

## Exercice 1

On considère la matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^3$  dont  $A$  est la matrice relativement à la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbf{R}^3$  et id l'endomorphisme identité de  $\mathbf{R}^3$  dont la matrice est  $I$ .

1. (a) Déterminer  $(A - I)^2$ .  
 (b) En déduire que  $A$  est inversible et écrire  $A^{-1}$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $A$ .
2. On pose  $A = N + I$ .  
 (a) Exprimer pour tout entier naturel  $n$ , la matrice  $A^n$  comme combinaison linéaire de  $I$  et  $N$ , puis l'écrire comme combinaison linéaire de  $I$  et  $A$ .  
 (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour  $n = -1$ .
3. (a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de  $A$ .  
 (b) En déduire si  $A$  est ou n'est pas diagonalisable.
4. On pose  $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$  et  $u_2 = e_1 + e_3$ .  
 (a) Montrer que le rang de  $f - \text{id}$  est égal à 1.  
 (b) Justifier que  $(u_1, u_2)$  est une base de  $\ker(f - \text{id})$ .
5. (a) Montrer que  $(u_1, u_2, e_1)$  est une base de  $\mathbf{R}^3$ .  
 (b) Déterminer la matrice  $T$  de  $f$  dans cette même base.

6. Soit la matrice  $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Justifier l'inversibilité de  $P$  puis écrire la relation existant entre les matrices  $A$ ,  $T$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

7. On note  $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  et on rappelle que, pour tout  $(i, j)$  de  $\llbracket 1, 3 \rrbracket^2$ , la matrice  $E_{i,j}$  n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne qui vaut 1.  
 (a) Montrer que l'ensemble  $E$  des matrices  $M$  qui commutent avec  $T$ , c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité  $MT = TM$ , est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  engendré par la famille  $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ . Vérifier que la dimension de  $E$  est égale à 5.  
 (b) Soit  $N$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ . Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP).$$

- (c) En déduire que l'ensemble  $F$  des matrices qui commutent avec  $A$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  engendré par la famille  $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$ .
- 

## Exercice 2

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 3.

Une urne contient une boule noire non numérotée et  $n - 1$  boules blanches dont  $n - 2$  portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule noire.

Pour chaque  $i$  de  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , on note  $B_i$  l'événement « le  $i$ -ème tirage donne une boule blanche », on pose  $\overline{B_i} = N_i$  et on note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs que peut prendre la variable  $X$ .
2. (a) Pour tout  $i$  de  $\llbracket 2, n - 1 \rrbracket$ , justifier que  $\mathbf{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n - i}{n - i + 1}$ .

- (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver  $\mathbf{P}(X = k)$ , pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ .
- (c) Reconnaître la loi de  $X$  et donner son espérance et sa variance.
3. On note  $Y$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
- (a) Pour tout  $k$  de  $X(\Omega)$ , montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbf{P}([X = k] \cap [Y = 0]) = \frac{n - k}{n(n - 1)}.$$

- (b) En déduire  $\mathbf{P}(Y = 0)$ .
- (c) Reconnaître la loi de  $Y$  et donner son espérance et sa variance.
4. Simulation informatique.
- On rappelle qu'en Scilab, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $[[a, b]]$ .

- (a) Compléter le script Scilab suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire  $X$ .

On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
(1) n = input('entrez une valeur pour n : ')
(2) nB = n-1
(3) X = 1
(4) u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(5) while u<nB+1
(6)     nB = ----
(7)     u = grand(1,1,'uin',1,----)
(8)     X = ----
(9) end
(10) disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage numéro ')
```

- (b) Compléter les lignes (4) et (8) ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par  $X$ , la valeur prise par  $Y$ .

```
(1) n = input('entrez une valeur pour n : ')
(2) nB = n-1
(3) X = 1
(4) Y = ----
(5) u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(6) while u<nB+1
(7)     nB = ----
(8)     if u==1 then Y=----
(9)     end
(10)    u = grand(1,1,'uin',1,----)
(11)    X = ----
(12) end
(13) disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage numéro ')
(14) disp(Y, 'la valeur de Y est ')
```

### Exercice 3

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$ . On a donc, en particulier,  $u_0 = 1$ .

- Déterminer  $u_1$  et  $u_2$ .
- (a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

- (b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- (a) Rappeler la valeur de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$ .
- (b) En déduire la valeur de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$  puis celle de  $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$ .
- (c) Montrer que, pour tout réel  $t$ , on a :  $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$ .
- (d) En déduire que :  $0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}}$  puis donner la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. Calculer  $\int_0^1 (1-t)^n dt$  puis montrer que  $u_n \geq \frac{1}{n+1}$ . Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général  $u_n$  ?
5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1}).$$

- (b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- (c) On admet l'équivalent  $n! \underset{n:+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ . En écrivant  $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$ , montrer que :

$$u_n \underset{n:+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

## 6. Informatique.

On admet que, si  $\mathbf{t}$  est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de  $\mathbf{t}$ .

Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de  $u_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
x = 1:n
m = 2*n+1
y = 1:m
v = ----
w = ----
u = ----*v^2/w
disp(u)
```

## Problème

### Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire $X$

Dans cet exercice,  $\theta$  (thêta) désigne un réel élément de  $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ .

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire  $X$  de densité  $f$  et on note  $F$  sa fonction de répartition.

2. Montrer que  $X$  possède une espérance et une variance et les déterminer.

3. Déterminer, pour tout réel  $x$ , l'expression de  $F(x)$  en fonction de  $x$  et  $\theta$ .
4. (a) Montrer que l'équation  $F(x) = \frac{1}{2}$  possède une seule solution, notée  $M_e$ , que l'on déterminera.  
 (b) Montrer que :  $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], 2^x(1-x) \leq 1$ .  
 (c) Comparer  $\mathbf{E}[X]$  et  $M_e$ .
5. Soit  $a$  un réel supérieur ou égal à 1 et  $b$  un réel strictement positif.  
 (a) Montrer que  $\mathbf{P}_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}}$ .  
 (b) Déterminer la limite de cette quantité quand  $a$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable aléatoire  $X$  représente la durée de vie d'un certain appareil.

## Partie 2 : simulation de $X$

6. On pose  $Y = \ln X$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que  $X$ . On note  $G$  sa fonction de répartition.  
 (a) Pour tout réel  $x$ , exprimer  $G(x)$  à l'aide de la fonction  $F$ .  
 (b) En déduire que  $Y$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
7. On rappelle qu'en Scilab, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Écrire des commandes Scilab utilisant `grand` et permettant de simuler  $X$ .

## Partie 3 : estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre  $\theta$  est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.

On considère pour cela  $n$  variables aléatoires  $Y_1, \dots, Y_n$  toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que  $Y$ .

8. On pose  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$ .  
 (a) Justifier que  $T_n$  est un estimateur de  $\theta$ .  
 (b)  $T_n$  est-il un estimateur sans biais de  $\theta$ ?  
 (c) Calculer le risque quadratique de  $T_n$  en tant qu'estimateur de  $\theta$ .  $T_n$  est-il un estimateur convergent de  $\theta$ ?
9. (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable  $T_n$ .  
 (b) Établir l'inégalité :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbf{P}(\theta \in [T_n - \epsilon, T_n + \epsilon]) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\epsilon^2}.$$

- (c) En utilisant le fait que  $\theta \leq \frac{1}{2}$ , déterminer un intervalle de confiance pour  $\theta$  au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit  $n = 1000$ .