Exercice 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Partie A

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
   (b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.
   (c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
   (d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Soient $e'_1 = (-1, -1, 1)$, $e'_2 = (2, -1, 1)$ et $e'_3 = (-1, 2, 1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
   (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
3. On pose :

$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
   (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire que M est inversible.
   (d) À l'aide de la question A.a, calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
   (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
   Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

1. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.
   (b) Montrer que $g(e'_2) - ae'_2$ appartient aussi au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.
   (c) Montrer que $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = ae'_2 + be'_1$.
   En déduire que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f.
   (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.
3. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

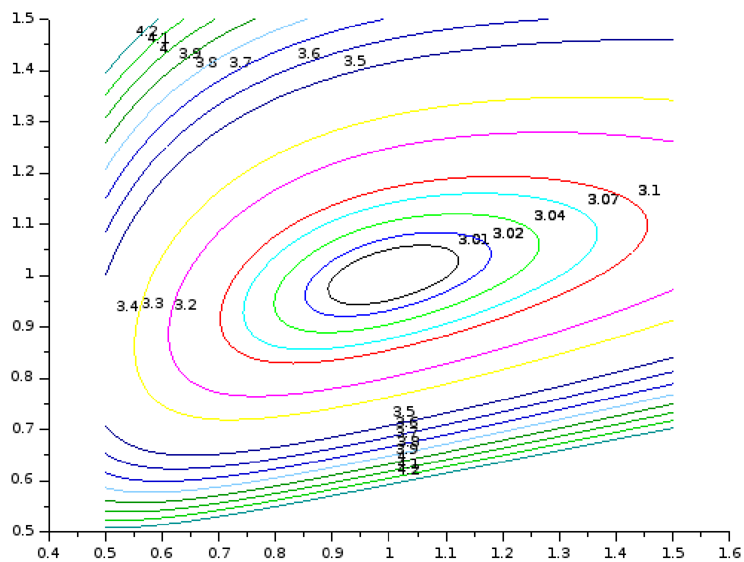
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

Partie A

1. On utilise `Scilab` pour tracer des lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique suivant quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

2. (a) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.

   (c) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$.

   (d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum ou un maximum, et donner sa valeur.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $h(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}.$$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $h_{n+1}(x) \geq 4$.

(c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.

(b) En supposant $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n:+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

(c) Déterminer la limite de (v_n).

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ v_n \leq 3$.

(b) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbf{R}_+^*$ en entrée.

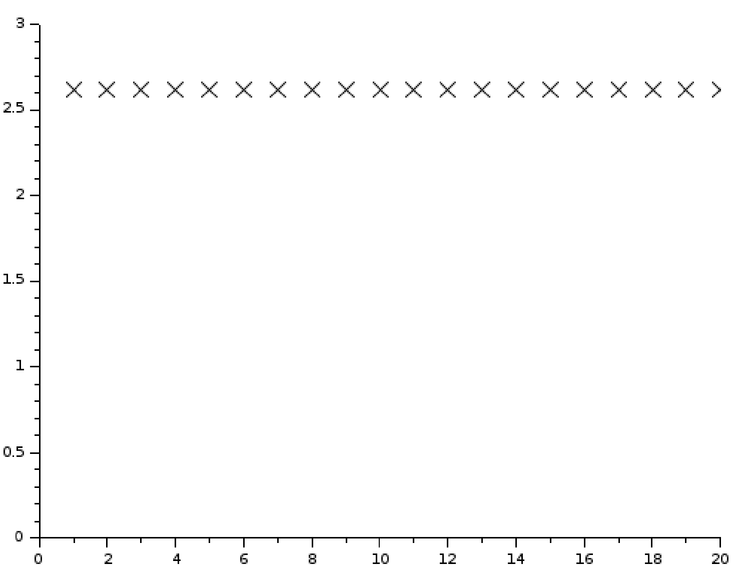
(c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
function res = v(n)
        a = 1
        b = 3
        while (b-a)>10^(-5)
                c = (a+b)/2
                if h(n,c)<4 then ........
                        else ........
                end
        end
        ........
endfunction
```

(d) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X = 1:20
Y = zeros(1,20)
for k=1:20
        Y(k) = v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=2)
```

À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
Que peut-on conjecturer ?

(e) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4.c.

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \leq -1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a : $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt = \int_1^A f(u)\, du$.

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

   (b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

   (c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

   (a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

   (b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (c) Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Partie B

1. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendantes de la variable aléatoire Y.

   Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

   (a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

   (b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

(c) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\mathbf{P}(T \leq x) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \leq x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \geq -x).$$

(d) En déduire la fonction de répartition de T.

2. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0,1[$ et soit V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

(a) Rappeler la fonction de répartition de U.

(b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et Y suivent la même loi.

3. (a) Écrire une fonction en langage `Scilab`, d'en-tête `function a = D(n)`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et qui renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

(b) On considère le script suivant :

```
n = input('Entrer n')
a = D(n)
b = rand(1,n)
c = a./sqrt(1-b)
disp(sum(c)/n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.