

Exercice 1

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie A : Des résultats préliminaires

Soient U et V deux variables aléatoires à densité indépendantes de densités respectives f_U et f_V et de fonctions de répartition respectives F_U et F_V .

On suppose que les fonctions f_U et f_V sont nulles sur $] -\infty, 0[$ et continues sur $[0, +\infty[$.

1. (a) Justifier : $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t)$.
- (b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt$ converge.

On admet le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt = \mathbf{P}(U \leq V).$$

2. En déduire : $\mathbf{P}(U > V) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t) dt$.
3. **Exemple :** Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+^*$. On suppose dans cette question que U suit la loi exponentielle de paramètre λ et que V suit la loi exponentielle de paramètre μ .
 - (a) Rappeler, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, une expression de $F_U(t)$ et de $f_V(t)$.
 - (b) En déduire :

$$\mathbf{P}(U > V) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Partie B : Une application

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre λ .

On définit ensuite la variable aléatoire N égale au plus petit entier k de $\mathbf{N}^*$ tel que $T_k \leq T_0$ si un tel entier existe et égale à 0 sinon.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit la variable aléatoire M_n par : $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$.
 - (a) Calculer, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $\mathbf{P}(M_n > t)$.
 - (b) En déduire la fonction de répartition de M_n sur $\mathbf{R}$.
5. (a) Montrer que :

$$\mathbf{P}(N = 1) = \mathbf{P}(T_1 \leq T_0) = \frac{1}{2}.$$

- (b) Justifier : $\forall n \in \mathbf{N}^*, [N > n] = [M_n > T_0]$.

En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, une expression de $\mathbf{P}(N > n)$ en fonction de n .

- (c) Montrer alors :

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- (d) En déduire la valeur de $\mathbf{P}(N = 0)$.

6. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

Solution :

Partie A : Des résultats préliminaires

1. (a) Soit $t \geq 0$. Puisque F_U est une fonction de répartition, on a

$$0 \leq F_U(t) \leq 1$$

et donc, en multipliant par $f_V(t)$ qui est positif, on obtient

$$0 \leq F_U(t)f_V(t) \leq f_V(t).$$

- (b) F_U est continue sur $\mathbf{R}_+$ comme fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. f_V est continue sur $\mathbf{R}_+$ par hypothèse. En outre, $\int_0^{+\infty} f_V(t) dt$ converge (et vaut 1) car f_V est une fonction de densité nulle sur $] -\infty, 0[$. Il suit alors du théorème de comparaison appliqué à l'inégalité obtenue en 1.a que

$$\int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt \text{ converge.}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U > V) &= 1 - \mathbf{P}(U \leq V) \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_V(t) dt - \int_0^{+\infty} F_U(t)f_V(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} f_V(t) - F_U(t)f_V(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(U > V) = \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t) dt.$$

3. (a) Puisque $U \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $V \rightsquigarrow \mathcal{E}(\mu)$, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad F_U(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{et} \quad f_V(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

- (b) D'après 2, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U > V) &= \int_0^{+\infty} (1 - F_U(t))f_V(t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \mu \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^{+\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

la dernière égalité venant du fait que l'on a reconnu la densité d'une loi $\mathcal{E}(\lambda + \mu)$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(U > V) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Partie B : Une application

4. (a) Soit $t \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M_n > t) &= \mathbf{P}(\min(T_1, \dots, T_n) > t) \\ &= \mathbf{P}(T_1 > t, \dots, T_n > t) \\ &= \mathbf{P}(T_1 > t) \times \dots \times \mathbf{P}(T_n > t) \quad (\text{par indépendance}) \\ &= (1 - F_{T_1}(t)) \times \dots \times (1 - F_{T_n}(t)) \\ &= (e^{-\lambda t})^n \\ &= e^{-n\lambda t}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}(M_n > t) = e^{-n\lambda t}.$$

(b) $M_n = \min(T_1, \dots, T_n)$ est à valeurs positives car chacune des T_i l'est. Ainsi, $F_{M_n}(t) = 0$ si $t < 0$. Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$, on a

$$F_{M_n}(t) = 1 - \mathbf{P}(M_n > t) = 1 - e^{-n\lambda t}.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$M_n \rightsquigarrow \mathcal{E}(n\lambda).$$

5. (a) On a $(N = 1) = (T_1 \leq T_0)$ donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = 1) &= \mathbf{P}(T_1 \leq T_0) \\ &= \int_0^{+\infty} F_{T_1}(t) f_{T_0}(t) dt \quad (\text{d'après 2}) \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda t}) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \lambda \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda t} dt \right] \\ &= \lambda \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} \right] \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbf{P}(N = 1) = \frac{1}{2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$(N > n) = (T_1 > T_0, \dots, T_n > T_0) = (\min(T_1, \dots, T_n) > T_0) = (M_n > T_0).$$

Mais, d'après 4.b, $M_n \rightsquigarrow \mathcal{E}(n\lambda)$ et, d'après le lemme des coalitions, M_n et T_0 sont indépendantes. Il suit alors de 3.b que

$$\mathbf{P}(N > n) = \mathbf{P}(M_n > T_0) = \frac{\lambda}{n\lambda + \lambda} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \mathbf{P}(N > n) = \frac{1}{n+1}.$$

(c) Soit $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = n) &= \mathbf{P}(N > n-1) - \mathbf{P}(N > n) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \mathbf{P}(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

(d) On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n) \\ &= \frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $N \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^N \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers l'infini, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\mathbf{P}(N = 0) = 0.$$

6. Pour que N admette une espérance, il faut et il suffit que la série $\sum_{n \geq 0} n\mathbf{P}(N = n)$ converge (absolument, mais ici les termes sont positifs). Or

$$\sum_{n \geq 0} n\mathbf{P}(N = n) = \mathbf{P}(N = 1) + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+1}$$

et cette dernière série est divergente car son terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente (série harmonique). Ainsi,

N n'admet pas d'espérance.

□

Exercice 2

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ sont semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible telle que $B = PAP^{-1}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier les exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A .
Justifier que A est inversible et diagonalisable.
2. Déterminer une matrice D de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ diagonale où les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
Expliciter la matrice D^{-1} .
3. On note $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Calculer Q^2 et QDQ .
4. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbf{R}^3$ définis par : $u_1 = (1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$.

5. Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
6. (a) Vérifier que 1 est valeur propre de f et que (u_1, u_2) est une base du sous-espace propre associé.
(b) Déterminer un vecteur u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$.
(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbf{R}^3$.
7. (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
(b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables et calculer $M_1 M_2$.
8. En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et on pose $N = T - I_3$.

9. Justifier que la matrice T est inversible. Est-elle diagonalisable?
10. (a) Calculer N^3 puis $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
(b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3 , N et N^2 .
11. On note g l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N .
(a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbf{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
(c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
(d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.
12. Démontrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Solution :

Partie A : Premier exemple

1. A est triangulaire donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale. Ainsi

$$\text{Sp}(A) = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}.$$

Puisque $0 \notin \text{Sp}(A)$,

A est inversible.

Par ailleurs, A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ qui admet 3 valeurs propres distinctes et donc

A est diagonalisable.

2. Déterminons les espaces propres de A . Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. En résolvant les systèmes correspondants, on arrive à

$$AX = \frac{1}{2}X \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$AX = X \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

$$AX = 2X \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Il s'ensuit que

$$E_{1/2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Si on pose

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{alors} \quad A = PDP^{-1}.$$

Et puisque D est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont non nuls, elle est inversible et

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

3. Un calcul matriciel direct donne :

$$Q^2 = I_3 \quad \text{et} \quad QDQ = D^{-1}.$$

4. On a $Q^2 = I_3$ donc $Q = Q^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} QDQ = D^{-1} &\Rightarrow QDQ^{-1} = D^{-1} \\ &\Rightarrow Q(P^{-1}AP)Q^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} \\ &\Rightarrow QP^{-1}APQ^{-1} = P^{-1}A^{-1}P \\ &\Rightarrow PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = A^{-1} \\ &\Rightarrow (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1} = A^{-1} \end{aligned}$$

et donc

$$A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}$$

Remarque : Un argument moins calculatoire consiste à dire que A est semblable à D d'après 2 donc que A et D représentent un même endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dans deux bases distinctes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors A^{-1} et D^{-1} représentent f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, elles sont donc aussi semblables. Par ailleurs, on a établi en 3 que $D \sim D^{-1}$. Ainsi, $A \sim D$, $D \sim D^{-1}$ et $D^{-1} \sim A^{-1}$ donc, par transitivité, $A \sim A^{-1}$.

Partie B : Deuxième exemple

5. On a

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = e_1, \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (0, 0, 1) = e_3, \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (0, -1, 2) = -e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. (a) On a

$$f(u_1) = f(e_1) = e_1 = u_1$$

et $u_1 \neq 0$ donc $1 \in \text{Sp}(f)$ et $u_1 \in E_1(f)$.

Par ailleurs,

$$f(u_2) = f(0, 1, -1) = (0, 1, -1) = u_2$$

donc $u_2 \in E_1(f)$.

Il s'ensuit que $\text{Vect}(u_1, u_2) \subset E_1(f)$. Mais u_1 et u_2 étant non colinéaires, $\dim \text{Vect}(u_1, u_2) = 2$ et, puisque $f \neq \text{id}_{\mathbf{R}^3}$, on a $\dim E_1(f) \leq 2$. Ainsi, par dimension

$$\text{Vect}(u_1, u_2) = E_1(f)$$

et donc

$$(u_1, u_2) \text{ est une base de } E_1(f).$$

(b) Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$ tels que $u_3 = (x, y, z)$. Alors

$$\begin{aligned} f(u_3) - u_3 = u_2 &\Leftrightarrow (x, -z, y + 2z) - (x, y, z) = (0, 1, -1) \\ &\Leftrightarrow (0, y - z, y + z) = (0, 1, -1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut prendre n'importe quel u_3 de la forme $(x, 0, -1)$, avec $x \in \mathbf{R}$. On choisit de poser

$$u_3 = (0, 0, -1).$$

(c) Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0_{\mathbf{R}^3} &\Leftrightarrow a(1, 0, 0) + b(0, 1, -1) + c(0, 0, -1) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (a, b, -b - c) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ -b - c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = b = c = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est libre. Et puisque $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de trois vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ qui est de dimension trois, il s'ensuit que

$$\mathcal{B}_1 \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.$$

7. (a) Par définition de u_3 , on a $f(u_3) = u_2 + u_3$ et d'autre part, on a vu que $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. Ainsi,

$$M_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De même, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ et $f(u_3) = -(-u_2) + u_3$ donc

$$M_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases distinctes, elles sont donc semblables. Plus précisément, si $P = P_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on a

$$M_1 = PM_2P^{-1}.$$

En outre, un calcul matriciel direct donne

$$M_1M_2 = I_3.$$

8. Puisque $M_1M_2 = I_3$, on a $M_2 = M_1^{-1}$ et donc la relation trouvée en 8.b se réécrit

$$M_1 = PM_1^{-1}P^{-1}.$$

Par ailleurs, si R est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base canonique, on a la relation

$$M_1 = RMR^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} M &= R^{-1}M_1R \\ &= R^{-1}(PM_1^{-1}P^{-1})R \\ &= R^{-1}P(RMR^{-1})^{-1}P^{-1}R \\ &= R^{-1}P(RM^{-1}R^{-1})P^{-1}R \\ &= R^{-1}PRM^{-1}R^{-1}P^{-1}R \\ &= (R^{-1}PR)M^{-1}(R^{-1}P^{-1}R)^{-1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

9. T est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont sur la diagonale et donc

$$\text{Sp}(T) = \{1\}.$$

Ainsi,

0 n'est pas valeur propre de T donc T est inversible

et

T admet 1 pour unique valeur propre et $T \neq I_3$ donc T n'est pas diagonalisable.

10. (a) On a

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0_3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (I_3 + N)(I_3 - N + N^2) &= I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 \\ &= I_3. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3.$$

(b) On a $T = I_3 + N$ et, d'après la question précédente, $T(I_3 - N + N^2) = I_3$ donc

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2.$$

11. (a) Pour alléger, on note $g^2 = g \circ g$ et $g^3 = g \circ g \circ g$.
On a $N^2 \neq 0$ donc $g^2 \neq 0$. Ainsi, il existe $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$. Par ailleurs, $N^3 = 0$ donc $g^3 = 0$ et donc en particulier, $g^3(u) = 0$.

- (b) Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $ag^2(u) + bg(u) + cu = 0$. En composant avec l'application linéaire g^2 , on obtient

$$ag^4(u) + bg^3(u) + cg^2(u) = g^2(0)$$

c'est-à-dire,

$$cg^2(u) = 0.$$

Puisque $g^2(u) \neq 0$, il vient $c = 0$.

En reportant, on a $ag^2(u) + bg(u) = 0$. En composant alors avec g il vient $ag^3(u) + bg^2(u) = g(0)$, c'est-à-dire, $bg^2(u) = 0$. Puisque $g^2(u) \neq 0$, on obtient $b = 0$.

En reportant encore une fois, on a $ag^2(u) = 0$ et donc, toujours puisque $g^2(u) \neq 0$, il vient $a = 0$.

On a ainsi montré

$$ag^2(u) + bg(u) + cu = 0 \Rightarrow a = b = c = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{B}_3 = (g^2(u), g(u), u)$ est libre. Puisque $\mathcal{B}_3$ est une famille libre composée de trois vecteurs dans un espace de dimension trois,

$\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbf{R}^3$.

- (c) On a

$$g(g^2(u)) = g^3(u) = 0, \quad g(g(u)) = g^2(u) \quad \text{et} \quad g(u) = g(u)$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (d) Par calcul matriciel,

$$N^2 - N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_3}(g).$$

Ainsi, $N^2 - N$ représente g dans la base $\mathcal{B}_3$. Puisque N représente g dans la base canonique,

N et $N^2 - N$ sont semblables.

12. D'après la question précédente, il existe une matrice inversible P telle que

$$P(N^2 - N)P^{-1} = N.$$

Mais alors, d'après 10.b,

$$\begin{aligned} PT^{-1}P &= P(I_3 + (N^2 - N))P^{-1} \\ &= PI_3P^{-1} + P(N^2 - N)P^{-1} \\ &= I_3 + N \\ &= T. \end{aligned}$$

Ainsi,

T et T^{-1} sont semblables.

□

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) = t + \frac{1}{t}.$$

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variation de g .
(b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.
(c) Soit $y \in [2, +\infty[$.

En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x)(1+y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout (x, y) de U .
5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que

$$(x, y) \text{ est un point critique de } h \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x^2 \\ x &= y^2 \end{cases}.$$

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U dont on précisera les coordonnées (a, b) .
7. (a) Vérifier :

$$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

- (b) En déduire que h admet en (a, b) un minimum global sur U .

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(nu_n).$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.
9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un entier n , elle renvoie la valeur de u_n .

```
function u = suite(n)
    u = 1
    for k = -----
        u = -----
    end
endfunction
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

(c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers un réel ℓ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

(b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p \leq n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

(c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq u_2 + 1$.

Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2; 3]$.

(d) Montrer que, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{1}{p-1}.$$

(e) En déduire une fonction Scilab qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Solution :

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et,

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}.$$

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$		$-$ 0 $+$	
f	$+\infty$	2	$+\infty$

Pour les calculs de limites, il s'agit de sommes de limites usuelles.

2. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ où elle est strictement croissante. En outre, $f(1) = 2$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.

Il suit alors du théorème de la bijection continue que

f induit une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

3. (a) g est la réciproque d'une fonction strictement croissante, il s'agit donc d'une fonction strictement croissante.

t	2	$+\infty$
g	1	$+\infty$

- (b) f induit une bijection de $]1, +\infty[$ vers $]2, +\infty[$ dont la dérivée ne s'annule pas. Ainsi, sa réciproque g est dérivable sur $]2, +\infty[$ et, pour tout $y \in]2, +\infty[$, on a

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

- (c) Soit $y \in [2, +\infty[$. Alors pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f(t) = y &\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = y \\ &\Leftrightarrow t^2 + 1 = ty \\ &\Leftrightarrow t^2 - yt + 1 = 0. \end{aligned}$$

On cherche alors les racines du polynôme $X^2 - yX + 1$. Le discriminant de ce polynôme est $y^2 - 4$ qui est positif car $y \geq 2$. Les racines sont donc

$$t_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

On observe que $t_2 \geq \frac{y}{2} \geq 1$ mais que $t_1 < 1$ car

$$\begin{aligned} \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geq 1 &\Leftrightarrow y - \sqrt{y^2 - 4} \geq 2 \\ &\Leftrightarrow y^2 - (y^2 - 4) \geq 2(y + \sqrt{y^2 + 4}) \\ &\Leftrightarrow 4 \geq 2(y + \sqrt{y^2 + 4}) \\ &\Leftrightarrow 2 \geq y + \sqrt{y^2 + 4}, \end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant fausse puisque $y \geq 2$ et $\sqrt{y^2 + 4} > 0$.

Ainsi, $t_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$ est la seule solution dans $[1, +\infty[$ de l'équation $f(t) = y$. Il s'ensuit que $g(y) = t_2$. Autrement dit,

$$g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

Remarque : Si on préfère un argument moins calculatoire pour éliminer t_1 , on peut dire que d'après l'étude menée à la question 1, l'équation $f(t) = y$ admet deux solutions, l'une dans $]0, 1[$ et l'autre dans $[1, +\infty[$. Puisque $t_1 \leq t_2$, c'est nécessairement t_2 qui est la solution dans $[1, +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

4. Soit $(x, y) \in U$. On a

$$\begin{aligned} \partial_1(h)(x, y) &= (1 + y) \left[-\frac{1}{x^2}(1 + x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right] \\ &= (1 + y) \left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] \end{aligned}$$

$$= (1+y) \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} \right]$$

et, par symétrie,

$$\partial_2(h)(x,y) = (1+x) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \right].$$

En conclusion,

$$\nabla(h)(x,y) = \begin{bmatrix} (1+y) \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} \right] \\ (1+x) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \right] \end{bmatrix}$$

5. Soit $(x,y) \in U$. On a

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ point critique} &\Leftrightarrow \nabla(h)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (1+y) \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} \right] = 0 \\ (1+x) \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \right] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{y^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(x,y) \text{ point critique} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2. \end{cases}$$

6. Soit $(x,y) \in U$. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 1 = x^3 \end{cases} \text{ (car } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (1, 1).$$

Ainsi,

h admet $(1, 1)$ pour unique point critique.

7. (a) Soit $(x, y) \in U$. On a d'une part

$$2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) = 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x + y + xy) \\ &= \frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + x \\ &= 2 + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right).$$

(b) D'après l'étude menée en 1, pour tout $t > 0$, on a $f(t) \geq 2$ et donc, pour tout $(x, y) \in U$,

$$h(x, y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

mais

$$h(1, 1) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 2^3 = 8.$$

Ainsi,

$$\forall (x, y) \in U, \quad h(x, y) \geq h(1, 1).$$

Il s'ensuit que

h présente un minimum global en $(1, 1)$.

Partie C : Étude d'une suite

8. On montre par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que u_n existe et $u_n \geq 1$.

Pour $n = 1$, la propriété est évidemment vérifiée.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que u_n existe et $u_n \geq 1$. Alors $u_n + \frac{1}{n^2 u_n}$ est bien défini de sorte que u_{n+1} existe. En outre,

$$\frac{1}{n^2 u_n} \geq 0 \text{ de sorte que } u_{n+1} \geq u_n \geq 1.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n \text{ existe et } u_n \geq 1.$$

9. On propose le programme suivant :


```

function u = suite(n)
    u = 1
    for k = 1:n-1
        u = u+1/(k^2*u)
    end
endfunction

```

10. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2 u_n} \leq \frac{1}{n^2},$$

car $u_n \geq 1$ d'après 8. En outre, on a déjà observé que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ était croissante donc $v_n \geq 0$.
Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

(b) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente donc, d'après le théorème de comparaison qui s'applique du fait de l'inégalité établie en 10.a,

$$\sum_{n \geq 1} v_n \text{ converge.}$$

(c) Soit $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\
 &= \sum_{k=2}^n u_k - \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\
 &= u_n - u_1 \\
 &= u_n - 1.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - 1.$$

Alors

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$$

et donc

$$(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ converge.}$$

11. (a) Soit $k \geq 2$. Alors pour tout $t \in [k-1, k]$, on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{(k-1)^2}$$

et donc, en intégrant sur $[k-1, k]$, puisque les deux termes extrêmes sont constants, il vient

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{(k-1)^2}$$

et donc, en particulier,

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

(b) Soient n et p tels que $2 \leq p \leq n$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n-1} v_k &= \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \\ &= \sum_{k=p}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{n-1} u_k \\ &= \sum_{k=p+1}^n u_k - \sum_{k=p}^{n-1} u_k \\ &= u_n - u_p. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt &= \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt \quad (\text{relation de Chales}) \\ &\geq \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k^2} \quad (\text{d'après 11.a}) \\ &\geq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \quad (\text{d'après 10.a}) \\ &= u_n - u_p \quad (\text{d'après ce qui précède}). \end{aligned}$$

D'autre part, par croissance de (u_n) , on a bien $u_n - u_p \geq 0$. Ainsi,

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

(c) Si on applique l'inégalité précédente avec $p = 2$, on obtient

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt,$$

c'est-à-dire,

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1} \leq 1$$

et donc

$$u_2 \leq u_n \leq u_2 + 1.$$

Puisque $u_2 = u_1 + \frac{1}{u_1} = 2$, il vient que, pour tout $n \geq 3$,

$$2 \leq u_n \leq 3$$

et donc, en passant à la limite,

$$2 \leq \ell \leq 3.$$

(d) Soit $p \geq 2$ et $n \geq p$. On a

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n - u_p &\leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} \\ &= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, il vient

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}.$$

(e) On propose le programme suivant :

```
p = 2
while (1/(p-1) >= 10^(-4))
    p = p+1
end
u = suite(p)
disp(u)
```

□