

8. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

(a) Montrer que $\tilde{N}_h$ est une variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle $[t, t+h]$.

(b) Montrer que la famille $(\tilde{N}_h)_{h\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

(c) En déduire que la première panne survenant après la date t se produit suivant une loi exponentielle de paramètre α.

(d) En déduire que le processus de Poissons a la propriété que, pour chaque t donné, le taux de défaillance du système après t est constant.

Solution :

Partie I : Généralités sur la loi exponentielle

1. (a) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu)$, on sait que

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\mu} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{1}{\mu^2}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$. La fonction $x \mapsto x^n \mu e^{-\mu x}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et

$$x^n \mu e^{-mux} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

donc

$$\int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}\, dx \text{ converge.}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}\, dx \text{ converge}$$

et donc

$$\boxed{X^n \text{ admet une espérance.}}$$

En effectuant une IPP, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X^{n+1}\right] &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} \mu e^{-\mu x}\, dx \\
&= \lim_{M:+\infty} \int_0^{M} x^{n+1} \mu e^{-\mu x}\, dx \\
&= \lim_{M:+\infty} \left[-x^{n+1} e^{-\mu x}\right]_0^M + \int_0^M (n+1) x^n e^{-\mu x}\, dx \\
&= \lim_{M:+\infty} -M^{n+1} e^{-\mu M} + (n+1) \int_0^M x^n e^{-\mu x}\, dx \\
&= \frac{n+1}{\mu} \int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}\, dx \\
&= \frac{n+1}{\mu} \mathbf{E}\left[X^n\right].
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}\left[X^{n+1}\right] = \frac{n+1}{\mu} \mathbf{E}\left[X^n\right].}$$

(c) On montre aisément par récurrence sur n à partir de la question précédente que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}\left[X^n\right] = \frac{n!}{\mu^n}.}$$

(d) D'après la formule de Koenig-Huygens, on a

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{2}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}.}$$

2. (a) Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\boxed{\mathbf{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = e^{-\mu x} > 0}$$

et donc, pour tous $x, y \in \mathbf{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(X>x)}(X > x+y) &= \frac{\mathbf{P}(X > x+y, X > x)}{\mathbf{P}(X > x)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(X > x+y)}{\mathbf{P}(X > x)} \qquad (\text{ car } (X > x+y) \subset (X > x)) \\
&= \frac{e^{-\mu(x+y)}}{e^{-\mu x}} \\
&= e^{-\mu y} \\
&= \mathbf{P}(X > y).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbf{R}_+, \quad \mathbf{P}_{(X>x)}(X > x+y) = \mathbf{P}(X > y).}$$

(b) i. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Alors

$$R(x) = \mathbf{P}(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t)\ dt$$

mais f_X est strictement positive sur $\mathbf{R}_+$ donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} f_X(t)\ dt > 0$ et donc

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad R(x) > 0.}$$

ii. Pour tout $x \geq 0$, on a $R(x) = 1 - F_X(x)$ or f_X est continue sur $\mathbf{R}_+$ donc F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et

$$R'(x) = -f_X(x).$$

Par ailleurs, pour $x, y \geq 0$, on a

$$\mathbf{P}_{(X>x)}(X > x+y) = \mathbf{P}(X > y)$$

donc, puisque $(X > x+y) \subset (X > x)$,

$$\frac{\mathbf{P}(X > x+y)}{\mathbf{P}(X > x)} = \mathbf{P}(X > y),$$

ou encore

$$\frac{R(x+y)}{R(x)} = R(y),$$

et donc, en dérivant par rapport à x, on obtient

$$R'(x+y)R(x) - R(x+y)R'(x) = 0.$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient

$$R'(y)R(0) - R(y)R'(0) = 0,$$

c'est-à-dire puisque $R(0) = \mathbf{P}(X > 0) = 1$,

$$R'(y) + f_X(0)R(y) = 0.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{\forall y \geq 0, \quad R'(y) + \mu R(y) = 0.}$$

iii. Soit $h : x \mapsto R(x)e^{\mu x}$. Alors, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} h'(x) &= R'(x)e^{\mu x} + \mu R(x)e^{\mu x} \\ &= e^{\mu x}(R'(x) + \mu R(x)) \\ &= 0 \quad (\text{ d'après la question précédente}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad h'(x) = 0.}$$

iv. La fonction $x \mapsto R(x)e^{\mu x}$ ayant une dérivée nulle sur $\mathbf{R}_+$, elle y est constante. Ainsi, il existe un réel k tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad R(x) = ke^{-\mu x}.$$

Mais puisque $k = R(0) = 1$, il vient, pour tout $x \geq 0$,

$$R(x) = e^{-\mu x}$$

et donc

$$F_X(x) = 1 - R(x) = 1 - e^{-\mu x}.$$

Par ailleurs, X est à valeurs positives donc $F_X(x) = 0$ si $x < 0$. Il s'ensuit que F_X est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(\mu)$ et donc

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu).}$$

3. (a) Soit $Y = \max(X_1, X_2)$. On a $Y(\Omega) \subset \mathbf{R}_+$ donc $F_Y(x) = 0$ si $x < 0$. Si $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}(\max(X_1, X_2) \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq x)\,\mathbf{P}(X_2 \leq x) \\ &= (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x}) \\ &= 1 - e^{-\mu_1 x} - e^{-\mu_2 x} + e^{-(\mu_1+\mu_2)x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\mu_1 x} - e^{-\mu_2 x} + e^{-(\mu_1+\mu_2)x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}}$$

La fonction F_Y ainsi obtenue est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$ donc Y admet pour densité la fonction définie par :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \mu_1 e^{-\mu_1 x} + \mu_2 e^{-\mu_2 x} - (\mu_1 + \mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}}$$

(b) Soit $Z = \min(X_1, X_2)$. On a $Y(\Omega) \subset \mathbf{R}_+$ donc $F_Z(x) = 0$ si $x < 0$. Si $x \geq 0$, on a

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(\min(X_1, X_2) \leq x)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \mathbf{P}\left(\min(X_1, X_2) > x\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(X_1 > x\right)\mathbf{P}\left(X_2 > x\right) \\
&= 1 - (1 - (1 - e^{-\mu_1 x}))(1 - (1 - e^{-\mu_2 x})) \\
&= 1 - e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 x} \\
&= 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)x}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)x} & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{Z \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2).}$$

Partie II : Fiabilité

1. On a

$$\boxed{\mathbf{P}\left(t \leq T \leq t+h\right) = \mathbf{P}\left(T \geq t\right) - \mathbf{P}\left(T > t+h\right) = R_T(t) - R_T(t+h).}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{h:0^+} \frac{\mathbf{P}\left(t \leq T \leq t+h\right)}{h} &= \lim_{h:0^+} \frac{F_T(t+h) - F_T(h)}{h} \\
&= F_T'(t) \\
&= f_T(t),
\end{aligned}$$

car f_T est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
Ainsi,

$$\boxed{\lim_{h:0^+} \frac{\mathbf{P}\left(t \leq T \leq t+h\right)}{h} = f_T(t).}$$

3. (a) Pour tout t positif, on a

$$\begin{aligned}
R_T(t) &= \int_t^{+\infty} f_T(u)\ du \\
&\geq \int_t^{t+1} f_T(u)\ du > 0
\end{aligned}$$

qui est strictement positive car f_T est continue et strictement positive sur $[t, t+1]$. Ainsi,

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad R_T(t) > 0.}$$

(b) On a

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)^2} \times R_T(t)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)} \\
&= \frac{f_T(t)}{R_T(t)} \quad \text{(d'après II.2)} \\
&= \lambda(t).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad \lambda(t) = \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right).}$$

(c) Soit $x \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^x \lambda(t)\ dt &= \int_0^x \left(\ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)\right)'\ dt \\
&= \left[\ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)\right]_0^x \\
&= \ln\left(\frac{1}{R_T(x)}\right) - \ln\left(\frac{1}{R_T(0)}\right)
\end{aligned}$$

mais $R_T(0) = \mathbf{P}(T \geq 0) = 1$ donc

$$\int_0^x \lambda(t)\ dt = \ln\left(\frac{1}{R_T(x)}\right)$$

et donc

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad R_T(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\ dt\right).}$$

4. (a) Pour tout $t \geq 0$, on a $v(t) = tR_Z(t)$ donc

$$\begin{aligned}
v'(t) &= R_Z(t) + tR_Z'(t) \\
&= R_Z(t) - tg(t) \quad \text{(d'après 2)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad tg(t) = R_Z(t) - v'(t).}$$

(b) Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq v(t) &= tR_Z(t) \\
&= t\int_t^{+\infty} g(u)\ du \\
&= \int_t^{+\infty} tg(u)\ du \\
&\leq \int_t^{+\infty} ug(u)\ du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} ug(u)\ du - \int_{-\infty}^{t} g(u)\ du \\
&\xrightarrow[t\to+\infty]{} \mathbf{E}[Z] - \mathbf{E}[Z] = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{v(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z] &= \int_0^{+\infty} tg(t)\ dt \\
&= \lim_{M:+\infty} \int_0^M tg(t)\ dt \\
&= \lim_{M:+\infty} \int_0^M R_Z(t) - v'(t)\ dt \\
&= \lim_{M:+\infty} \int_0^M R_Z(t)\ dt - \int_0^M v'(t)\ dt \\
&= \lim_{M:+\infty} \int_0^M R_Z(t) - v(M) + v(0) \\
&= \int_0^{+\infty} R_Z(t)\ dt \quad \text{(d'après 4.b et car } v(0)=0\text{).}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\mathbf{E}[Z] = \int_0^{+\infty} R_Z(t)\ dt.}$$

5. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé ; le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.

   On a donc, pour tout réel x positif

$$R_{T_t}(x) = \mathbf{P}(T_t > x) = \mathbf{P}_{(T>t)}(T > t + x).$$

(a) Pour tout réel x positif, on a

$$\begin{aligned}
R_{T_t}(x) &= \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(T > t+x, T > t)}{\mathbf{P}(T > t)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(T > t+x)}{\mathbf{P}(T > t)} \quad \text{(car } x \geq 0\text{)} \\
&= \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}.
\end{aligned}$$

On a donc bien,

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T_t] &= \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)\ dx \quad \text{(d'après 4.c)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}\ dx \quad \text{(d'après 5.a)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x)\ dx$$
$$= \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)\ du \quad \text{(en posant } u = x+t\text{)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\left[T_t\right] = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(x)\ dx.}$$

6. (a) Si $T \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu)$, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\boxed{R_T(t) = 1 - F_T(t) = e^{-\mu t}}$$

et

$$\boxed{\lambda(t) = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu.}$$

Remarque : On observe que le taux de défaillance est indépendant du temps, ce qui est cohérent avec le fait qu'une loi exponentielle est sans vieillissement.

(b) Les T_i étant indépendantes, il suit de I.3.b que $T = \min(T_1, T_2) \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$. Ainsi, il suit de la question précédente que, pour tout $t \geq 0$,

$$\boxed{R_T(t) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \mu_1 + \mu_2.}$$

(c) Les T_i étant indépendantes, il suit de I.3.a que, pour tout $t \geq 0$,

$$\boxed{R_T(t) = e^{-\mu_1 t} + e^{-\mu_2 t} - e^{-(\mu_1+\mu_2)t}.}$$

7. (a) Pour tout $\varphi_{n,\beta}$ est clairement positive sur $\mathbf{R}$ et continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ et

$$\varphi_{n,\beta}(x) \underset{x:+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(x)\ dx$ converge. Par ailleurs, en posant $u = \beta t$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\ dt &= \frac{\beta}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t}\ dt \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\beta t}\ dt \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{E}\left[T^{n-1}\right] \qquad \text{avec } T \rightsquigarrow \mathcal{E}(\beta) \\
&= \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\varphi_{n,\beta} \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

(b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que, pour $t \geq 0$, on a

$$\int_t^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(x)\ dx = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.$$

Si $n = 1$, on a,

$$\begin{aligned}
\int_t^{+\infty} \varphi_{1,\beta}(x)\ dx &= \int_t^{+\infty} \beta e^{-\beta x}\ dx \\
&= \lim_{M:+\infty} \int_t^{M} \beta e^{-\beta x}\ dx \\
&= \lim_{M:+\infty} \left[-e^{-\beta x}\right]_t^M \\
&= e^{-\beta t}
\end{aligned}$$

et la propriété est bien vérifiée pour $n = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ telle que la propriété soit vérifiée, on a alors (en abusant légèrement des notations pour alléger),

$$\begin{aligned}
\int_t^{+\infty} \varphi_{n+1,\beta}(x)\ dx &= \int_t^{+\infty} \frac{\beta}{n!}(\beta x)^n e^{-\beta x}\ dx \\
&= \frac{1}{n!}\int_{\beta t}^{+\infty} u^n e^{-u}\ du \quad \text{(en posant } u = \beta x) \\
&= \frac{1}{n!}\left[-u^n e^{-u}\right]_t^{+\infty} + \frac{1}{n!}\int_{\beta t}^{+\infty} n u^{n-1} e^{-u}\ du \quad \text{(IPP)} \\
&= \frac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{\beta t}^{+\infty} e^{n-1} e^{-u}\ du \\
&= \frac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!} + \int_t^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(x)\ dx \quad \text{(en posant } x = \frac{u}{\beta}) \\
&= \frac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!} + e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\beta t)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \geq 0, \quad \int_t^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(x)\ dx = e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}.}$$

8. (a) $\psi_{\beta,\eta}$ est clairement positive sur $\mathbf{R}$ et continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$. En outre,

$$\psi_{\eta,\beta}(x) = \underset{x:+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_{\eta,\beta}(x)\ dx$ converge.

En outre,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\eta,\beta}(x)\ dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}\ dt \\
&= \int_0^{+\infty} \beta e^{\beta-1} e^{-u^\beta}\ du \quad \text{(en posant } u=\frac{t}{\eta}) \\
&= \left[-e^{-u^\beta}\right]_0^{+\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\psi_{\beta,\eta} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

(b) Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
R_T(t) &= \int_t^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(x)\ dx \\
&= \int_{\frac{t}{\eta}}^{+\infty} \beta u^{\beta-1} e^{-u^\beta}\ du \\
&= \left[-e^{-u^\beta}\right]_{\frac{t}{\eta}}^{+\infty} \\
&= e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad R_T(t) = e^{-\frac{t}{\eta}^\beta}}$$

et donc

$$\boxed{\lambda(t) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}.}$$

(c) Puisque $\beta \geq 1$, on a $\beta - 1 \geq 0$ et donc

$$\boxed{\lambda(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty.}$$

Partie III : Système Poissonien

1. (a) Soit $u \geq 0$ et $s \in [0,1]$. Alors

$$0 \leq |s^{N_u}| \leq 1$$

et donc s^{N_u} admet une espérance et, d'après le théorème de transfert,

$$\boxed{G_u(s) = \mathbf{E}\left[s^{N_u}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbf{P}\left(N_u = k\right).}$$

(b) Soient u et v positifs ou nuls et $s \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_{u+v}=k\right) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_u=i, N_{u+v}=k\right) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_u=i, N_{u+v}-N_u=k-i\right) s^k \end{aligned}$$

mais $N_u = N_u - N_0$ et $N_{u+v} - N_u$ sont indépendantes d'après l'hypothèse des accroissements indépendants et donc

$$G_{u+v}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_u=i\right)\mathbf{P}\left(N_{u+v}-N_u=k-i\right) s^k.$$

Mais, par hypothèse, $N_v = N_{u+v-u}$ suit la même loi que $N_{u+v} - N_u$ et donc

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_u=i\right)\mathbf{P}\left(N_v=k-i\right) s^k. \\ &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_u=i\right)\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_v=j\right)\right) \\ &= G_u(s)G_v(s). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall u, v \geq 0, \forall s \in [0,1], \quad G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s).}$$

2. On fixe s tel que $0 \leq s \leq 1$.

(a) On a

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \mathbf{E}\left[s^{N_1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_1=k\right) s^k \\ &= \mathbf{P}\left(N_1=0\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_1=k\right) s^k \end{aligned}$$

mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_1=k\right) s^k$ est positif comme somme de termes positif et $\mathbf{P}\left(N_1=0\right) > 0$ par hypothèse. Ainsi,

$$\boxed{G_1(s) > 0.}$$

(b) Soit $k \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \psi(k) &= G_k(s) \\ &= (G_1(s))^k \\ &= (e^{-\theta(s)})^k \\ &= e^{-k\theta(s)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad \psi(k) = e^{-k\theta(s)}.}$$

(c) Soit q un entier naturel non nul. On a

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{q}\right)^q &= G_{\frac{1}{q}}(s)^q \\ &= G_1(s) \\ &= e^{-\theta(s)} \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall q \in \mathbf{N}^*, \quad \psi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.}$$

(d) Soit $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}^*$ et $r = \dfrac{p}{q}$. Alors

$$\begin{aligned} \psi(r) &= G_{\frac{p}{q}}(s) \\ &= (G_{\frac{1}{q}}(s))^p \\ &= (e^{-\frac{1}{q}\theta(s)})^p \\ &= e^{-\frac{p}{q}\theta(s)} \\ &= e^{-r\theta(s)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall r \in \mathbf{Q}_+, \quad \psi(r) = e^{-r\theta(s)}.}$$

(e) Soit $u \in \mathbf{R}_+$ et soient $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des suites de rationnels telles que

$$r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u^- \quad \text{et} \quad r'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u^+$$

(on peut par exemple prendre pour r_n l'approximation décimale de u obtenue en tronquant à la n-ème décimale, et r'_n obtenue en ajoutant 1 à cette dernière décimale).
Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} r_n \leq u \leq r'_n \quad &\Rightarrow \quad N_{r_n} \leq N_u \leq N_{r'_n} \\ &\Rightarrow \quad s^{N_{r_n}} \leq s^{N_u} \leq s^{N_{r'_n}} \\ &\Rightarrow \quad G_{r_n}(s) \leq G_u(s) \leq G_{r'_n}(s) \\ &\Rightarrow \quad \psi(r_n) \leq \psi(u) \leq \psi(r'_n) \\ &\Rightarrow \quad e^{-r_n\theta(s)} \leq \psi(u) \leq e^{-r'_n\theta(s)}. \end{aligned}$$

En passant à la limite en n, par continuité de l'exponentielle, théorème d'encadrement donne

$$\psi(u) = e^{-u\theta(s)}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall u \in \mathbf{R}_+, \quad \psi(u) = e^{-u\theta(s)}.}$$

(f) Soit $s \in [0,1]$ et $h > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{G_h(s)-1}{h} &= \frac{\psi(h)-1}{h} \\
&= \frac{e^{-h\theta(s)} - e^{-0}}{h-0} \\
&= \frac{g(h)-g(0)}{h-0} \\
&\xrightarrow[h\to 0]{} g'(0),
\end{aligned}$$

où $g : x \mapsto e^{-x\theta(s)}$ est dérivable en 0 et $g'(0) = -\theta(s)$ de sorte que

$$\boxed{\frac{G_h(s)-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\theta(s).}$$

3. Pour tout $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
G_h(s) - 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right) s^k - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)\left(s^k - 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left(N_h = 1\right)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)\left(s^k - 1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall s \in [0,1], \quad G_h(s) - 1 = \mathbf{P}\left(N_h = 1\right)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)\left(s^k - 1\right).}$$

4. Soit $s \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)\left(s^k - 1\right)}{h}\right| &\leq \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)}{h}\left|s^k - 1\right| \\
&\leq \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)}{h} \quad (\text{car } |s^k - 1| \leq 1) \\
&= \frac{\mathbf{P}\left(N_h > 1\right)}{h} \\
&\xrightarrow[h\to 0^+]{} 0 \quad (\text{par hypothèse}).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)\left(s^k - 1\right)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0.}$$

5. (a) D'après 2.f, on a

$$\frac{G_h(s)-1}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -\theta(s)$$

mais, d'après 3,

$$\frac{G_h(s)-1}{h} = \frac{\mathbf{P}\left(N_h=1\right)(s-1)}{h} + \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h=k\right)\left(s^k-1\right)}{h}$$

et donc, d'après 4,

$$\frac{\mathbf{P}\left(N_h=1\right)(s-1)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -\theta(s)$$

et donc

$$\frac{\mathbf{P}\left(N_h=1\right)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -\frac{\theta(s)}{s-1}.$$

Ainsi, si on pose

$$\boxed{\alpha = -\frac{\theta(s)}{s-1},}$$

on a

$$\boxed{\frac{\mathbf{P}\left(N_h=1\right)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \alpha \quad \text{et} \quad \theta(s) = \alpha(1-s).}$$

Remarque : L'identité $\alpha = \lim\limits_{h:0^+} \dfrac{\mathbf{P}\left(N_h=1\right)}{h}$ montre que α est indépendant de s.

(b) On a

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\theta(0)}{0-1}\\ &= \theta(0)\\ &= -\ln G_1(0)\\ &= -\ln \mathbf{E}\left[0^{N_1}\right]\\ &= -\ln \mathbf{P}\left(N_1=0\right)\end{aligned}$$

mais $\mathbf{P}\left(N_1=0\right) \in]0,1[$ par hypothèse donc $\ln(\mathbf{P}\left(N_1=0\right)) < 0$ et donc

$$\boxed{\alpha > 0.}$$

6. (a) On fixe un temps $u>0$. Soit $s \in [0,1]$. D'après le théorème de transfert, on a

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_u=k\right) s^k$$

mais

$$\begin{aligned}G_u(s) &= \psi(u)\\ &= e^{-u\theta(s)}\\ &= e^{-u(1-s)\alpha}\\ &= e^{-u\alpha}e^{us\alpha}\\ &= e^{-u\alpha}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(us\alpha)^k}{k!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-u\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u\alpha)^k}{k!} s^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{e^{-u\alpha}(u\alpha)^k}{k!} \right] s^k
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\boxed{G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_u = k\right) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{e^{-u\alpha}(u\alpha)^k}{k!} \right] s^k.}
$$

(b) Si les sommes en 6.a étaient finies, on pourrait faire une simple identification des coefficients. Mais les sommes étant infinies, on n'est pas à strictement parler dans ce cadre. On invoque alors un résultat classique (mais encore une fois hors-programme) qui dit que si deux séries entières coïncident sur un voisinage alors leurs coefficients sont égaux. Pour mémoire, la démonstration se fait par récurrence sur l'indice du coefficient en dérivant k fois l'identité et en évaluant en 0. Si on applique ce principe à l'identité trouvée en 6.a, on a

$$
\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}\left(N_u = k\right) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}
$$

et donc

$$
\boxed{N_u \rightsquigarrow \mathcal{P}(\alpha u).}
$$

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t \geq 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

7. Pour $t < 0$, on a $F_T(t) = 0$ car T est à valeurs positives.
   Pour tout $t > 0$, on a $(T > t) = (N_t = 0)$ donc

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= 1 - \mathbf{P}\left(T > t\right) \\
&= 1 - \mathbf{P}\left(N_t = 0\right) \\
&= 1 - e^{-\alpha t}.
\end{aligned}
$$

   On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(\alpha)$ et donc

$$
\boxed{T \rightsquigarrow \mathcal{E}(\alpha).}
$$

8. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.
   (a) $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ représente la différence entre nombre de pannes arrivé à jusqu'à $t + h$ et de celui arrivé jusqu'à t. Ainsi, $\tilde{N}_h$ représente bien le nombre de pannes survenues dans l'intervalle $[t, t+h]$.
   (b) On $\tilde{N}_0 = N_t - N_t = 0$ et, pour tout $h > 0$, $\mathbf{P}\left(\tilde{N}_h = 0\right) = \mathbf{P}\left(N_{t+h} - N_t = 0\right) = \mathbf{P}\left(N_h = 0\right) \in]0, 1[$. Par ailleurs, pour tous réels $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, on a $\tilde{N}_{t_0} = N_{t+t_0} - N_t$ et , pour $i \geq 1$, $\tilde{N}_{t_i} = \tilde{N}_{t_i} - \tilde{N}_{t_{i-1}} = N_{t+t_i} - N_t - (N_{t+t_{i-1}} - N_t) = N_{t+t_i} - N_{t+t_{i-1}}$ de sorte que les accroissements sont bien indépendants puisque $(N_t)_t$ est un processus de Poisson. On procède de même pour les accroissements stationnaires.
   Enfin,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\tilde{N}_h > 1\right) &= \mathbf{P}\left(N_{t+h} - N_t > 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left(N_h > 1\right) \quad \text{(accroissements stationnaires).}
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\frac{\mathbf{P}\left(\tilde{N}_h > 1\right)}{h} = \frac{\mathbf{P}\left(N_h > 1\right)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0,$$

puisque $(N_t)_t$ est un processus de Poisson.

(c) En appliquant la propriété établie en 7 au processus $(\tilde{N}_h)_{h\geq 0}$, la date de la première panne après t suit une loi $\mathcal{E}(\alpha)$.

(d) D'après 8.c, pour tout $t \geq 0$, la loi de la date de la première panne après t est $\mathcal{E}(\alpha)$, qui est indépendante de t. Ainsi, le taux de défaillance est constant, et il suit de II.6.a qu'il est égal à α.

□