ECRiCOME 2019 - voie E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 1

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Partie A

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
   (b) Justifier que 0 est l'unique valeur propre possible de f.
   (c) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
   (d) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Soient $e'_1 = (-1,-1,1)$, $e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.
   (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
3. On pose :
$$M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
   (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.
   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire que M est inversible.
   (d) À l'aide de la question A.a, calculer $(M-I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
   (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
   Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie B

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$. On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T.$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

1. Montrer que $VT = TV$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e'_1)$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e'_1) = ae'_1$.
   (b) Montrer que $g(e'_2) - ae'_2$ appartient aussi au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e'_2) = be'_1 + ae'_2$.
   (c) Montrer que $f \circ g(e'_3) = g \circ f(e'_3) = ae'_2 + be'_1$.
   En déduire que $g(e'_3) - ae'_3 - be'_2$ appartient au noyau de f.

(d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

3. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Solution :

Partie A

1. (a) On a

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0_3.}$$

(b) X^3 étant un polynôme annulateur de A et 0 étant la seule racine de X^3, la seule valeur propre possible pour A et donc pour f est 0.

(c) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}$ sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{aligned} u \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0 \\ &\Leftrightarrow AU = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z &= 0 \\ -x - y - 2z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z &= 0 \\ 3y + 3z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y &= 0 \\ z &= -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= y \\ z &= -y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = y(1, 1, -1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ker(u) = \mathrm{Vect}((1, 1, -1)).}$$

(d) f admettant 0 pour unique valeur propre, il est diagonalisable si et seulement si il est nul, ce qui n'est pas le cas. Ainsi,

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2. (a) Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0 &\Rightarrow (-a + 2b - c,\ -a - b + 2c,\ a + b + c) = (0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a + 2b - c &= 0 \\ -a - b + 2c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a + 2b - c &= 0 \\ -3b + 3c &= 0 \\ 3b &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a &= 0 \\ c &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, la famille (e_1', e_2', e_3') est libre. Puisqu'elle est composée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et que $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, c'est une base de $\mathbf{R}^3$.

(b) On pose $E_1' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $E_2' = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $E_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. On vérifie alors par un calcul matriciel direct que

$$AE_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad AE_2' = E_1' \quad \text{et} \quad AE_3' = E_2'$$

de sorte que

$$f(e_1') = 0, \quad f(e_2') = e_1' \quad \text{et} \quad f(e_3') = e_2'.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T.}$$

3. (a) On a la relation

$$\boxed{M = -A + I.}$$

(b) De la relation $M = -A + I$ on tire la relation

$$h = -f + \mathrm{id}_E$$

et donc

$$h(e_1') = -f(e_1') + e_1' = e_1', \quad h(e_2') = -f(e_2') + e_2' = -e_1' + e_2', \quad h(e_3') = -f(e_3') + e_3' = -e_2' + e_3'$$

de sorte que

$$\boxed{M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

(c) M' est triangulaire avec des éléments non nuls sur sa diagonale, elle est donc inversible. Par ailleurs M et M' sont semblables donc M est aussi inversible.

(d) On a

$$(M - I)^3 = (-A)^3 = 0_3$$

mais

$$(M - I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I$$

de sorte que

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$$

ou encore

$$M(M^2 - 3M + 3I) = I.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = M^2 - 3M + 3I.}$$

(e) On a, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} M^n &= (-A+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k A^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^k A^k \quad (\text{car } A^3 = 0) \\ &= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

Cette formule reste valide pour $n = 1$ et $n = 0$.
Enfin, pour $n = -1$, le membre de droite est égal à $I + A + A^2$ et, d'après 3.d, on a

$$\begin{aligned} M^{-1} &= M^2 - 3M + 3I \\ &= (-A+I)^2 - 3(-A+I) + 3I \\ &= A^2 - 2A + I + 3A - 3I + 3I \\ &= A^2 + A + I. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq -1, \quad M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2.}$$

Partie B

1. On a $V^2 = T$ donc
$$VT = VV^2 = V^3 = V^2 V = TV.$$
V et T représentant respectivement g et f dans la même base $\mathcal{B}'$, on a donc
$$\boxed{g \circ f = f \circ g.}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned} f(g(e_1')) &= (f \circ g)(e_1') \\ &= (g \circ f)(e_1') \\ &= g(f(e_1')) \\ &= g(0) \quad (\text{d'après 2.b}) \\ &= 0 \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{g(e_1') \in \ker(f).}$$

Puisque $\ker(f)$ est de dimension 1 et que $e_1' \in \ker(f)$, $g(e_1')$ et e_1' sont colinéaires. Ainsi,

$$\boxed{\exists a \in \mathbf{R}, \quad g(e_1') = ae_1'.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
f(g(e_2') - ae_2') &= f(g(e_2')) - f(ae_2') \\
&= (f \circ g)(e_2') - af(e_2') \\
&= (g \circ f)(e_2') - af(e_2') \\
&= g(f(e_2')) - ae_1' \\
&= g(e_1') - ae_1' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{g(e_2') - ae_2' \in \ker(f).}$$

Toujours par dimension, il s'ensuit qu'il existe un réel b tel que $g(e_2') - ae_2' = be_1'$ et donc

$$\boxed{g(e_2') = ae_2' + be_1'.}$$

(c) On a

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(e_3') &= (g \circ f)(e_3') \\
&= g(f(e_3')) \\
&= g(e_2') \\
&= ae_2' + be_1'.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(g(e_3') - ae_3' - be_2') &= f(g(e_3')) - af(e_3') - bf(e_2') \\
&= ae_2' + be_1' - ae_2' - be_1' \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{g(e_3') - ae_3' - be_2' \in \ker(f).}$$

(d) Comme précédemment, puisque $\dim \ker(f) = 1$, $g(e_3') - ae_3' - be_2'$ et e_1' sont colinéaires et donc il existe un réel c tel que $g(e_3') - ae_3' - be_2' = ce_1'$. Autrement dit,

$$g(e_3') = ae_3' + be_2' + ce_1'.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.}$$

(e) On a

$$V^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V^2 = T \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2+2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} a^2 & = 0 \\ 2ab & = 1 \\ b^2+2ac & = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

mais la première équation impose que $a = 0$ alors que la deuxième impose que $a \neq 0$, une contradiction. Ainsi,

$$\boxed{\text{il n'existe pas de matrice } V \text{ telle que } V^2 = T.}$$

$\square$

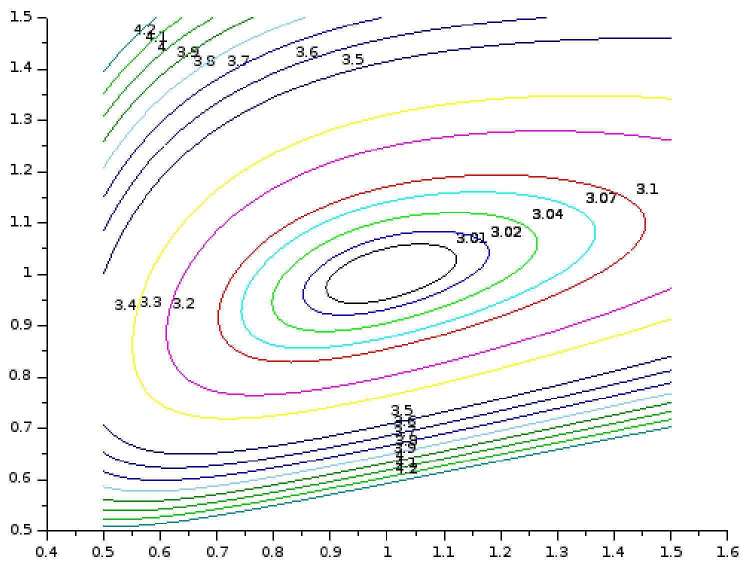
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

Partie A

1. On utilise `Scilab` pour tracer des lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



Établir une conjecture à partir du graphique suivant quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

2. (a) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

   (b) Calculer les dérivées partielles premières de f, puis démontrer que f admet un unique point critique, noté A, que l'on déterminera.

   (c) Calculer les dérivées partielles secondes de f, puis démontrer que la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par : $H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$.

   (d) En déduire que la fonction f admet au point A un extremum local, préciser si cet extremum est un minimum ou un maximum, et donner sa valeur.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, la fonction h_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, l'équation : $h(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n, et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.
3. (a) Démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}.$$

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $h_{n+1}(x) \geq 4$.

(c) Montrer alors que la suite (v_n) est décroissante.

4. (a) Démontrer que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ et montrer que $\ell \geq 1$.

   (b) En supposant $\ell > 1$, démontrer que : $\lim\limits_{n:+\infty} v_n^n = +\infty$. En déduire une contradiction.

   (c) Déterminer la limite de (v_n).

5. (a) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ v_n \leq 3$.

   (b) Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function y=h(n,x)` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$ lorsqu'on lui fournit un entier naturel n non nul et un réel $x \in \mathbf{R}_+^*$ en entrée.

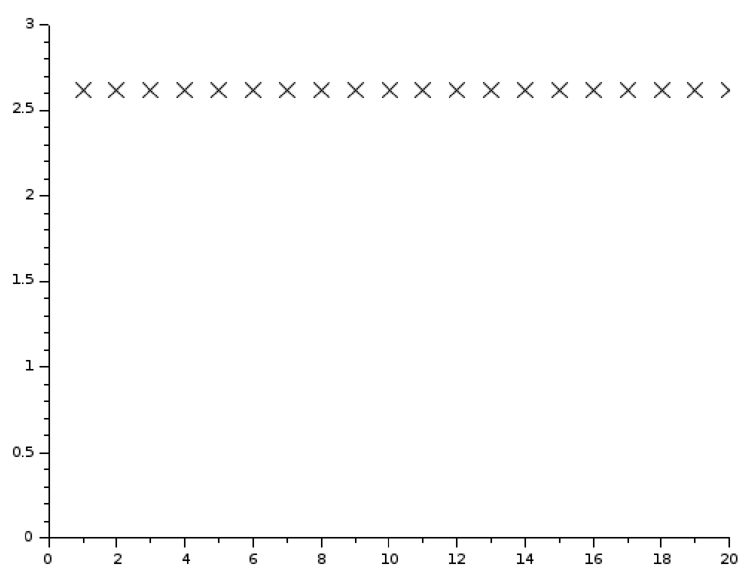
   (c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier $n \geq 1$ en entrée :

```
function res = v(n)
        a = 1
        b = 3
        while (b-a)>10^(-5)
                c = (a+b)/2
                if h(n,c)<4 then ........
                        else ........
                end
        end
        ........
endfunction
```

   (d) À la suite de la fonction `v`, on écrit le code suivant :

```
X = 1:20
Y = zeros(1,20)
for k=1:20
        Y(k) = v(k)^k
end
plot2d(X,Y,style=2)
```

   À l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



   Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus.
   Que peut-on conjecturer ?

   (e) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ v_n^n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

(f) Retrouver ainsi le résultat de la question 4.c.

Solution :

Partie A

On note $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$

1. Il semble que f présente un minimum local en $(1,1)$, point auquel la fonction prend la valeur 3.
   Remarque : Pour obtenir ce graphique, on a utilisé le script suivant :

```
n=100

X = linspace(0.5,1.5,n)
Y = X

function z=f(x,y)
    z = x/y^2+y^2+1/x
endfunction

Z = zeros(n,n)
for i=1:n
    for j=1:n
        Z(i,j)=f(X(i),Y(j))
    end
end

L = [3.01,3.02,3.04,3.07,3.1:0.1:4.2]

contour(X,Y,Z,L)
```

2. (a) $(x,y) \mapsto y^2$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^2$ sur U où elle ne s'annule pas. Il s'ensuit que $(x,y) \mapsto \frac{1}{y^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur U. Par produit, $(x,y) \mapsto \frac{x}{y^2}$ est $\mathcal{C}^2$ sur U. De même $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^2$ sur U et donc, par somme, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

   (b) Pour tout $(x,y) \in U$, on a

$$\boxed{\nabla(f)(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} \\ \\ -\dfrac{2x}{y^3} + 2y \end{bmatrix}}$$

   (c) Soit $(x,y) \in U$, on a

$$\begin{aligned} \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathcal{M}_{2,1}} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} \\ \\ -\dfrac{2x}{y^3} + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2} & = 0 \\ \\ -\dfrac{2x}{y^3} + 2y & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{y^2} &= \frac{1}{x^2} \\ 2x - 2y^4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} y &= x \\ 2y(1 - y^3) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} y &= x \\ y &= 1. \end{aligned} \right.$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ présente un unique point critique en } A = (1,1).}$$

(d) Pour tout $(x,y) \in U$, on a

$$\boxed{\nabla^2(f)(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{x^3} & -\dfrac{2}{y^3} \\ -\dfrac{2}{y^3} & \dfrac{6x}{y^4} + 2 \end{bmatrix}.}$$

Ainsi,

$$\boxed{\nabla^2(f)(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = H.}$$

(e) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(H) \quad &\Leftrightarrow \quad H - \lambda I_2 \text{ non-inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \left\{5 - \sqrt{13}, 5 + \sqrt{13}\right\}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(H) = \left\{5 - \sqrt{13}, 5 + \sqrt{13}\right\}.}$$

Puisque $13 < 25$, on a $5 - \sqrt{13} > 0$ et donc les deux valeurs propres sont strictement positives. Il s'ensuit que

$$\boxed{f \text{ présente un minimum local en } (1,1).}$$

En outre, on vérifie immédiatement que

$$\boxed{f(1,1) = 3.}$$

Remarque : Ces résultats sont conformes à la conjecture proposée à la question 1.

Partie B

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction h_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$h_n'(x) = nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = n\frac{x^{2n}-1}{x^{n+1}}.$$

Ainsi, $h_n'(x) < 0$ si $x \in]0,1[$ et $h_n'(x) > 0$ si $x > 1$. Il s'ensuit que

$$\boxed{h_n \text{ est strictement décroissante sur }]0,1[\text{ et strictement croissante sur }]1,+\infty[.}$$

2. h_n est continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. En outre,

$$\lim_{x:0^+} h_n(x) = +\infty, \quad h(1) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x:+\infty} h_n(x) = +\infty$$

de sorte que h_n induit des bijections respectivement de $]0,1[$ vers $]3,+\infty[$ et de $]1,+\infty[$ vers $]3,+\infty[$. Puisque $4 \in]3,+\infty[$, il suit du théorème de la bijection continue appliqué à chacun de ces intervalles qu'il existe un unique $u_n \in]0,1[$ et un unique $v_n \in]1,+\infty[$ tels que $h_n(u_n) = 4 = h_n(v_n)$.

3. (a) Pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + 1 + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^n + 1 + \frac{1}{x^n}\right) \\ &= \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{2n+1} - x}{x^{n+1}} \\ &= \frac{(x-1)(x^{2n+1}-1)}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $v_n > 1$ et donc

$$\begin{aligned} h_{n+1}(v_n) - 4 &= h_{n+1}(v_n) - h_n(v_n) \\ &= \frac{(v_n-1)(v_n^{2n+1}-1)}{v_n^{n+1}} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad h_{n+1}(v_n) > 4.}$$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $h_{n+1}(v_n) \geq 4 = h_{n+1}(v_{n+1})$. Puisque v_n et v_{n+1} appartiennent à $]1,+\infty[$ et que h_{n+1} est une bijection croissante sur cet intervalle, on peut appliquer la bijection réciproque h_{n+1}^{-1} à cette inégalité et on obtient $v_n \geq v_{n+1}$. En conséquence,

$$\boxed{(v_n) \text{ est décroissante.}}$$

4. (a) (v_n) est une suite décroissante d'après la question B.3.c et minorée par 1 d'après la question B.2 donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geq 1$.

(b) Si $\ell > 1$, on peut écrire $\ell = 1 + 2\epsilon$ avec $\epsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$. Alors il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|v_n - \ell| < \epsilon$ et donc $v_n > 1 + \epsilon$. Il s'ensuit que, pour tout $n \geq n_0$,

$$v_n^n \geq (1+\epsilon)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n:+\infty} v_n^n = +\infty.}$$

On a ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$4 = h_n(v_n) = v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

une contradiction.

(c) On sait que (v_n) converge vers $\ell \geq 1$ et que l'on ne peut pas avoir $\ell > 1$. Il s'ensuit que

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

5. (a) La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $v_n \leq v_1$. Mais v_1 est l'unique réel de $]1, +\infty[$ tel que $h_1(v_1) = 4$. Or

$$\begin{aligned} h_1(v_1) = 4 \quad & \Leftrightarrow \quad v_1 + 1 + \frac{1}{v_1} = 4 \\ & \Leftrightarrow \quad v_1^2 + v_1 + 1 = 4v_1 \\ & \Leftrightarrow \quad v_1^2 - 3v_1 + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad v_1 \text{ est racine de } X^2 - 3X + 1. \end{aligned}$$

Les racines de $X^2 - 3X + 1$ étant $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, la seule racine supérieure à 1 est la seconde et donc

$$v_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leq 3.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n \leq 3.}$$

(b) On propose le programme suivant :

```
function y = h(n,x)
        y = x^n + 1 + 1/x^n
endfunction
```

(c) On propose de compléter de la manière suivante :

```
function res = v(n)
        a = 1
        b = 3
        while (b-a)>10^(-5)
                c = (a+b)/2
                if h(n,c)<4 then a = c
                        else b = c
                end
        end
        res = a
endfunction
```

(d) Ce graphique affiche les points (k, v_k^k) pour $k \in [\![1, 20]\!]$. A la lecture de ce graphique, il semble que $(v_n^n)_n$ soit constante égale à un nombre proche de 2,6.

(e) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a, comme en B.5.a,

$$\begin{aligned} h_n(v_n) = 4 \quad & \Leftrightarrow \quad v_n^n + 1 + \frac{1}{v_n^n} = 4 \\ & \Leftrightarrow \quad v_n^{2n} + v_n^n + 1 = 4v_n^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad v_n^{2n} - 3v_n^n + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v_n \text{ est racine de } X^2 - 3X + 1. \end{aligned}$$

Puisque $v_n > 1$, on a $v_n^n > 1$ et donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.}$$

(f) Il suit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$v_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

Or

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc, par continuité de la fonction exponentielle,

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(0) = 1.}$$

Remarque : Ce résultat est conforme à ce qui a été trouvé en 4.c.

□

Exercice 3

On suppose que toutes les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < t < 1 \\ -\frac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \leq -1. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et calculer sa valeur.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a : $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\, dt = \int_1^A f(u)\, du.$

   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}$ converge et donner sa valeur.

   (b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

   (b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.

   (c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?
5. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.
   (a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

   (b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   (c) Montrer que Y admet une espérance, et la calculer.

Partie B

1. Soit D une variable aléatoire prenant les valeurs -1 et 1 avec équiprobabilité, indépendantes de la variable aléatoire Y.

   Soit T la variable aléatoire définie par $T = DY$.

   (a) Déterminer la loi de la variable $Z = \dfrac{D+1}{2}$. En déduire l'espérance et la variance de D.

   (b) Justifier que T admet une espérance et préciser sa valeur.

(c) Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\mathbf{P}(T \leq x) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \leq x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \geq -x).$$

(d) En déduire la fonction de répartition de T.

2. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]0,1[$ et soit V la variable aléatoire définie par : $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$.

(a) Rappeler la fonction de répartition de U.

(b) Déterminer la fonction de répartition de V et vérifier que les variables aléatoires V et Y suivent la même loi.

3. (a) Écrire une fonction en langage `Scilab`, d'en-tête `function a = D(n)`, qui prend un entier $n \geq 1$ en entrée, et qui renvoie une matrice ligne contenant n réalisations de la variable aléatoire D.

(b) On considère le script suivant :

```
n = input('Entrer n')
a = D(n)
b = rand(1,n)
c = a./sqrt(1-b)
disp(sum(c)/n)
```

De quelle variable aléatoire les coefficients du vecteur `c` sont-ils une simulation ? Pour `n` assez grand, quelle sera la valeur affichée ? Justifier votre réponse.

Solution :

Partie A

1. f est définie sur $\mathbf{R}$ qui est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(-t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad -t \geq 1 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad -1 < -t < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad -t \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \leq -1 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad -1 < -t < 1 \\[2ex] \dfrac{1}{t^3} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases} = f(t).$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est paire.}}$$

2. On a

$$\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt.$$

On reconnaît une intégrale de Riemann convergente.
En outre,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, dt &= \lim_{A:+\infty} \int_1^{A} \frac{1}{t^3}\, dt \\ &= \lim_{A:+\infty} \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A \\ &= \lim_{A:+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)\ dt = \frac{1}{2}.}$$

3. (a) Soit $A > 1$. On effectue le changement de variable $u = -t$ et on a

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{-1} f(t)\ dt &= -\int_A^1 f(-u)\ du\\ &= \int_1^A f(u)\ du \quad \text{(par parité de } f\text{)}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt &= \lim_{A:+\infty} \int_{-A}^{-1} f(t)\ dt\\ &= \lim_{A:+\infty} \int_1^A f(u)\ du\\ &= \int_1^{+\infty} f(u)\ du\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt = \frac{1}{2}}$$

(b) La fonction f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, elle est positive sur $\mathbf{R}_+$ donc sur $\mathbf{R}$ par parité. Enfin,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \int_1^A f(t)\ dt\\ &= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

4. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$.
Si $x \leq -1$,

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)\ dt\\ &= \lim_{A:-\infty} \int_A^x -\frac{1}{t^3}\ dt\\ &= \lim_{A:-\infty} \left[\frac{1}{2t^2}\right]_A^x\\ &= \lim_{A:-\infty} \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2}\\ &= \frac{1}{2x^2}.\end{aligned}$$

Si $-1 < x < 1$, on a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^{x} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \int_{1}^{x} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}\ dt \\ &= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}}$$

(b) X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\ dt$ converge. Par parité de $t \mapsto |t|f(t)$, ceci équivaut à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t| f(t)\ dt$. Or

$$\int_0^{+\infty} |t| f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t f(t)\ dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$$

est une intégrale de Riemann convergente. Ainsi, X admet une espérance.

Alors, $\mathbf{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ dt$ mais, par imparité de la fonction $t \mapsto t f(t)$, cette intégrale est nulle. En conséquence,

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = 0.}$$

(c) On a les équivalences

$$X \text{ admet une variance} \quad \Leftrightarrow \quad X^2 \text{ admet une espérance}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\ dt \text{ converge} \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)\ dt \text{ converge} \quad \text{(par parité)}
\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\ dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\ dt$$

qui est une intégrale de Riemann divergente.
Ainsi,

$$\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$$

5. (a) $Y = |X|$ est positive donc, pour tout $x \in \mathbf{R}_-$, on a $F_Y(x) = 0$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbf{P}\left(Y \leq x\right) \\
&= \mathbf{P}\left(|X| \leq x\right) \\
&= \mathbf{P}\left(-x \leq X \leq x\right) \\
&= F_X(x) - F_X(-x).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $0 \leq x < 1$, on a $-1 < x < 0$ et donc, d'après 4.a,

$$F_Y(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si $x \geq 1$, on a $-x \leq -1$ et donc, d'après 4.a,

$$F_Y(x) = 1 - \frac{2x^2}{-}\frac{1}{2(-x)^2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}}$$

(b) F_Y est par définition la fonction de répartition d'une variable aléatoire, elle est en particulier continue à droite sur $\mathbf{R}$.
Elle est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ et $\lim_{x:1^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(1)$ donc F_Y est continue à gauche en 1. Ainsi, F_Y est continue sur $\mathbf{R}$. Il s'agit donc de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité f_Y doit en outre vérifier $f_Y(x) = F_Y'(x)$ en tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Or

$$\forall x < 1,\ F_Y'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq 1,\ F_Y'(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{Y \text{ admet pour densité } f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) Y admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_Y(x)\ dx$ converge. Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\ dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$$

qui est une intégrale de Riemann convergente.
Ainsi, X admet une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\ dx \\ &= 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= 2\lim_{A:+\infty}\int_1^{A} \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= 2\lim_{A:+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^A \\ &= 2\lim_{A:+\infty}\left(1-\frac{1}{A}\right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Partie B

1. (a) On a $D(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc $Z(\Omega) = \{0, 1\}$. En outre,

$$\mathbf{P}(Z=1) = \mathbf{P}(D=1) = \frac{1}{2}$$

donc

$$\boxed{Z \rightsquigarrow \mathcal{B}(1/2) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[Z] = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{V}(Z) = \frac{1}{4}.}$$

(b) Les variables aléatoires D et Y admettent une espérance et sont indépendantes donc leur produit admet une espérance et

$$\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[DY] = \mathbf{E}[D]\,\mathbf{E}[Y].$$

Or $D = 2Z - 1$ donc $\mathbf{E}[D] = 2\mathbf{E}[Z] - 1 = 0$.
Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}[T] = 0.}$$

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$. En utilisant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(Y=-1), (Y=1)\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T \leq x) &= \mathbf{P}(Y=-1)\,\mathbf{P}_{(Y=-1)}(T \leq x) + \mathbf{P}(Y=1)\,\mathbf{P}_{(Y=1)}(T \leq x) \\ &= \mathbf{P}(Y=-1)\,\mathbf{P}_{(Y=-1)}(Y \geq -x) + \mathbf{P}(Y=1)\,\mathbf{P}_{(Y=1)}(Y \leq x) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \geq -x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \leq x).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(T \leq x) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \geq -x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \leq x).}$$

(d) Soit $x \in \mathbf{R}$.
Si $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbf{P}(T \leq x) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \geq -x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \leq x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Si $-1 < x < 1$, on a

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbf{P}(T \leq x) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \geq -x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \leq x) \\ &= \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $x \leq -1$, on a

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbf{P}(T \leq x) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \geq -x) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(Y \leq x) \\ &= \frac{1}{2}(1 - F_T(-x)) + 0 \\ &= \frac{1}{2x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}}$$

2. (a) On a

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}}$$

(b) $V = \dfrac{1}{\sqrt{1-U}}$ est à valeurs strictement positives donc $F_V(x) = 0$ si $x \in \mathbf{R}_-$. Soit alors $x \in \mathbf{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbf{P}(V \leq x) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{1-U} \leq x^2\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{P}\left(1 \leq x^2 - Ux^2\right) \\
&= \mathbf{P}\left(Ux^2 \leq x^2 - 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left(U \leq \frac{x^2-1}{x^2}\right) \\
&= F_U\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$F_V = F_Y$$

et donc

$$\boxed{V \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$$

3. (a) On propose le programme suivant :

```
function a = D(n)
        Z = grand(1,n,'uin',0,1)
        a = 2*Z-1
endfunction
```

(b) `c` simule la variable aléatoire $\dfrac{D}{\sqrt{1-U}} = DV$ qui suit d'après 2.b la même loi que $DY = T$. Ainsi,

$$\boxed{\texttt{c} \text{ simule la variable aléatoire } T.}$$

La valeur affichée est la moyenne des valeurs prises par T sur n simulations. Si n est grand, ce nombre doit s'approcher de l'espérance de T, et donc de 0.

Remarque : D'un point de vue strictement formel, pour pouvoir justifier cette tendance, il faut s'appuyer sur la loi des grands nombres qui nécessite que T admette une variance, ce qui n'est pas le cas ici puisque $T^2 = Y^2$ n'admet pas d'espérance d'après A.4.c. L'énoncé manque donc ici de précision.

□