HEC Paris - ESSEC BS 2019 - voie E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice

1. Dans cette question, on considère les matrices $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, $L = [1, 2, -1] \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbf{R})$ et le produit matriciel $M = CL$.

   (a) i. Calculer M et M^2.

   ii. Déterminer le rang de M.

   iii. La matrice M est-elle diagonalisable ?

   (b) i. Soit $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Justifier que P est inversible et calculer le produit $P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   ii. Trouver une matrice inversible Q dont la transposée ${}^tQ$ vérifie : ${}^tQ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   iii. Pour une telle matrice Q, calculer le produit PMQ.

2. La fonction *Scilab* suivante permet de multiplier la i-ème ligne L_i d'une matrice A par un réel sans modifier ses autres lignes, c'est-à-dire de lui appliquer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow aL_i$ (où $a \neq 0$).

```
function B=multlig(a,i,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for j=1:p
        B(i,j)=a*B(i,j)
    end
endfunction
```

   (a) Donner le code *Scilab* de deux fonctions `addlig` (d'arguments `b, i, j, A`) et `echlig` (d'arguments `i,j,A`) permettant d'effectuer respectivement les deux autres opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

$$L_i \leftarrow L_i + b_i (i \neq j) \quad \text{et} \quad L_i \leftrightarrow L_j (i \neq j).$$

   (b) Expliquer pourquoi la fonction `multligmat` suivante retourne le même résultat `B` que la fonction `multlig`.

```
function B = multligmat(a,i,A)
        [n,p] = size(A)
        D = eye(n,n)
        D(i,i) = a
        B = D*A
endfunction
```

3. Dans cette question, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang 1.
Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de sa i-ème ligne et de sa j-ème colonne, qui vaut 1.

   (a) i. Justifier l'existence d'une matrice-colonne non nulle $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et d'une matrice-ligne non nulle $L = [\ell_1, \dots, \ell_n] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ telles que $M = CL$.

   ii. Calculer la matrice MC et en déduire une valeur propre de M.

   iii. Montrer que si le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i$ est différent de 0, alors la matrice M est diagonalisable.

(b) i. À l'aide de l'égalité $M = CL$, établir l'existence de deux matrices inversibles P et Q telles que $PMQ = E_{1,1}$.

ii. En déduire que pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, il existe deux matrices inversibles P_i et Q_j telles que $P_i M Q_j = E_{i,j}$.

Solution :

1. (a) i. Un calcul matriciel direct donne :

$$\boxed{M = CL = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^2 = 0_3.}$$

ii. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(M) &= \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \dim \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{rg}(M) = 1.}$$

iii. On a $M^2 = 0$ donc X^2 est un polynôme annulateur de M. Il s'ensuit que la seule valeur propre possible pour M est 0. En outre, $\operatorname{rg}(M) = 1$ donc $0 \in \operatorname{Sp}(M)$. Ainsi,

$$\operatorname{Sp}(M) = \{0\}.$$

Puisque M admet une unique valeur propre et qu'elle n'est pas diagonale, il vient,

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

(b) i. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(P) &= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{rg}(P) = 3$ et donc

$$\boxed{P \text{ est inversible.}}$$

Un calcul direct donne

$$\boxed{P\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.}$$

ii. Soit $M=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$. On a

$$M\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}a\\d\\g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Posons alors

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

C'est une matrice de rang 3, elle est donc inversible et il suit de la discussion précédente que

$$R^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

On pose donc

$$\boxed{Q={}^tR^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix}.}$$

iii. On a

$$\begin{aligned}PMQ&=PCLQ\\&=PC[1,0,0]\\&=P\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{PMQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.}$$

2. (a) On propose les programmes suivants :

```
function B=addlig(b,i,j,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for k = 1:p
        B(i,k) = A(i,k)+b*A(j,k)
    end
endfunction
```

et

```
function B=echlig(i,j,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for k=1:p
        B(i,k) = A(j,k)
        B(j,k) = A(i,k)
    end
endfunction
```

(b) La matrice D est une matrice diagonale avec des 1 partout sur la diagonale sauf à l'entrée (i,i) qui vaut a. On sait alors (ou on le vérifie à l'aide de la formule du produit matriciel) que multiplier A par D à gauche (à droite, respectivement) revient à multiplier la i-ème ligne (colonne, respectivement) de A par a.

Ainsi,

$$\boxed{\text{le programme } \texttt{multligmat} \text{ effectue bien l'opération } L_i \leftarrow aL_i.}$$

3. (a) i. Si on note $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de M, on a $\mathrm{rg}(M) = 1$ donc toutes les lignes sont colinéaires et il en existe au moins une non nulle. Autrement dit, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $L_{i_0} \neq 0$ et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $c_i \in \mathbf{R}$ tel que $L_i = c_i L_{i_0}$. Posons alors $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ et $L = L_{i_0}$. Alors

$$\boxed{CL = \begin{bmatrix} c_1 L_{i_0} \\ c_2 L_{i_0} \\ \vdots \\ c_n L_{i_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = M.}$$

ii. On a

$$\begin{aligned} MC &= CLC \\ &= C\left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) C \end{aligned}$$

et $C \neq 0$ donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i \in \mathrm{Sp}(M).}$$

iii. $\mathrm{rg}(M) = 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\dim E_0(M) = n - \mathrm{rg}(M) = n - 1$.

Posons $\sigma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i$. Si $\sigma \neq 0$, on a $\dim E_\sigma(M) \geq 1$ et donc, puisque la somme des dimensions des espaces propres ne peut excéder n, on a

$$\dim E_0(M) + \dim E_\sigma(M) = n.$$

Ainsi,

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$$

(b) i. Le sujet semble vouloir nous orienter vers un argument calculatoire alors qu'un argument conceptuel général est à portée de main et semble plus éclairant, nous privilégierons donc cette seconde approche.
Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = M$.
Puisque f est non-nul, il existe $u_1 \in \mathbf{R}^n$ tel que $f(u_1) \neq 0$. Soit $(u_2, \ldots, u_n)$ une base de $\ker(f)$, alors

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_n)$$

est une base de $\mathbf{R}^n$ (on vérifie facilement qu'elle est libre et elle a le bon nombre de vecteurs).
Posons $v_1 = f(u_1) \neq 0$ et complétons v_1 en une base

$$\mathcal{B}_2 = (v_1, \ldots, v_n)$$

de $\mathbf{R}^n$.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = E_{1,1}.$$

Autrement dit, si on pose $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}$ et $Q = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2}$, on a

$$\boxed{PMQ = E_{1,1}.}$$

ii. On reprend la construction précédente, en posant

$$\mathcal{B}_1' = (u_2, \ldots, u_{j-1}, u_1, u_{j+1}, \ldots, u_n),$$

$$\mathcal{B}_2' = (v_2, \ldots, v_{i-1}, v_1, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$

$$P_i = P_{\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_0} \quad \text{et} \quad Q_j = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2'}.$$

Alors,

$$\boxed{P_i M Q_j = E_{i,j}.}$$

□

Problème

Dans ce problème, on définit et on étudie les fonctions génératrices des moments et les fonctions génératrices des cumulants de variables aléatoires discrètes ou à densité.
Les cumulants d'ordre 3 et 4 permettent de définir des paramètres d'asymétrie et d'aplatissement qui viennent compléter la description usuelle d'une loi de probabilité par son espérance (paramètre de position) et sa variance (paramètre de dispersion) ; ces cumulants sont notamment utilisés pour l'évaluation des risques financiers.

Dans tout le problème :

- on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$;
- sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X sont respectivement notées $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$;
- pour toute variable aléatoire X et pour tout réel t pour lesquels la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance, on pose :
$$M_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{tX}\right] \quad \text{et} \quad K_X(t) = \ln(M_X(t)) \ ;$$
(les fonctions M_X et K_X sont respectivement appelées la *fonction génératrice des moments* et la *fonction génératrice des cumulants* de X)
- lorsque, pour un entier $p \in \mathbf{N}^*$, la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^p$ sur un intervalle ouvert contenant l'origine, on appelle *cumulant d'ordre* p de X, noté $Q_p(X)$, la valeur de la dérivée p-ème de K_X en 0 :
$$Q_p(X) = K_X^{(p)}(0).$$

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

Dans toute cette partie :

- on note n un entier supérieur ou égal à 2 ;
- toutes les variables aléatoires considérées sont discrètes et à valeurs entières ;
- on note S une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dont la loi est donnée par :
$$\mathbf{P}(S=-1) = \mathbf{P}(S=1) = \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$.
   (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, écrire $M_X(t)$ sous la forme d'une somme et en déduire que la fonction M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
   (b) Justifier pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, l'égalité : $M_X^{(p)}(0) = \mathbf{E}[X^p]$.
   (c) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ dont la fonction génératrice des moments M_Y est la même que celle de X.
   On note G_X et G_Y les deux polynômes définis par :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} G_X(x) & = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(X = k-n)\, x^k \\ G_Y(x) & = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(Y = k-n)\, x^k. \end{cases}$$
      i. Vérifier pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'égalité $G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t)$.
      ii. Justifier la relation : $\forall t \in \mathbf{R}$, $G_X(e^t) = G_Y(e^t)$.
      iii. En déduire que la variable aléatoire Y suit la même loi que X.

2. Dans cette question, on note X_2 une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$.
   On suppose que les variables aléatoire X_2 et S sont indépendantes et on pose $Y_2 = SX_2$.
   (a) i. Préciser l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire Y_2.
      ii. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(Y_2 = y)$ attachées au diverses valeurs possibles y de Y_2.

(b) Vérifier que la variable aléatoire $X_2 - (S+1)$ suit la même loi que Y_2.

3. Le script *Scilab* suivant permet d'effectuer des simulations de la variable aléatoire Y_2 définie dans la question précédente.

```
(1)        n = 10
(2)       X = grand(n,2,'bin',2,0.5)
(3)       B = grand(n,2,'bin',1,0.5)
(4)       S = 2*B-ones(n,2)
(5)       Z1 = [S(1:n,1).*X(1:n,1),X(1:n,1)-S(1:n,1)-ones(n,1)]
(6)        Z2 = [S(1:n,1).*X(1:n,1),X(1:n,2)-S(1:n,2)-ones(n,1)]
```

(a) Que contiennent les variables `X` et `S` après l'exécution des quatre premières instructions ?

(b) Expliquer pourquoi, après l'exécution des six instructions, chacun des coefficients des matrices `Z1` et `Z2` contient une simulation de la variable aléatoire Y_2.

(c) On modifie la première ligne du script précédent en affectant à `n` une valeur beaucoup plus grande que 10 (par exemple 100000) et en lui adjoignant les deux instructions `(7)` et `(8)` suivantes :

```
(7)        p1 = length(find(Z1(1:n,1)==Z1(1:n,2)))/n
(8)        p2 = length(find(Z2(1:n,1)==Z2(1:n,2)))/n
```

Quelles valeurs numériques approchées la loi faible des grands nombres permet-elle de fournir pour `p1` et `p2` après l'exécution des huit lignes du nouveau script ?

Dans le langage *Scilab*, la fonction `length` fournit la « longueur »d'un vecteur ou d'une matrice et la fonction `find` calcule les positions des coefficients d'une matrice pour lesquels une propriété est vraie, comme l'illustre le script suivant :

```
--> A = [1;2;0;4]
--> B = [2;2;4;3]
--> length(A)
ans = 4.
--> length([A,B])
ans = 8.
--> find(A<B)
ans = 1. 3. //car 1<2 et 0<4, alors que 2 >=2 et 4>=3
```

4. Dans cette question, on note X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

On suppose que les variables aléatoires X_n et S sont indépendantes et on pose $Y_n = SX_n$.

(a) Justifier que la fonction M_{X_n} est définie sur $\mathbf{R}$ et calculer $M_{X_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

(b) Montrer que la fonction M_{Y_n} est donnée par : $\forall t \in \mathbf{R}$, $M_{Y_n}(t) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\left((1+e^t)^n + (1+e^{-t})^n\right)$.

(c) En utilisant l'égalité $(1+e^{-t})^n = e^{-nt}(1+e^t)^n$, montrer que Y_n suit la même loi que la différence $X_n - H_n$, où H_n est une variable aléatoire indépendante de X_n dont on précisera la loi.

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. Soit X une variable aléatoire et $\mathcal{D}_X$ le domaine de définition de la fonction K_X.

(a) Donner la valeur de $K_X(0)$.

(b) Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $Y = aX + b$. Justifier pour tout réel t pour lequel at appartient à $\mathcal{D}_X$, l'égalité :

$$K_Y(t) = bt + K_X(at).$$

(c) On suppose ici que les variables aléatoires X et $-X$ suivent la même loi.

Que peut-on dire dans ce cas des cumulants d'ordre impair de la variable aléatoire X ?

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$ les domaines de définition respectifs des fonctions K_X et K_Y.

(a) Montrer que pour tout réel t appartenant à la fois à $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_Y$, on a : $K_{X+Y}(t) = K_X(t) + K_Y(t)$.

(b) En déduire une relation entre les cumulants des variables aléatoires X, Y et $X+Y$.

7. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

(a) Montrer que la fonction M_U est définie sur $\mathbf{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbf{R}$, $M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$

(b) Calculer la dérivée de la fonction M_U en tout point $t \neq 0$.

(c) Trouver la limite du quotient $\dfrac{M_U(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.

(d) Montrer que la fonction M_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

8. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.
Dans cette question, on note X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$.

(a) Exprimer K_X en fonction de M_U, où la variable aléatoire U a été définie dans la question 7.

(b) Justifier que la fonction K_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et établir l'égalité : $Q_1(X) = \mathbf{E}[X]$.

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

(a) Déterminer les fonctions M_T et K_T.

(b) En déduire tous les cumulants de T.

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(a) Justifier pour tout $t \in \mathbf{R}$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right)\, dx$.

(b) Montrer que la fonction M_Z est définie sur $\mathbf{R}$ et donnée par : $\forall t \in \mathbf{R}$, $M_Z(t) = \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

(c) En déduire la valeur de tous les cumulants d'une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu \in \mathbf{R}$ et d'écart-type $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$.

11. Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

(a) Justifier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(W_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ vers une variable aléatoire W.

(b) Déterminer la fonction K_{W_n}.

(c) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} K_{W_n}(t) = K_W(t)$.

Partie III. Cumulant d'ordre 4.

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X telle que M_X est de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle ouvert I contenant l'origine.
On *admet* alors que X possède des moments jusqu'à l'ordre 4 qui coïncident avec les dérivées successives de la fonction M_X en 0. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, on a $M_X^{(k)}(0) = \mathbf{E}\left[X^k\right]$.
De plus, on pose : $\mu_4(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^4\right]$.

12. Justifier les égalités : $Q_1(X) = \mathbf{E}[X]$ et $Q_2(X) = \mathbf{V}(X)$.

13. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose $S = X_1 - X_2$.

(a) Montrer que la variable aléatoire S possède un moment d'ordre 4 et établir l'égalité :

$$\mathbf{E}\left[S^4\right] = 2\mu_4(X) + 6(\mathbf{V}(X))^2.$$

(b) Montrer que les fonctions M_S et K_S sont de classe $\mathcal{C}^4$ sur I et que pour tout $t \in I$, on a :

$$M_S^{(4)}(t) = K_S^{(4)}(t) M_S(t) + 3K_S^{(3)}(t) M_S'(t) + 3K_S''(t) M_S''(t) + K_S'(t) M_S^{(3)}(t).$$

(c) En déduire l'égalité : $\mathbf{E}\left[S^4\right] = Q_4(S) + 3(\mathbf{V}(S))^2$.

14. Justifier que le cumulant d'ordre 4 de X est donné par la relation : $Q_4(X) = \mu_4(X) - 3(\mathbf{V}(X))^2$.

Solution :

Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

1. (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, il suit du théorème de transfert que

$$M_X(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{kt} \mathbf{P}\left(X = k\right).$$

Or, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, $t \mapsto e^{kt}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Ainsi, par combinaison linéaire,

$$\boxed{M_X \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

(b) Pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, on montre par une récurrence immédiate sur p que la dérivée p-ème de $t \mapsto e^{kt}$ est $t \mapsto k^p e^{kt}$. Ainsi, par somme,

$$M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} k^p e^{kt} \mathbf{P}\left(X = k\right)$$

et donc, d'après le théorème de transfert,

$$\boxed{M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^{n} k^p \mathbf{P}\left(X = k\right) = \mathbf{E}\left[X^p\right].}$$

(c) i. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} G_X(e^t) &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}\left(X = k - n\right) e^{kt} \\ &= \sum_{\substack{j=-n \\ (j=k-n)}}^{n} \mathbf{P}\left(X = j\right) e^{(j+n)t} \\ &= e^{nt} \sum_{j=-n}^{n} \mathbf{P}\left(X = j\right) e^{jt} \\ &= e^{nt} M_X(t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t).}$$

ii. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $M_X(t) = M_Y(t)$ donc, d'après la question précédente,

$$G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t) = e^{nt} M_Y(t) = G_Y(e^t).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_X(e^t) = G_Y(e^t).}$$

iii. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}\left(X = k - n\right) e^{kt} = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}\left(Y = k - n\right) e^{kt}.$$

Or les fonctions $t \mapsto e^{kt}$ pour $k \in [\![0, 2n]\!]$ sont linéairement indépendantes (on peut le vérifier « à la main » ou observer que chaque fonction $t \mapsto e^{kt}$ est vecteur propre associé à la valeur propre k pour l'application linéaire $\delta : f \mapsto f'$ et invoquer le fait qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est toujours libre).
Ainsi, on peut identifier les coefficients dans les deux membres et il s'ensuit que

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \mathbf{P}(X = k - n) = \mathbf{P}(Y = k - n)$$

et donc, en posant $j = k - n$, on a

$$\forall k \in [\![-n, n]\!], \quad \mathbf{P}(X = j) = \mathbf{P}(Y = j).$$

Ainsi,

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$$

2. (a) i. $S(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ donc, par produit,

$$\boxed{Y_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = [\![-2, 2]\!].}$$

ii. Dressons le tableau croisé des valeurs de Y_2 en fonction des valeurs de S et de X_2.

S \ X_2	0	1	2
-1	0	-1	-2
1	0	1	2

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_2 = -2) &= \mathbf{P}(S = -1, X_2 = 2) \\ &= \mathbf{P}(S = -1)\,\mathbf{P}(X_2 = 2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_2 = -1) &= \frac{1}{4}, \\ \mathbf{P}(Y_2 = 0) &= \frac{1}{4}, \\ \mathbf{P}(Y_2 = 1) &= \frac{1}{4}, \\ \mathbf{P}(Y_2 = 2) &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

En résumé :

y	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(Y_2 = y)$	$1/8$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/8$

(b) Dressons le tableau croisé des valeurs de $X_2 - (S + 1)$ en fonction des valeurs de S et de X_2.

S \ X_2	0	1	2
-1	0	1	2
1	-2	-1	0

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_2-(S+1)=-2\right) &= \mathbf{P}\left(S=1, X_2=0\right)\\ &= \mathbf{P}\left(S=1\right)\mathbf{P}\left(X_2=0\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

De même, on calcule les autres probabilités et on obtient :

y	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}\left(X_2-(S+1)=y\right)$	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

3. (a) `X` contient une matrice à n lignes et 2 colonnes de simulations de X_2.
   `S` contient une matrice à n lignes et 2 colonnes de simulations de S.

   (b) Chaque ligne de `Z1` contient une simulation du couple $(SX_2, X_2-(S+1))$.
   Chaque ligne de `Z2` contient une simulation du couple $(SX_2, X_2'-(S'+1))$ où X_2' et S' sont des variables aléatoires de même loi que X_2 et S respectivement et indépendantes de ces variables.

   (c) D'après la loi faible des grands nombres,

$$\texttt{p1}\approx\mathbf{P}\left(SX_2=X_2-(S+1)\right)$$

et

$$\texttt{p2}\approx\mathbf{P}\left(SX_2=X_2'-(S'+1)\right).$$

Or, comme on l'observe aisément à partir des tableaux croisés,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(SX_2=X_2-(S+1)\right) &= \mathbf{P}\left(X_2=0, S=-1\right)\\ &= \mathbf{P}\left(X_2=0\right)\mathbf{P}\left(S=-1\right)\\ &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

et, d'autre part, si on pose $Y_2'=X_2'-(S'+1)$ qui est donc indépendante et de même loi que Y_2, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(SX_2=X_2'-(S'+1)\right) &= \mathbf{P}\left(Y_2=Y_2'\right)\\ &= \sum_{k=-n}^{n}\mathbf{P}\left(Y_2=k, Y_2'=k\right)\\ &= \sum_{k=-n}^{n}\mathbf{P}\left(Y_2=k\right)^2\\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2\\ &= \frac{7}{32}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\texttt{p1}\approx\frac{1}{8}\quad\text{et}\quad\texttt{p2}\approx\frac{7}{32}.}$$

Remarque : Une exécution du script Scilab proposé a renvoyé `p1 = 0.1244` et `p2 = 0.21921` alors que $\frac{1}{8} = 0.125$ et $\frac{7}{32} = 0.21875$. Ces observations sont donc bien en accord avec nos résultats (ouf!).

4. (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on e^{tX_n} prend un nombre fini de valeurs donc admet une espérance, ce qui prouve que $M_{X_n}(t)$ est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$. En outre, avec $p = q = \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{kt}\mathbf{P}\left(X_n = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{kt}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(pe^t)^k q^{n-k} \\ &= (q + pe^t)^n \\ &= \frac{1 + e^t}{2^n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_{X_n}(t) = \frac{1+e^t}{2^n}.}$$

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{kt}\mathbf{P}\left(Y_n = k\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{kt}\left(\mathbf{P}\left(Y_n = k, S = -1\right) + \mathbf{P}\left(Y_n = k, S = 1\right)\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{n} e^{kt}\left(\mathbf{P}\left(X_n = -k, S = -1\right) + \mathbf{P}\left(X_n = k, S = 1\right)\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{0} e^{kt}\mathbf{P}\left(X_n = -k, S = -1\right) + \sum_{k=0}^{n} e^{kt}\mathbf{P}\left(X_n = k, S = 1\right) \\ &= \sum_{k=-n}^{0} \frac{e^{kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = -k\right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = k\right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(M_X(-t) + M_X(t)\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+e^{-t})^n + (1+e^t)^n\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+e^{-t})^n + (1+e^t)^n\right).}$$

(c) On a, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\left[e^{-nt}(1+e^t)^n + (1+e^t)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}(1+e^t)^n \left[1+e^{-nt}\right]$$
$$= M_{X_n}(t) \times \frac{1+e^{-nt}}{2}.$$

Considérons alors une variable aléatoire H_n indépendante de X_n et de loi uniforme sur $\{0, n\}$. On a donc

$$M_{H_n}(t) = \frac{1+e^{nt}}{2}.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
M_{X_n - H_n}(t) &= \mathbf{E}\left[e^{t(X_n - H_n)}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[e^{tX_n}e^{-tH_n}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[e^{tX_n}\right]\mathbf{E}\left[e^{-tH_n}\right] \quad \text{(par indépendance)} \\
&= M_{X_n}(t)M_{H_n}(-t) \\
&= M_{X_n}(t) \times \frac{1+e^{-nt}}{2} \\
&= M_{Y_n}(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, Y_n et $X_n - H_n$ ont la même fonction génératrice des moments et en outre $(X_n - H_n)(\Omega) = [\![-n, n]\!] = Y_n(\Omega)$ de sorte qu'il suit de 1.c que

$$\boxed{Y_n \text{ et } X_n - H_n \text{ ont la même loi.}}$$

Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. (a) On a $K_X(0) = \ln(M_X(0))$ mais
$$M_X(0) = \mathbf{E}\left[e^{0X}\right] = \mathbf{E}[1] = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{K_X(0) = 0.}$$

(b) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On a, pour tout t tel que $at \in D_X$,

$$\begin{aligned}
K_Y(t) &= \ln(M_Y(t)) \\
&= \ln(\mathbf{E}\left[e^{tY}\right]) \\
&= \ln(\mathbf{E}\left[e^{atX+tb}\right]) \\
&= \ln(e^{tb}\mathbf{E}\left[e^{atX}\right]) \\
&= tb + \ln(M_X(at)) \\
&= tb + K_X(at).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{K_{aX+b}(t) = tb + K_X(at).}$$

(c) Si X et $-X$ ont la même loi, on a $K_X = K_{-X}$ mais, pour tout t, on a $K_{-X}(t) = \mathbf{E}\left[e^{t(-X)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{-tX}\right] = K_X(-t)$ et donc K_X est paire.
Or on sait que la dérivée d'une fonction paire (respectivement impaire) est une fonction impaire (respectivement paire). Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $K_X^{(2p+1)}$ est impaire et donc en particulier

$$\boxed{Q_{2k+1}(X) = K_X^{(2k+1)}(0) = 0.}$$

6. (a) Soit $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$. Puisque X et Y sont indépendantes, il suit du lemme des coalitions que e^{tX} et e^{tY} le sont aussi. Alors,

$$\begin{aligned}
K_{X+Y}(t) &= \ln(M_{X+Y}(t)) \\
&= \ln(\mathbf{E}\left[e^{t(X+Y)}\right]) \\
&= \ln(\mathbf{E}\left[e^{tX}e^{tY}\right]) \\
&= \ln(\mathbf{E}\left[e^{tX}\right]\mathbf{E}\left[e^{tY}\right]) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \ln(M_X(t)) + \ln(M_Y(t)) \\
&= K_X(t) + K_Y(t).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{K_{X+Y} = K_X + K_Y.}$$

(b) Par linéarité de la dérivation, on a, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$K_{X+Y}^{(p)} = K_X^{(p)} + K_Y^{(p)}.$$

En évaluant en 0, on obtient

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*, Q_p(X+Y) = Q_p(X) + Q_p(Y).}$$

7. (a) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}
M_U(t) &= \mathbf{E}\left[e^{tU}\right] \\
&= \int_0^1 e^{tu}\, du \quad \text{(théorème de transfert)} \\
&= \begin{cases} \left[\dfrac{e^{tu}}{t}\right]_0^1 & \text{si} \quad t \neq 0 \\[2ex] \int_0^1 du & \text{si} \quad t = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\[2ex] 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\[2ex] 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}}$$

(b) La fonction M_U est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. Alors

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}^*, \quad M_U'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}.}$$

(c) Soit $t \neq 0$. Alors, en procédant à un développement limité en 0, on a

$$\begin{aligned}
\frac{M_U(t)-1}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{e^t-1}{t}-1\right) \\
&= \frac{1}{t^2}(e^t-(1+t)) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)-(1+t)\right) \\
&= \frac{1}{2}+o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{M_U'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{M_U(t)-1}{t} = \frac{1}{2}.}$$

(d) M_U' est continue sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. En outre, si $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}
M_U'(t) &= \frac{te^t-e^t+1}{t^2} \\
&= \frac{t(1+t+o(t))-(1+t+t^2/2+o(t^2))+1}{t^2} \\
&= \frac{t+t^2-1-t-t^2/2+o(t^2))+1}{t^2} \\
&= \frac{t^2/2}{t^2}+o(1) \\
&\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} = M_U'(0).
\end{aligned}$$

Il suit alors du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ que

$$\boxed{M_U \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

8. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

(a) Puisque $U \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$, on a $(\beta-\alpha)U+\alpha \rightsquigarrow \mathcal{U}([\alpha,\beta])$. Ainsi, il suit du 5.b que

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad K_X(t) = K_{(\beta-\alpha)U+\alpha}(t) = \alpha t + K_U((\beta-\alpha)t).}$$

(b) Puisque M_U est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et à valeurs strictement positives (ce que l'on vérifie par une rapide disjonction de cas), $K_U = \ln \circ M_U$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Il suit alors de la question précédente que, par composition et somme avec des fonctions affines,

$$\boxed{K_X \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

En outre, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$K_X'(t) = \alpha + (\beta-\alpha)K_U'((\beta-\alpha)t)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
Q_1(X) &= K_X'(0) \\
&= \alpha + (\beta-\alpha)K_U'(0)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha + (\beta - \alpha)\frac{M_U'(0)}{M_U(0)} \\
&= \alpha + (\beta - \alpha)\frac{1/2}{1} \quad \text{(d'après 7)} \\
&= \alpha + (\beta - \alpha)\mathbf{E}[U] \\
&= \mathbf{E}[\alpha + (\beta - \alpha)U] \\
&= \mathbf{E}[X].
\end{aligned}
$$

On a donc bien,

$$
\boxed{Q_1(X) = \mathbf{E}[X].}
$$

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit T une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.

   (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$
\begin{aligned}
M_T(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{kt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \exp(\lambda e^t) \\
&= \exp(\lambda(e^t - 1)).
\end{aligned}
$$

   et

$$
\begin{aligned}
K_T(t) &= \ln(M_T(t)) \\
&= \lambda(e^t - 1).
\end{aligned}
$$

   En conclusion,

$$
\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_T(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) \quad \text{et} \quad K_T(t) = \lambda(e^t - 1).}
$$

   (b) On montre par une récurrence immédiate sur $p \in \mathbf{N}^*$ que

$$
\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad K_T^{(p)}(t) = \lambda e^t
$$

   de sorte que

$$
\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad Q_p(T) = K_T^{(p)}(0) = \lambda.}
$$

10. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

   (a) Soit $t \in \mathbf{R}$. La fonction $x \mapsto e^{tx - \frac{x^2}{2}}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$ donc intégrable sur tout segment. En particulier, $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{tx - \frac{x^2}{2}}\, dx$ converge.
   Par ailleurs,

$$
e^{tx - \frac{x^2}{2}} \underset{x \to \pm\infty}{=} o\left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right) \underset{x \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).
$$

Puisque les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ convergent, il suit du théorème de comparaison que les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx$ convergent.
Il s'ensuit que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-\frac{x^2}{2}}\,dx \text{ converge.}}$$

(b) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-x^2/2}\,dx \end{aligned}$$

qui est une intégrale convergente d'après la question précédente, de sorte que M_Z est définie sur $\mathbf{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-x^2/2}\,dx \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2+tx-x^2/2}\,dx \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\,dx \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,dx \quad (\text{C.V. : } u = x-t) \\ &= e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_Z(t) = e^{t^2/2}.}$$

(c) Soit $m \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$, $N \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors $\sigma Z + m \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} K_N(t) &= K_{\sigma Z+m}(t) \\ &= mt + K_Z(\sigma t) \quad (\text{d'après 5.b}) \\ &= mt + \ln(\exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2})) \quad (\text{d'après 10.b}) \\ &= mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$K_N'(t) = m + \sigma^2 t, \quad K_N''(t) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \forall p \geq 3, \quad K_N^{(p)}(t) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad Q_p(N) = \begin{cases} m & \text{si} \quad p = 1 \\ \sigma^2 & \text{si} \quad p = 2 \\ 0 & \text{si} \quad p \geq 3. \end{cases}}$$

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire T_n suit la loi de Poisson de paramètre n. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

(a) Considérons $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de loi $\mathcal{P}(1)$, chaque variable aléatoire a donc une espérance égale à 1 et une variance égale à 1 également. D'après le théorème de stabilité pour la loi de Poisson, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \mathcal{P}(n)$$

et donc, d'après le théorème de la limite centrée, on a

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Puisque T_n et S_n ont la même loi, si on considère W une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a donc

$$\boxed{W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} W.}$$

(b) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} M_{W_n}(t) &= \mathbf{E}\left[e^{t\left(\frac{T_n-n}{\sqrt{n}}\right)}\right] \\ &= e^{-\sqrt{n}t}\mathbf{E}\left[e^{t\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}}\right)}\right] \\ &= e^{-\sqrt{n}}M_{T_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, donc

$$\begin{aligned} K_{W_n}(t) &= \ln(M_{W_n}(t) \\ &= -\sqrt{n} + K_{T_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= -\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) \quad \text{(d'après 9.a).} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad K_{W_n}(t) = -\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1).}$$

(c) Si on pose $u = \frac{t}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut utiliser le développement limité $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ et on obtient

$$e^{t/\sqrt{n}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) = \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(()\,1)$$

et donc

$$K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1),$$

et donc, d'après 10.b,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} = K_W(t).}$$

Partie III. Cumulant d'ordre 4.

12. On a
$$Q_1(X) = K'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{\mathbf{E}[X]}{1} = \mathbf{E}[X]$$
et
$$Q_2(X) = K''_X(0) = \frac{M''_X(0)M_X(0) - M'_X(0)^2}{M_X(0)^2} = \frac{\mathbf{E}\left[X^2\right] \times 1 - \mathbf{E}[X]^2}{1^2} = \mathbf{V}(X).$$
Ainsi, on a bien
$$\boxed{Q_1(X) = \mathbf{E}[X] \quad \text{et} \quad Q_2(X) = \mathbf{V}(X).}$$

13. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose $S = X_1 - X_2$.
   (a) On a
$$S^4 = (X_1 - X_2)^4 = X_1^4 - 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3 + X_2^4$$
donc, comme X_1 et X_2 sont indépendantes et de même loi que X, on a
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[S^4\right] &= \mathbf{E}\left[X_1^4\right] - 4\mathbf{E}\left[X_1^3\right]\mathbf{E}[X_2] + 6\mathbf{E}\left[X_1^2\right]\mathbf{E}\left[X_2^2\right] - 4\mathbf{E}[X_1]\mathbf{E}\left[X_2^3\right] + \mathbf{E}\left[X_2^4\right] \\ &= \mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}[X] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2.\end{aligned}$$
Par ailleurs,
$$(X - \mathbf{E}[X])^4 = X^4 - 4X^3\mathbf{E}[X] + 6X^2\mathbf{E}[X]^2 - 4X\mathbf{E}[X]^3 + \mathbf{E}[X]^4$$
donc
$$\mu_4(X) = \mathbf{E}\left[X^4\right] - 4\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}[X] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 - 4\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[X]^3 + \mathbf{E}[X]^4$$
et donc
$$2\mu_4(X) = 2\mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}[X] + 12\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 - 6\mathbf{E}[X]^4.$$
Enfin,
$$\mathbf{V}(X)^2 = (\mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2)^2 = \mathbf{E}\left[X^2\right]^2 - 2\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 + \mathbf{E}[X]^4$$
de sorte que
$$6\mathbf{V}(X)^2 = 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2 - 12\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 + 6\mathbf{E}[X]^4.$$
Ainsi, en effectuant la différence
$$\begin{aligned}2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}(X)^2 &= 2\mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}[X]\mathbf{E}\left[X^3\right] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2 \\ &= \mathbf{E}\left[S^4\right].\end{aligned}$$
On a donc bien
$$\boxed{\mathbf{E}\left[S^4\right] = 2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}(X)^2.}$$
   (b) On a $M_S = e^{K_S}$ donc
$$M'_S = K'_S e^{K_S} = K'_S M_S.$$
Alors,
$$M_S^{(4)} = (M'_S)^{(3)} = (K'_S M_S)^{(3)}$$
et d'après la formule de Leibniz
$$\boxed{M_S^{(4)} = K_S^{(4)}M_S + 3K_S^{(3)}M'_S + 3K''_S M''_S + K'_S M_S^{(3)}.}$$

(c) En évaluant en 0 l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned}M_S^{(4)}(0) &= K_S^{(4)}(0)M_S(0) + 3K_S^{(3)}(0)M_S'(0) + 3K_S''(0)M_S''(0) + K_S'(0)M_S^{(3)}(0)\\ &= Q_4(S) + 3Q_3(S)M_S'(0) + 3Q_2(S)M_S''(0) + Q_1(S)M_S^{(3)}(0).\end{aligned}$$

Mais, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$K_S(t) = K_{X_1-X_2}(t) = K_{X_1}(t) + K_{-X_2}(t) = K_X(t) + K_X(-t)$$

de sorte que K_S est paire et donc K_S' et $K_S^{(3)}$ sont impaires. Ainsi, $Q_1(S) = Q_3(S) = 0$. Il s'ensuit que

$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3Q_2(S)M_S''(0).$$

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$M_S(t) = M_{X_1-X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(-t) = M_X(t)M_X(-t)$$

de sorte que

$$M_S''(t) = M_X''(t)M_X(-t) - 2M_X'(t)M_X'(-t) + M_X(t)M_X''(-t)$$

et donc

$$\begin{aligned}M_S''(0) &= M_X''(0)M_X(0) - 2M_X'(0)^2 + M_X(0)M_X''(0)\\ &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - 2\mathbf{E}\left[X\right]^2 + \mathbf{E}\left[X^2\right]\\ &= 2\mathbf{E}\left[X^2\right] - 2\mathbf{E}\left[X\right]^2\\ &= 2\mathbf{V}\left(X\right)\\ &= \mathbf{V}\left(S\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3Q_2(S)\mathbf{V}\left(S\right)$$

mais comme $K_S(t) = K_X(t) + K_X(-t)$, il vient

$$Q_2(S) = 2Q_2(X) = 2\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{V}\left(S\right)$$

et donc

$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3\mathbf{V}\left(S\right)^2.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $M_S^{(4)} = \mathbf{E}\left[S^4\right]$. Pour cela, on part de l'identité, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$M_S(t) = M_X(t)M_X(-t)$$

que l'on dérive quatre fois à l'aide de la formule de Leibniz :

$$M_S^{(4)}(t) = M_X^{(4)}(t)M_X(-t) - 4M_X^{(3)}(t)M_X'(-t) + 6M_X''(t)M_X''(-t) - 4M_X'(t)M_X^{(3)}(-t) + M_X(t)M_X^{(4)}(-t).$$

En évaluant en 0, on obtient ainsi,

$$\begin{aligned}M_S^{(4)}(0) &= M_X^{(4)}(0)M_X(0) - 4M_X^{(3)}(0)M_X'(0) + 6M_X''(0)M_X''(0) - 4M_X'(0)M_X^{(3)}(0) + M_X(0)M_X^{(4)}(0)\\ &= \mathbf{E}\left[X^4\right] - 4\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}\left[X\right] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2 - 4\mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[X^3\right] + \mathbf{E}\left[X^4\right]\\ &= 2\mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[X^3\right] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2\\ &= \mathbf{E}\left[S^4\right].\end{aligned}$$

En conclusion [a], on a bien

$$\boxed{\mathbf{E}\left[S^4\right] = Q_4(S) + 3\mathbf{V}\left(S\right)^2.}$$

14. En recoupant 13.a et 13.c, puisque $\mathbf{V}(S) = 2\mathbf{V}(X)$ et $Q_4(S) = 2Q_4(X)$, on a

$$\begin{aligned} Q_4(S) + 3\mathbf{V}(S)^2 = 2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}(X)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2Q_4(X) + 12\mathbf{V}(X)^2 = 2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}(X)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2Q_4(X) = 2\mu_4(X) - 6\mathbf{V}(X)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad Q_4(X) = \mu_4(X) - 3\mathbf{V}(X)^2 . \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{Q_4(X) = \mu_4(X) - 3\mathbf{V}(X)^2 .}$$

□

a. avec tout de même l'impression d'avoir fait un long détour et loupé un chemin plus direct...