EDHEC - 2019 - VOIE E

Correction proposée par G. Dupont pour www.maths-concours.fr

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ et $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice est I.

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2. On pose $A = N + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
3. (a) Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.
   (b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.
4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
   (a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.
   (b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\ker(f - \mathrm{id})$.
5. (a) Montrer que (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbf{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.
6. Soit la matrice $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.
7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.
   (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
   (b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Établir l'équivalence :
   $$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP).$$
   (c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ engendré par la famille $(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.

Solution :

1. (a) On a
   $$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
   donc
   $$\boxed{(A - I)^2 = 0_3.}$$
   (b) On a
   $$(A - I)^2 = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad A^2 - 2A + I = 0_3$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad A^2 - 2A = -I \\ &\Leftrightarrow \quad A(2I - A) = I. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = 2I - A.}$$

2. On pose $A = N + I$.

   (a) On commence par observer que $N = A - I$ de sorte que $N^2 = 0$. Par ailleurs, puisque $NI = N = IN$, on peut appliquer la formule du binôme et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

   $$\begin{aligned} A^n &= (N+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k \quad (\text{car } N^2 = 0) \\ &= N^0 + nN \\ &= I + nN \\ &= I + n(A - I) \\ &= nA - (n-1)I. \end{aligned}$$

   On a donc,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad A^n = I + nN = nA - (n-1)I.}$$

   (b) Pour $n = -1$, le membre de gauche vaut $A^{-1} = 2I - A$ d'après 1.b et le membre de droite vaut $-A-(-2)I = 2I - A$. Ainsi,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \sqcup \{-1\}, \quad A^n = nA - (n-1)I.}$$

3. (a) D'après 1.a, on a $(A - I)^2 = 0$ donc $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A. Il s'ensuit que 1 est la seule valeur propre possible pour A. Par ailleurs, les trois lignes de $A - I$ étant colinéaires, il s'ensuit que $\mathrm{rg}(A - I) = 1$ et donc 1 est valeur propre de A.
   En conséquence,

   $$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.}$$

   (b) A admet 1 pour unique valeur propre et $A \neq I$ donc

   $$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

   (a) On a

   $$\boxed{\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{rg}(A - I) = 1.}$$

   (b) Puisque $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = 1$, il suit du théorème du rang que $\dim E_1(f) = 3 - 1 = 2$.
   Par ailleurs, $(f - \mathrm{id})(u_1) = (f - \mathrm{id})^2(e_1) = 0$ car $(f - \mathrm{id})^2 = 0$ d'après l'égalité $(A - I)^2 = 0$. Autrement dit $f(u_1) - u_1 = 0$, ou encore $f(u_1) = u_1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{id})(u_2) &= (f-\mathrm{id})(e_1+e_3)\\ &= (f-\mathrm{id})(e_1)+(f-\mathrm{id})e_3\\ &= (-1,-2,1)+(1,2,-1) \quad \text{(d'après l'expression de } A-I)\\ &= (0,0,0).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $f(u_2)-u_2=0$, ou encore $f(u_2)=u_2$.
Ainsi, $u_1=(-1,-2,1)$ et $u_2=(1,0,1)$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1. Puisqu'ils sont non colinéaires, il forment une famille libre. Il s'ensuit que (u_1,u_2) est une famille libre de deux vecteurs dans $E_1(f)$ qui est de dimension 2 et donc

$$\boxed{(u_1,u_2) \text{ est une base de } E_1(f).}$$

5. (a) On a

$$u_1=(-1,-2,1),\quad u_2=(1,0,1)\quad \text{et}\quad e_1=(1,0,0).$$

Alors, pour tous réels a,b,c, on a

$$\begin{aligned} au_1+bu_2+ce_1=0 &\Leftrightarrow (-a+b+c,-2a,a+b)=(0,0,0)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+c &= 0\\ -2a &= 0\\ a+b &= 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow a=b=c=0.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{C}=(u_1,u_2,e_1)$ est une famille libre composée de trois vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ et donc

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$$

(b) On a $f(u_1)=u_1$, $f(u_2)=u_2$ et

$$f(e_1)=(0,-2,1)=(-1,-2,1)+(1,0,0)=u_1+e_1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=T.}$$

6. On a

$$P=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

donc P est inversible comme matrice de passage. En outre,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)=P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$

donc

$$\boxed{T=P^{-1}AP.}$$

7. (a) Posons

$$M=\begin{bmatrix}m_{1,1}&m_{1,2}&m_{1,3}\\m_{2,1}&m_{2,2}&m_{2,3}\\m_{3,1}&m_{3,2}&m_{3,3}\end{bmatrix}.$$

Alors

$$MT = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,1}+m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,1}+m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,1}+m_{3,3} \end{bmatrix}$$

et

$$TM = \begin{bmatrix} m_{1,1}+m_{3,1} & m_{1,2}+m_{3,2} & m_{1,3}+m_{3,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} MT = TM \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_{1,1} & = m_{1,1}+m_{3,1} \\ m_{1,2} & = m_{1,2}+m_{3,2} \\ m_{1,1}+m_{1,3} & = m_{1,3}+m_{3,3} \\ m_{2,1}+m_{2,3} & = m_{2,3} \\ m_{3,1}+m_{3,3} & = m_{3,3} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_{3,1} & = 0 \\ m_{3,2} & = 0 \\ m_{1,1} & = m_{3,3} \\ m_{2,1} & = 0 \\ m_{3,1} & = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & 0 & m_{1,1} \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad m_{1,1}(E_{1,1}+E_{3,3}) + m_{1,2}E_{1,2} + m_{1,3}E_{1,3} + m_{2,2}E_{2,2} + m_{2,3}E_{2,3}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{E = \mathrm{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}).}$$

Ainsi, $(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une famille génératrice de E dont on vérifie immédiatement qu'elle est libre. C'est donc une base de E et

$$\boxed{\dim E = 5.}$$

(b) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned} NA = AN \quad & \Leftrightarrow \quad P^{-1}(NA)P = P^{-1}(AN)P \\ & \Leftrightarrow \quad P^{-1}NPP^{-1}AP = P^{-1}APP^{-1}NP \\ & \Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP).}$$

(c) D'après la question précédente, pour tout matrice N de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} N \in F \quad & \Leftrightarrow \quad P^{-1}NP \in E \\ & \Leftrightarrow \quad P^{-1}NP \in \mathrm{Vect}(E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3}) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists a,b,c,d,e \in \mathbf{R}, \quad P^{-1}NP = a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,2} + eE_{2,3} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists a,b,c,d,e \in \mathbf{R}, \quad N = aP(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} \\ & \qquad + dPE_{2,2}P^{-1} + ePE_{2,3}P^{-1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad N \in \mathrm{Vect}(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$$

et donc

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).}$$

□

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement « le i-ème tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.
2. (a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbf{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.
   (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbf{P}(X=k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
   (c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :
   $$\mathbf{P}([X=k]\cap[Y=0]) = \frac{n-k}{n(n-1)}.$$
   (b) En déduire $\mathbf{P}(Y=0)$.
   (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.
4. Simulation informatique.
   On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
   (a) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
   On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
(1)  n = input('entrez une valeur pour n : ')
(2)  nB = n-1
(3)  X = 1
(4)  u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(5)  while u<nB+1
(6)    nB = ----
(7)    u = grand(1,1,'uin',1,----)
(8)    X = ----
(9)  end
(10) disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage numéro ')
```

   (b) Compléter les lignes (4) et (8) ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
(1)  n = input('entrez une valeur pour n : ')
(2)  nB = n-1
(3)  X = 1
(4)  Y = ----
(5)  u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
(6)  while u<nB+1
(7)    nB = ----
(8)    if u==1 then Y=----
(9)    end
(10)   u = grand(1,1,'uin',1,----)
(11)   X = ----
(12) end
(13) disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage numéro ')
```

```
(14) disp(Y, 'la valeur de Y est ')
```

Solution :

1. La boule noire peut être obtenue à n'importe quel tirage jusqu'au n-ème où l'urne sera épuisée. Ainsi,

$$\boxed{X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

2. (a) Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$. Alors $\mathbf{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i)$ est la probabilité de tirer une boule blanche sachant que l'on a déjà retiré $(i-1)$ boules blanches de l'urne. Il reste donc $n-(i-1)$ boules au total dont $(n-1)-(i-1)$ sont blanches. Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{(n-1)-(i-1)}{n-(i-1)} = \frac{n-i}{n-i+1}.}$$

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Si $k = 1$, on a

$$\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{n}.$$

Si $k = 2$, on a

$$\mathbf{P}(X=2) = \mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(N_2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}.$$

Et si $k \geq 3$, la formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X=k) &= \mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbf{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)\\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)}\\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{n}.}$$

(c) On a

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])}$$

et donc

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.}$$

3. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\hat{B}_k$ l'événement : « on a tiré une boule blanche qui n'est pas numérotée 1 ». Ainsi, on a

$$\mathbf{P}([X=1]\cap[Y=0]) = \mathbf{P}(N_1) = \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n(n-1)},$$

$$\mathbf{P}([X=2]\cap[Y=0]) = \mathbf{P}\left(\hat{B}_1 \cap N_2\right) = \mathbf{P}\left(\hat{B}_1\right)\mathbf{P}_{\hat{B}_1}(N_2) = \frac{n-2}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n(n-1)}$$

et, pour $k \geq 3$,

$$[X=k]\cap[Y=0] = \hat{B}_1 \cap \hat{B}_2 \cap \cdots \cap \hat{B}_{k-1} \cap N_k$$

et donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left([X=k]\cap[Y=0]\right) &= \mathbf{P}\left(\hat{B}_1\cap\hat{B}_2\cap\cdots\cap\hat{B}_{k-1}\cap N_k\right)\\
&= \mathbf{P}\left(\hat{B}_1\right)\times\mathbf{P}_{\hat{B}_1}\left(\hat{B}_2\right)\times\cdots\times\mathbf{P}_{\hat{B}_1\cap\hat{B}_2\cap\cdots\cap\hat{B}_{k-2}}(B_{k-1})\times\mathbf{P}_{\hat{B}_1\cap\hat{B}_2\cap\cdots\cap\hat{B}_{k-1}}(N_k)\\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1}\frac{n-i-1}{n-i+1}\right)\times\frac{1}{n-k+1}\\
&= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}(n-(i+1))}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}(n-(i-1))}\times\frac{1}{n-k+1}\\
&= \frac{\displaystyle\prod_{j=2}^{k}(n-j)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-2}(n-j)}\times\frac{1}{n-k+1}\\
&= \frac{(n-k)(n-(k-1))}{n(n-1)}\times\frac{1}{n-k+1}\\
&= \frac{n-k}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

On a donc bien,

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \mathbf{P}\left([X=k]\cap[Y=0]\right)=\frac{n-k}{n(n-1)}.}$$

(b) D'après la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{[X=k]\}_{k\in[\![1,n]\!]}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(Y=0\right) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left([Y=0]\cap[X=k]\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{n(n-1)}\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(n-k)\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left[n^2-\sum_{k=1}^{n}k\right]\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left[n^2-\frac{n(n+1)}{2}\right]\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\times\frac{2n^2-n(n+1)}{2}\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\times\frac{n^2-n}{2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(Y=0)=\frac{1}{2}.}$$

(c) On a donc

$$\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(1/2)}$$

et alors

$$\boxed{\mathbf{E}[Y]=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y)=\frac{1}{4}.}$$

4. Simulation informatique.

(a) On propose le programme suivant :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
nB = n-1
X = 1
u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
  nB = nB-1
  u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
  X = X+1
end
disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage numéro ')
```

(b) On propose ici le script suivant :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
nB = n-1
X = 1
Y = 0
u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
  nB = nB-1
  if u==1 then Y=1
  end
  u = grand(1,1,'uin',1,nB+1)
  X = X+1
end
disp(X, 'la boule noire est apparue au tirage numéro ')
disp(Y, 'la valeur de Y est ')
```

□

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n).
   (a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \, dt$.
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} \, dt$ puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} \, dt$.
   (c) Montrer que, pour tout réel t, on a : $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.
   (d) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ puis donner la limite de la suite (u_n).
4. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n \, dt$ puis montrer que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?
5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1}).$$
   (b) En déduire l'égalité :
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$
   (c) On admet l'équivalent $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que :
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$
6. Informatique.
   On admet que, si `t` est un vecteur, la commande `prod(t)` renvoie le produit des éléments de `t`.
   Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher la valeur de u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
x = 1:n
m = 2*n+1
y = 1:m
v = ----
w = ----
u = ----*v^2/w
disp(u)
```

Solution :

1. On a
$$u_1 = \int_0^1 1 - t^2 \, dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
et
$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^1 (1-t^2)^2 \, dt \\ &= \int_0^1 1 - 2t^2 + t^4 \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{8}{15}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\ dt - \int_0^1 (1-t^2)^n\ dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n\ dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n((1-t^2)-1)\ dt \\ &= -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\ dt.\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $t^2(1-t^2)^n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi,

$$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1 - t^2 \geq 0$ donc $(1-t^2)^n \geq 0$ donc

$$u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n\ dt \geq 0.$$

Ainsi, (u_n) est décroissante (2.a) et minorée par 0. Il suit alors du théorème de la convergence monotone que

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geq 0.}$$

3. (a) $t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\ dt = 1.}$$

(b) En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{2n}t$, on a $u^2 = 2nt^2$ et donc $-nt^2 = -\dfrac{1}{2}u^2$ et $du = \sqrt{2n}dt$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\ dt &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2n}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{n}}.\end{aligned}$$

Par parité de la fonction $t \mapsto e^{-nt^2}$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\ dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\ dt = \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\ dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

(c) Considérons la fonction $d : t \mapsto e^{-t^2} - (1-t^2)$ qui est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée et différence de fonctions dérivables. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $d'(t) = 2t(1-e^{-t^2})$ or $t^2 \geq 0$ donc $e^{-t^2} \leq 1$ et ainsi, $d'(t)$ est du signe de t. Puisque $d(0) = 0$, on obtient le tableau de variation suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$d'(t)$		$-$	0	$+$	
d		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad d(t) \geq 0$$

et donc

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{-t^2} \geq 1 - t^2.}$$

(d) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned} e^{-t^2} \geq 1 - t^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad e^{-nt^2} \geq (1-t^2)^n \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \int_0^1 e^{-nt^2}\ dt \geq \int_0^1 (1-t^2)^n\ dt \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2}\ dt.$$

La fonction $t \mapsto e^{-nt^2}$ étant positive sur $\mathbf{R}$, on a

$$\int_0^1 e^{-nt^2}\ dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\ dt \underset{(3.b)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

En passant à la limite, le théorème d'encadrement assure que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\int_0^1 (1-t)^n \; dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0,1]$, on a $t^2 \leq t$ donc $1-t \leq 1-t^2$ et, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}_+$, on a

$$\forall t \in [0,1], \quad (1-t)^n \leq (1-t^2)^n.$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 (1-t)^n \; dt \leq \int_0^1 (1-t^2)^n \; dt.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \geq \frac{1}{n+1}.}$$

La série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ est une série divergente car $\frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et la série harmonique diverge. Il suit alors du théorème de comparaison appliqué à l'inégalité précédente que

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge.}}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. En posant $u(t) = (1-t^2)^{n+1}$ et $v'(t) = 1$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} \; dt \\
&= \left[t(1-t)^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)2t(1-t^2)^n t \; dt \\
&= 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n \; dt \\
&= -2(n+1) \int_0^1 (1-t^2-1)(1-t^2)^n \; dt \\
&= -2(n+1) \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n \; dt \\
&= -2(n+1)(u_{n+1} - u_n).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1}).}$$

(b) Par récurrence sur n.
Si $n = 0$, on a

$$\frac{4^0 (0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = \frac{1}{1!} = 1 = u_0$$

donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$. Il suit de la question précédente que $u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$ donc $(2n+3)u_{n+1} = (2n+2)u_n$ et ainsi

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2n+2}{2n+3} u_n \\ &= \frac{2n+2}{2n+3} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(2n+2)4^n (n!)^2}{(2n+3)(2n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)^2 4^n (n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4(n+1)^2 4^n (n!)^2}{(2n+3)!} \\ &= \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}. \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

(c) En utilisant l'équivalent proposé (qui porte le nom de *formule de Stirling* dans la littérature) et en l'injectant dans la formule établie en 5.b, on a

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{4^n 2\pi n n^{2n} e^{-2n}}{(2n+1) 2\sqrt{\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}} = \frac{n}{2n+1} \times \frac{\pi}{\sqrt{\pi n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

6. On propose le programme suivant :

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
x = 1:n
m = 2*n+1
y = 1:m
v = prod(x)
w = prod(y)
u = 4^n*v^2/w
disp(u)
```

□

Problème

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

Dans cet exercice, θ (thêta) désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.
3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.
4. (a) Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $2^x(1-x) \leq 1$.
   (c) Comparer $\mathbf{E}[X]$ et M_e.
5. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.
   (a) Montrer que $\mathbf{P}_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{\frac{1}{\theta}}$.
   (b) Déterminer la limite de cette quantité quand a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable aléatoire X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X

6. On pose $Y = \ln X$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.
   (a) Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.
   (b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
7. On rappelle qu'en `Scilab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes `Scilab` utilisant `grand` et permettant de simuler X.

Partie 3 : estimation d'un paramètre

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.
On considère pour cela n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   (a) Justifier que T_n est un estimateur de θ.
   (b) T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?
   (c) Calculer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de θ. T_n est-il un estimateur convergent de θ ?
9. (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.
   (b) Établir l'inégalité :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbf{P}(\theta \in [T_n - \epsilon, T_n + \epsilon]) \geq 1 - \frac{\theta^2}{n\epsilon^2}.$$

   (c) En utilisant le fait que $\theta \leq \frac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsque l'on choisit $n = 1000$.

Solution :

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

1. f est clairement positive et continue sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. En outre,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx &= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\theta x^{\frac{1}{\theta}+1}}\ dx \\
&= \lim_{B:+\infty} \int_{1}^{B} \frac{1}{\theta x^{\frac{1}{\theta}+1}}\ dx \\
&= \lim_{B:+\infty} \frac{1}{\theta} \left[-\frac{x^{-\frac{1}{\theta}}}{\frac{1}{\theta}} \right]_1^B \\
&= \lim_{B:+\infty} \left[-\frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} \right]_0^1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

2. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\ dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}\ dx$$

   or $\theta < \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{\theta} > 2$ et on reconnaît ainsi une intégrale de Riemann convergente. X admet donc une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}\ dx \\
&= \lim_{B:+\infty} \int_{1}^{B} \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}\ dx \\
&= \lim_{B:+\infty} \frac{1}{\theta} \left[\frac{x^{-\frac{1}{\theta}+1}}{-\frac{1}{\theta}+1} \right]_1^B \\
&= \lim_{B:+\infty} \frac{1}{\theta} \left[\frac{x^{1-\frac{1}{\theta}}}{\frac{\theta-1}{\theta}} \right]_1^B \\
&= \frac{1}{1-\theta}.
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \frac{1}{1-\theta}.}$$

   De manière analogue, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\ dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}}\ dx$$

or $\theta < \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{\theta} > 2$ et $\dfrac{1}{\theta} - 1 > 1$. On reconnaît ainsi une intégrale de Riemann convergente. X admet donc une variance et, comme précédemment,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \int_1^{+\infty} x^2 \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}+1}}\ dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}}\ dx \\
&= \lim_{B:+\infty} \int_1^{B} \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}-1}}\ dx \\
&= \lim_{B:+\infty} \frac{1}{\theta} \left[\frac{x^{2-\frac{1}{\theta}}}{\frac{2\theta-1}{\theta}}\right]_1^B \\
&= \frac{1}{1-2\theta}.
\end{aligned}$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}\left[X\right]^2 \\
&= \frac{1}{1-2\theta} - \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2 \\
&= \frac{(1-\theta)^2 - (1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-\theta)^2} \\
&= \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.$$

Si $x < 1$, on a $f(t) = 0$ pour tout $t \leq x$ et donc $F(x) = 0$.
Si $x \geq 1$, on a

$$F(x) = \int_1^x f(t)\ dt = \left[-\frac{1}{t^{\frac{1}{\theta}}}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}}$$

4. (a) F est nulle sur $]-\infty, 1[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (car dérivable de dérivée f strictement positive sur cet intervalle). En outre, $F(1) = 0$ et $\lim\limits_{x:+\infty} F(x) = 1$ (car F est une fonction de répartition). Il suit alors du théorème de la bijection continue que F induit une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[0, 1[$. Puisque $\dfrac{1}{2} \in [0, 1[$, il existe en particulier un unique réel M_e tel que $F(M_e) = \dfrac{1}{2}$.
En outre, pour tout $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}
F(x) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^{\frac{1}{\theta}}} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{\theta}} = 2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2^{\theta}.$$

En conclusion,

$$\boxed{M_e = 2^{\theta}.}$$

(b) On pose, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $d(x) = 2^x(1-x) = \exp(x \ln 2)(1-x)$. Alors d est dérivable et, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$d'(x) = \ln(2) 2^x (1-x) - 2^x = 2^x \left[\ln(2)(1-x) - 1\right].$$

Ainsi, $d'(x)$ est du signe de $\ln(2)(1-x) - 1$ Or

$$\begin{aligned} \ln(2)(1-x) - 1 \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(2) - 1 \leq \ln(2)x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(2)-1}{\ln(2)} \leq x. \end{aligned}$$

Or $\ln(2) < \ln(e) = 1$ donc $\dfrac{\ln(2)-1}{\ln(2)} < 0 \leq x$ et donc $d'(x) \leq 0$. Ainsi, d est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Puisque $d(0) = 1$, il vient

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad 2^x(1-x) \leq 1.}$$

(c) D'après les questions 2 et 4.a, on a

$$\mathbf{E}\left[X\right] = \frac{1}{1-\theta} \quad \text{et} \quad M_e = 2^{\theta}.$$

Alors, d'après 4.b,

$$\frac{M_e}{\mathbf{E}\left[X\right]} = 2^{\theta}(1-\theta) \leq 1$$

et, puisque $\mathbf{E}\left[X\right]$ est positif,

$$\boxed{M_e \leq \mathbf{E}\left[X\right].}$$

5. (a) Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(X>a)}(X > a+b) &= \frac{\mathbf{P}\left([X>a] \cap [X > a+b]\right)}{\mathbf{P}\left(X > a\right)} \quad (\text{ car } [X > a+b] \subset [X > a] \text{ puisque } b > 0) \\ &= \frac{\mathbf{P}\left(X > a+b\right)}{\mathbf{P}\left(X > a\right)} \\ &= \frac{1 - F(a+b)}{1 - F(a)} \\ &= \frac{\frac{1}{(a+b)^{1/\theta}}}{\frac{1}{(a)^{1/\theta}}} \quad (\text{d'après } 3) \\ &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}. \end{aligned}$$

(b) Pour tout $b > 0$, on a $a + b \underset{a:+\infty}{\sim} a$ donc

$$\mathbf{P}_{(X>a)}(X > a + b) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{1/\theta} \underset{a:+\infty}{\sim} \left(\frac{a}{a}\right)^{1/\theta} = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall b > 0, \quad \lim_{a:+\infty} \mathbf{P}_{(X>a)}(X > a + b) = 1.}$$

De manière informelle, ceci signifie que si l'appareil a déjà fonctionné pendant très longtemps, il est quasi-certain qu'il fonctionnera encore pendant n'importe quel laps de temps relativement court par rapport à la durée de vie écoulée.

Partie 2 : simulation de X

6. (a) Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}(Y \leq x) \\ &= \mathbf{P}(\ln X \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X \leq e^x) \\ &= F(e^x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad G(x) = F(e^x).}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} G(x) &= F(e^x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad e^x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{e^{\frac{1}{\theta}x}} & \text{si} \quad e^x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\theta}$. Ainsi,

$$\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right).}$$

7. Si $Y = \ln(X)$, on a $X = e^Y$. Ainsi, pour simuler X, on propose le programme suivant :

```
Y = grand(1,1,'exp',theta)
X = exp(Y)
```

Partie 3 : estimation d'un paramètre

8. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

(a) T_n est bien une statistique car c'est une variable aléatoire ne dépendant que de l'échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$. Il s'agit donc bien d'un estimateur de θ.

(b) Les Y_i admettant une espérance, T_n admet aussi une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[T_n\right] &= \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[Y_k\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{\theta}} \\ &= \theta.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

(c) Puisque T_n estime θ sans biais, son risque quadratique par rapport à θ est égal à sa variance (cette variance est bien définie par T_n est une somme de variables aléatoires indépendantes admettant une variance). Ainsi,

$$\begin{aligned}r_\theta(T_n) &= \mathbf{V}\left(T_n\right) \\ &= \mathbf{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}\left(Y_k\right) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\theta^2 \\ &= \frac{\theta^2}{n}.\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{r_\theta(T_n) = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ donc } T_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta.}$$

9. (a) Puisque T_n admet une variance, l'inégalité de Tchebychev assure que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left|T_n - \mathbf{E}\left[T_n\right]\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\mathbf{V}\left(T_n\right)}{\epsilon^2}.$$

Avec les calculs effectués en 8.b et 8.c, il vient

$$\boxed{\forall \epsilon > 0, \quad \mathbf{P}\left(\left|T_n - \theta\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\theta^2}{n\epsilon^2}.}$$

(b) Soit $\epsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\theta \in [T_n - \epsilon, T_n + \epsilon]\right) &= \mathbf{P}\left(\left|T_n - \theta\right| \leq \epsilon\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left|T_n - \theta\right| > \epsilon\right)\end{aligned}$$

$$\geq 1-\frac{\theta^2}{n\epsilon^2} \quad \text{(d'après 9.a).}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall \epsilon>0, \quad \mathbf{P}\left(\theta \in [T_n-\epsilon, T_n+\epsilon]\right) \geq 1-\frac{\theta^2}{n\epsilon^2}.}$$

(c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\theta \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta^2 \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{\theta^2}{n\epsilon^2} \geq 1-\frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

Or

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{4n\epsilon^2} \geq \frac{90}{100} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4n\epsilon^2} \leq \frac{10}{100} \\
& \Leftrightarrow \quad \epsilon^2 \geq \frac{100}{40n} \\
& \Leftrightarrow \quad \epsilon^2 \geq \frac{1}{400} \quad (n=1000) \\
& \Leftrightarrow \quad \epsilon \geq \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\left[T_{1000}-\frac{1}{20}, T_{1000}+\frac{1}{20}\right] \text{ est un intervalle de confiance pour } \theta \text{ au niveau de confiance } 90\%.}$$

□