Agrégation Interne de Mathématiques 2019
Composition 2

Éléments de correction proposés par G. Dupont

Version du 8 avril 2019.

***

Notations de la correction

On identifie $\mathbf{R}[X]$ avec l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles. En particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note $X^k : x \mapsto x^k$.

Partie I : Polynômes orthogonaux d'Hermite

1. (a) Soit $P, Q \in \mathbf{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$ donc intégrable sur tout segment. Par ailleurs,
$$x^2|P(x)Q(x)e^{-x^2}| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$$
donc
$$|P(x)Q(x)e^{-x^2}| = \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
Il suit alors des intégrales de Riemann et du théorème de comparaison pour les intégrales impropres que les intégrales
$$\int_{-\infty}^{-1} |P(x)Q(x)e^{-x^2}|\, dx \quad \text{et} \quad \int_{1}^{+\infty} |P(x)Q(x)e^{-x^2}|\, dx$$
convergent et donc que
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |P(x)Q(x)e^{-x^2}|\, dx \text{ converge.}}$$

   (b) L'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est bilinéaire symétrique par bilinéarité et symétrie du produit dans $\mathbf{R}$ et par linéarité de l'intégrale.
Par ailleurs, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on a
$$\langle P, P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)^2 e^{-x^2}\, dx$$
mais $x \mapsto P(x)^2e^{-x^2}$ est une fonction positive de sorte que son intégrale sur $\mathbf{R}$ est positive. En outre, puisqu'elle est continue et positive, son intégrale est nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle sur $\mathbf{R}$, autrement dit, si P est nul.
Ainsi,
$$\boxed{\langle -, -\rangle \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbf{R}[X].}$$

2. Il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(1, X, X^2, \ldots)$.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on pose $h : x \mapsto e^{-x^2}$. On a alors

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= 2xe^{x^2}h^{(n)}(x) + e^{x^2}h^{(n+1)}(x) \\ &= 2xH_n(x) + H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) + H_n'(x).}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $H_0(x) = 1$ et, en utilisant la relation établie en 3.a, on a

$$\boxed{H_1(x) = -2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad \text{et} \quad H_3(x) = -8x^3 + 12x.}$$

(c) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que $\deg H_n = n$.
C'est évidemment vrai pour $n = 0$. Soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $\deg H_n = n$. Alors, dans $\mathbf{R}[X]$, on a la relation

$$H_{n+1} = -2XH_n + H_n'$$

mais $\deg XH_n = \deg H_n + 1 = n + 1$ et $\deg H_n' \leq \deg H_n < n + 1$ de sorte que $\deg(-2XH_n + H_n') = n + 1$, ce qui prouve l'hérédité. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \deg(H_n) = n.}$$

(d) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que le coefficient dominant de H_n est $(-2)^n$. C'est vrai pour $n = 0$. Soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que le coefficient dominant de H_n est $(-2)^n$. Alors, dans $\mathbf{R}[X]$, on a la relation

$$H_{n+1} = -2XH_n + H_n'$$

et, comme observé à la question précédente, $\deg(H_n') < \deg(XH_n)$ de sorte que le coefficient dominant de H_{n+1} est celui de $-2XH_n$ qui est donc égal à $(-2) \times (-2)^n = (-2)^{n+1}$, d'où l'hérédité.
Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \text{ le coefficient dominant de } H_n \text{ est } (-2)^n.}$$

4. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que H_n est orthogonal à chacun des X^k, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Si $n = 1$,

$$\langle H_1, 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h'(x)\, dx = \left[e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Soit maintenant $n \in \mathbf{N}^*$ tel que la propriété au rang $n - 1$ est vérifiée. Alors,

$$\begin{aligned} \left\langle H_n, X^k \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k H_n(x) e^{-x^2}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k h^{(n)}(x)\, dx \\ &= \left[x^k h^{(n-1)}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} h^{(n-1)}(x)\, dx \\ &= -k \left\langle H_{n-1}, X^{k-1} \right\rangle \\ &= 0 \quad \text{(par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, H_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]^{\perp}$$

et donc, puisque chaque H_n est de degré n, on a bien

$$\boxed{\langle H_n, H_m \rangle = 0 \text{ si } m \neq n.}$$

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $n = 0$, on a $Q_0 \in R_0[X]$ et $H_0 \in \mathbf{R}_0[X]$ mais $\dim \mathbf{R}_0[X] = 1$ de sorte que Q_0 et H_0 sont colinéaires. Si $n \in \mathbf{N}^*$, alors puisque les familles $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(H_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sont orthogonales, $Q_n \in \mathbf{R}_n[X] \cap \mathbf{R}_{n-1}[X]^\perp$ et $H_n \in \mathbf{R}_n[X] \cap \mathbf{R}_{n-1}[X]^\perp$ mais $\mathbf{R}_n[X] \cap R_{n-1}[X]^\perp$ est égal à l'orthogonal de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ pour le produit scalaire induit sur $\mathbf{R}_n[X]$, c'est donc un espace de dimension 1. Il s'ensuit que Q_n et H_n sont sur la même droite, ils sont donc colinéaires.
   On a donc montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{R}_k[X] \cap \mathbf{R}_{k-1}[X]^\perp = \mathrm{Vect}(H_k).}$$

6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $H_n' \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ et, pour tout $k < n-1$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle H_n', X^k \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n'(x) x^k e^{-x^2}\, dx \\
&= \Big[H_n(x) x^k e^{-x^2} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)(kx^{k-1} - 2x^{k+1}) e^{-x^2}\, dx \\
&= 0 - \left\langle H_n, kX^{k-1} - 2X^{k+1} \right\rangle \\
&= 0 \quad (\text{car } kX^{k-1} - 2X^{k+1} \in \mathbf{R}_{n-1}[X]).
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$H_n' \in \mathbf{R}_{n-1}[X] \cap \mathbf{R}_{n-2}[X]^\perp = \mathrm{Vect}(H_{n-1}).$$

   et donc,

$$\boxed{\exists \alpha_n \in \mathbf{R}, \quad H_n' = \alpha_n H_{n-1}.}$$

   En outre, puisque le coefficient dominant de H_n est $(-2)^n$ d'après 3.d, il vient que le coefficient dominant de H_n' est $n(-2)^n$. Le coefficient dominant de H_{n-1} étant égal à $(-2)^{n-1}$, il vient

$$n(-2)^n = \alpha_n (-2)^{n-1}.$$

   Autrement dit,

$$\boxed{\alpha_n = -2n.}$$

7. Si $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$H_n' = -2nH_{n-1}$$

   donc

$$\begin{aligned}
H_n'' &= -2nH_{n-1}' \\
&= -2n(H_n + 2XH_{n-1}) \\
&= -2nH_n + 2X(-2nH_{n-1}) \\
&= -2nH_n + 2XH_n'
\end{aligned}$$

   et donc

$$\boxed{H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0.}$$

   et H_n est bien solution de l'équation différentielle (E_n).
   Pour $n = 0$, on a $H_0 = 1$ donc $H_0'' - 2XH_0' + 2nH_0 = 0$ de sorte que (E_n) est là aussi vérifiée.
8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après 3.a et 6, on a

$$H_n' = H_{n+1} + 2XH_n \quad \text{et} \quad H_n' = -2nH_{n-1}$$

   donc

$$H_{n+1} + 2XH_n = -2nH_{n-1}$$

   et donc

$$\boxed{H_{n+1} + 2XH_n + 2nH_{n-1} = 0.}$$

9. Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que H_n est de la parité de n.
La propriété est clairement vérifiée pour $n = 0$ et 1 d'après les expressions trouvées en 3.b.
Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après 8, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

et donc

$$H_{n+1}(-x) = 2xH_n(-x) - 2nH_{n-1}(-x).$$

Si $n+1$ est pair, n est impair et $n-1$ est pair de sorte que, par hypothèse de récurrence,

$$H_{n+1}(-x) = -2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = H_{n+1}(x).$$

Si n est impair, n est pair et $n-1$ est impair de sorte que, par hypothèse de récurrence,

$$H_{n+1}(-x) = 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = -H_{n+1}(x).$$

Dans tous les cas, la propriété est héréditaire et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ H_n \text{ est de la parité de } n.}$$

10. Soient $x_1, \dots, x_p$ les racines distinctes de multiplicité impaire de H_n. Si $p = n$, alors H_n admet n racines distinctes.
Supposons maintenant $p \leq n-1$ et posons $L = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - x_i) \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$. On a alors

$$\langle H_n, L\rangle = 0$$

mais, par définition,

$$\langle H_n, L\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)L(x)e^{-x^2}\ dx$$

et, par construction de L, H_nL est un produit monômes à une puissance paire et de facteurs irréductibles de degré 2. Il s'ensuit que H_nL est de signe constant sur $\mathbf{R}$ et donc que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)L(x)e^{-x^2}\ dx$ ne peut s'annuler que si H_nL est nulle, une contradiction. Il s'ensuit que

$$\boxed{H_n \text{ admet } n \text{ racines distinctes.}}$$

Partie II : Quelques résultats sur la fonction Γ

11. Pour tout $x > 0$, une IPP (justifiée par la convergence des expressions considérées aux bornes) donne

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\ dt\\ &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\ dt\\ &= x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt\\ &= x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

12. Soit $h > 0$. D'après la relation fonctionnelle, on a

$$\Gamma(1+h) = h\Gamma(h)$$

et donc

$$\Gamma(h) = \frac{\Gamma(1+h)}{h}.$$

La fonction Γ étant continue sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $\Gamma(1+h) \underset{h:0^+}{\sim} \Gamma(1) = 0! = 1$ et donc

$$\boxed{\Gamma(h) \underset{h:0^+}{\sim} \frac{1}{h}.}$$

13. Pour tout $x > 0$, on a la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En dérivant, on obtient donc

$$\Gamma'(x+1) = \Gamma(x) + x\Gamma'(x)$$

et donc

$$\Gamma'(x) = \frac{1}{x}\left(\Gamma'(x+1) - \Gamma(x)\right).$$

La fonction Γ' étant continue sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $\Gamma'(x+1) \underset{x\to 0^+}{\sim} \Gamma'(1)$ et donc, avec l'équivalent trouvé à la question précédente :

$$\Gamma'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}\left(\Gamma'(1) - \frac{1}{x}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x:0^+} \Gamma'(x) = -\infty.}$$

Pour la limite en $+\infty$, on commence par observer que, pour tout $x > 0$,

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t}\ dt > 0.$$

Ainsi, Γ' est strictement croissante.
En outre, $\Gamma(2) = \Gamma(1)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$. Alors, pour tout $x > x_0$, $\Gamma'(x) > 0$. En particulier, Γ' est positive sur $[2, +\infty[$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $\Gamma'(n) > 0$ et donc

$$\Gamma'(n+1) = \Gamma(n) + n\Gamma'(n) > \Gamma(n) = (n-1)! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\lim_{x:+\infty} \Gamma'(x) = +\infty.}$$

14. Soit $x \in D_\Gamma$. Puisque x n'est pas entier, on a

$$\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$$

donc

$$0 < x - \lfloor x \rfloor < 1.$$

Pour alléger les notations, on note $k = -\lfloor x \rfloor \geq 0$. Pour que la relation fonctionnelle soit satisfaite, il faut et il suffit de poser

$$\boxed{\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{(x+k-1)(x+k-2)\cdots(x+1)x}.}$$

15. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $x \to -n^+$, on pose $x = -n + h$, avec $h \to 0^+$. On a alors $\lfloor x \rfloor = -n$ et $x + n = h$. Alors, en reprenant l'expression précédente, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(h)}{(x+n-1)\cdots(x+1)x} \\
&= \frac{\Gamma(h)}{(h-1)(h-2)\cdots(h-n)} \\
&\underset{h:0^+}{\sim} \frac{1}{h(h-1)\cdots(h-n)} \\
&\underset{h:0^+}{\sim} \frac{(-1)^n}{n!h}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall h > 0, \quad \Gamma(-n+h) \underset{h:0^+}{\sim} \frac{(-1)^n}{n!h}.}$$

Si $x \to n^-$, on écrit $x = -n - h$ avec $h > 0$ de sorte que $\lfloor x \rfloor = -n - 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \frac{\Gamma(1-h)}{(x+n)\cdots(x+1)x} \\
&= \frac{\Gamma(1-h)}{(-h)(-h-1)\cdots(-h-n)} \\
&\underset{h:0^+}{\sim} \frac{\Gamma(1)}{(-1)^{n+1}h(h+1)\cdots(h+n)} \\
&\underset{h:0^+}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{h(h+1)\cdots(h+n)} \\
&\underset{h:0^+}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{n!h}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall h > 0, \quad \Gamma(-n-h) \underset{h:0^+}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{n!h}.}$$

(b) On a déjà observé que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \Gamma''(x) > 0$$

de sorte que

$$\boxed{\Gamma \text{ est strictement convexe sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

Ainsi, Γ admet un minimum strict si et seulement si elle admet un point critique et ce minimum est alors atteint en ce point critique.
Par ailleurs, on a déjà observé à la question 13 que Γ' s'annule en $x_0 \in]1, 2[$. Ainsi,

$$\boxed{\Gamma \text{ admet un minimum strict en } x_0 \in]1, 2[.}$$

On obtient ainsi le tableau de variations suivant :

x	0		x_0		3
$\Gamma'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Γ	|| $+\infty$	$\searrow$	$\Gamma(x_0)$	$\nearrow$	2

(c) On commence par observer que le prolongement de Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun des intervalles de D_Γ. Regardons les limites au bornes de ces intervalles. Soit donc $n \in \mathbf{N}$. D'après l'étude menée en 14.b, on a

$$\lim_{x:-n^+} \Gamma(x) = \lim_{h:0^+} \frac{(-1)^n}{n!h} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$\lim_{x:-n^-} \Gamma(x) = \lim_{h:0^+} \frac{(-1)^{n+1}}{n!h} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ est impair,} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ est pair.} \end{cases}$$

On a donc des asymptotes verticales en tout point $x = -n$, avec $n \in \mathbf{N}$. L'énoncé nous demandant de tracer l'allure de la courbe sans dresser le tableau de variations, nous pouvons donc tracer le graphique suivant.

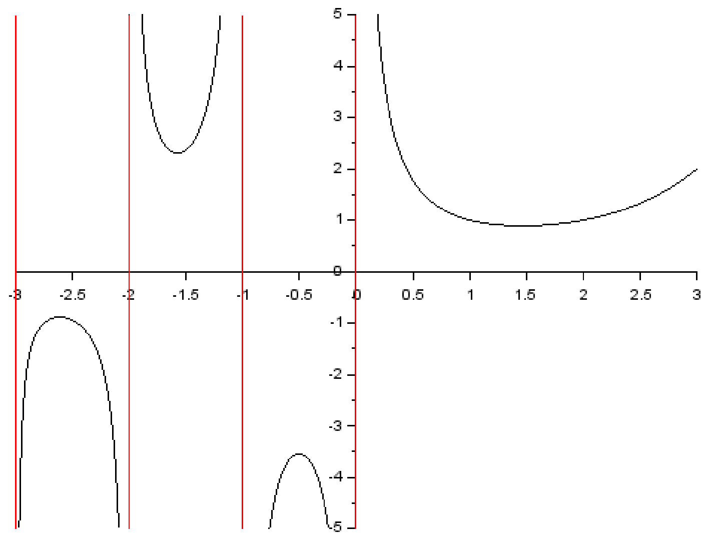

FIGURE 1 – Graphe de la fonction Γ sur $]-3,3[$ (obtenu avec Scilab).

16. (a) Soient $x, y > 0$. La fonction $f : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$. En outre,

$$f(t) \underset{t:0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable au voisinage de 0 d'après le critère de Riemann. Ainsi, il suit du théorème de comparaison que f est intégrable au voisinage de 0.
De même,

$$f(t) \underset{t:1}{\sim} (1-t)^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$$

mais $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}$ est intégrable au voisinage de 1 d'après le critère de Riemann. Ainsi, il suit du théorème de comparaison que f est aussi intégrable au voisinage de 1.
En conclusion,

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \text{ est bien définie.}}$$

(b) Soient $x, y > 0$. On a, d'après le théorème de Fubini,

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\, du\right)\left(\int_0^{+\infty} v^{y-1}e^{-v}\, dv\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{x-1} v^{y-1} e^{-(u+v)}\ du\ dv.$$

On considère alors l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \\ (z,t) & \mapsto & (zt, z(1-t)) \end{array} \right.$$

qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que, pour tout $(z,y) \in \mathbf{R}_+^* \times [0,1]$, $|\det J(\Phi)(z,t)| = z$ et donc, en effectuant le changement de variable $(u,v) = \Phi(z,t)$ puis en appliquant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 (zt)^{x-1} (z(1-t))^{y-1} e^{-z} z\ dt\ dz \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^1 z^{x+y-1} t^{x-1} (1-t)^{y-1} e^{-z}\ dt\ dz \\
&= \left(\int_0^{+\infty} z^{x+y-1} e^{-z}\ dz \right) \left(\int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\ dt \right) \\
&= \Gamma(x+y) B(x,y).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.}$$

(c) Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
B(x,x) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{x-1}\ dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2} - u \right)^{x-1} \left(\frac{1}{2} + u \right)^{x-1}\ du \quad \left(\text{avec } u = \frac{1}{2} - t \right) \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{4} - u^2 \right)^{x-1}\ du \\
&= \frac{1}{4^{x-1}} \int_{-1/2}^{1/2} \left(1 - 4u^2 \right)^{x-1}\ du \\
&= \frac{2}{4^{x-1}} \int_0^{1/2} \left(1 - 4u^2 \right)^{x-1}\ du \quad \text{(par parité)} \\
&= \frac{2}{4^{x-1}} \int_0^1 (1-v)^{x-1} \frac{1}{4\sqrt{v}}\ dv \quad (\text{avec } v = 4u^2) \\
&= \frac{2}{4^x} \int_0^1 (1-v)^{x-1} v^{-1/2}\ dv \\
&= \frac{1}{2^{2x-1}} B\left(\frac{1}{2}, x \right).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à observer que B est symétrique (appliquer le changement de variable $u = 1-t$) pour obtenir :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad B(x,x) = \frac{1}{2^{2x-1}} B\left(x, \frac{1}{2} \right).}$$

(d) Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(2x) &= \Gamma(x+x) \\
&= \frac{\Gamma(x)^2}{B(x,x)} \quad \text{(d'après 16.b)} \\
&= \Gamma(x)^2 \frac{2^{2x-1}}{B(x,1/2)} \quad \text{(d'après 16.c)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma(x)^2 \frac{2^{2x-1}\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x)\Gamma(1/2)} \quad \text{(d'après 16.b)} \\
&= 2^{2x-1} \frac{\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(1/2)}.
\end{aligned}
$$

Or, en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, on a

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1/2) &= \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} \, dt \\
&= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du \\
&= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\boxed{\forall x > 0, \quad \Gamma(2x) = \sqrt{\pi}.}
$$