EMLyon 2019 - voie E

Exercice 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V.
On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $]-\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. (a) Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[,\ 0 \leq F_U(t) f_V(t) \leq f_V(t)$.
   (b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\ dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t) f_V(t)\ dt = \mathbf{P}(U \leq V).$$

2. En déduire : $\mathbf{P}(U > V) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_U(t)) f_V(t)\ dt$.
3. **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ.
   (a) Rappeler, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.
   (b) En déduire :
   $$\mathbf{P}(U > V) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Partie B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre λ.
On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbf{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \ldots, T_n)$.
   (a) Calculer, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $\mathbf{P}(M_n > t)$.
   (b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbf{R}$.
5. (a) Montrer que :
   $$\mathbf{P}(N = 1) = \mathbf{P}(T_1 \leq T_0) = \frac{1}{2}.$$
   (b) Justifier : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ [N > n] = [M_n > T_0]$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, une expression de $\mathbf{P}(N > n)$ en fonction de n.
   (c) Montrer alors :
   $$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$
   (d) En déduire la valeur de $\mathbf{P}(N = 0)$.
6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ sont semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible telle que $B = PAP^{-1}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
   Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2. Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
   Expliciter la matrice D^{-1}.
3. On note $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Calculer Q^2 et QDQ.
4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbf{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6. (a) Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer un vecteur u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$.
   (c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbf{R}^3$.

7. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
   (b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables et calculer M_1M_2.
8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et on pose $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable ?
10. (a) Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
    (b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.
11. On note g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.
    (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbf{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
    (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
    (c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
    (d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
12. Démontrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
   Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variation de g.
   (b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.
   (c) Soit $y \in [2,+\infty[$.
   En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x,y) de U.
5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer que

$$(x,y) \text{ est un point critique de } h \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{cases}.$$

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a,b).
7. (a) Vérifier :

$$\forall (x,y) \in U, \quad h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

   (b) En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n).$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.
9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction `Scilab` suivante afin que, prenant en argument un entier n, elle renvoie la valeur de u_n.

```
function u = suite(n)
        u = 1
        for k = --------
                u = --------
        end
endfunction
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$.

(c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

(b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p \leq n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt.$$

(c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq u_2 + 1$.

Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2;3]$.

(d) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{p-1}.$$

(e) En déduire une fonction `Scilab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.