ECRICOME 2018 - VOIE E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 1

Partie I

1. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calculer $A^2 - 7A$.

   (b) En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.

   (c) Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous espace propre associé.

   (d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer le noyau de f. En déduire une valeur propre de f et l'espace propre associé.
4. Déterminer le rang de la matrice $B - 2I_3$.
5. Calculer $f(e_1 - e_2 - e_3)$.
6. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme f est diagonalisable.
7. Trouver une matrice P inversible vérifiant toutes les conditions ci-dessous :
   - La matrice $D_2 = P^{-1}\ B\ P$ est égale à $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,
   - Les coefficients situés sur la première ligne de P sont 1, 1 et -1 (de gauche à droite),
   - La matrice $D_1 = P^{-1}AP$ est également diagonale.

Partie II

On pose $X_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, et pour tout entier naturel n : $\quad X_{n+2} = \frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n$.

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite matricielle définie par : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_n = P^{-1}X_n$.

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \qquad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n$.
2. Pour tout entier naturel n, on note $Y_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$.

   Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} a_{n+2} &= \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} &= \frac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \frac{2}{3}c_{n+1} + \frac{1}{3}c_n. \end{cases}$$

G. Dupont – Lycée Gerville-Réache – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

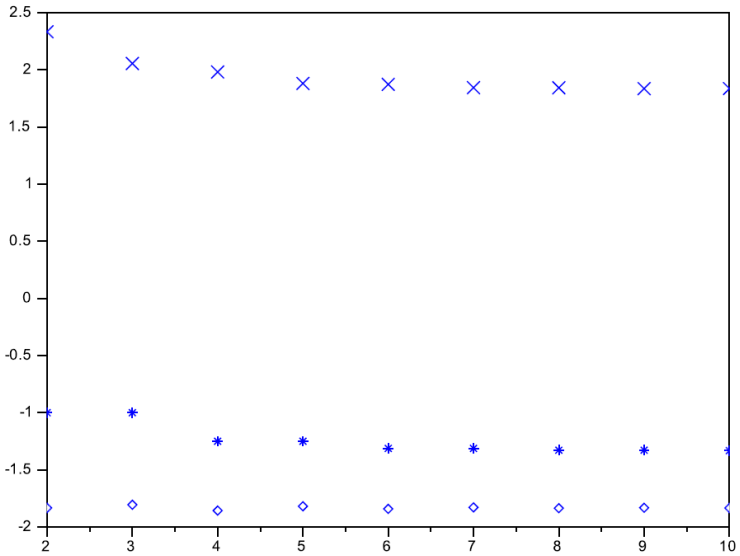
3. Démontrer que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, puis calculer les matrices Y_0 et Y_1.
4. Pour tout entier naturel n, calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
5. En déduire l'expression de X_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
   On notera $X_n = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{bmatrix}$, et on vérifiera que :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} - \frac{4}{3}$$

6. (a) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en argument un entier n supérieur ou égal à 2 et qui renvoie la matrice X_n :

```
function res=X(n)
        Xold=[3;0;-1]
        Xnew=[3;0;-2]
        A=[2,1,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
        B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
        for i=2:n
                Aux= ................
                Xold=................
                Xnew=..............
        end
        res=..........
endfunction
```

   (b) La fonction précédente a été utilisée dans un script permettant d'obtenir graphiquement (voir figure ci-dessous) les valeurs de α_n, β_n et γ_n en fonction de n.
   Associer chacune des trois représentations graphiques à chacune des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en justifiant votre réponse.



G. Dupont – Lycée Gerville-Réache – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

Solution :

Partie I

1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Un calcul matriciel donne :

$$\boxed{A^2 - 7A = -12I_3.}$$

(b) Il suit de la question précédente que $X^2 - 7A + 12I_3 = 0$ de sorte que $X^2 - 7X + 12$ est un polynôme annulateur de A. Puisque $X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$ admet 3 et 4 pour racines, il s'ensuit que

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{3, 4\}.}$$

(c) Une recherche classique d'espaces propres montre que

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_4(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}$$

et donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{3, 4\}.}$$

(d) $\boxed{0 \text{ n'est pas valeur propre de } A \text{ donc } A \text{ est inversible.}}$

Par ailleurs,$\dim E_3(A) + \dim E_4(A) = 2 + 1 = 3$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

2. (a) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in MM_{3,1}$ sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$\begin{aligned}
v \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(v) = 0_{\mathbf{R}^3} \\
&\Leftrightarrow BV = 0_{\mathcal{M}_{3,1}} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ -3x + 3y - 3z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x &= y \\ z &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow v = (x, x, 0).
\end{aligned}$$

Ainsi,

G. Dupont – Lycée Gerville-Réache – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

$$\boxed{\ker(f) = \text{Vect}((1,1,0)) = \text{Vect}(e_1 + e_2).}$$

Ainsi,

$$\boxed{0 \in \text{Sp}(f) \quad \text{et} \quad E_0(f) = \text{Vect}(e_1 + e_2).}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\text{rg}(B - 2I_3) &= \text{rg}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \text{rg}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{rg}(B - 2I_3) = 2.}$$

(c) Soit $w = e_1 - e_2 - e_3$ et $W = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sa représentation matricielle dans la base $\mathcal{B}$. En effectuant le produit matriciel, on a

$$BW = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3W$$

donc

$$\boxed{f(w) = 3w.}$$

(d) D'après 2.a, 0 est une valeur propre de f. D'après 2.b, 2 est une valeur propre de f. Enfin, d'après 3.c, 3 est une valeur propre de f. Ainsi

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3) \text{ admet trois valeurs propres distinctes, donc } f \text{ est diagonalisable.}}$$

3. On a

$$E_2(B) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad E_3(B) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_0(B) = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Ainsi, si on pose

$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

alors $\mathcal{C}$ est une base de vecteurs propres de f de sorte que

G. Dupont – Lycée Gerville-Réache – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

$$P = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice inversible et

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D_2.$$

Par ailleurs, en effectuant les produits de A avec les trois vecteurs de $\mathcal{C}$, on observe qu'il s'agit de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs 3, 3 et 4. Ainsi,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = D_1.$$

Partie II

1. On commence par remarquer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = PY_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} \\ &= P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}APY_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BPY_n \\ &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad Y_{n+2} = \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \\ c_{n+2} \end{bmatrix} &= Y_{n+2} \\ &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n \\ &= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3a_{n+1} + 3a_n \\ 3b_{n+1} \\ 4c_{n+1} + 2c_n. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

G. Dupont – Lycée Gerville-Réache – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad \begin{cases} a_{n+2} &= \dfrac{1}{2}a_{n+1} + \dfrac{1}{2}a_n \\ b_{n+2} &= \dfrac{1}{2}b_{n+1} \\ c_{n+2} &= \dfrac{2}{3}c_{n+1} + \dfrac{1}{3}c_n. \end{cases}$$

3. Posons

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alors un calcul matriciel immédiat donne

$$PQ = I_3$$

et donc

$$P^{-1} = Q.$$

Alors, en effectuant les produits, on a

$$Y_0 = P^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. (b_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(a_n) est une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$$

dont l'équation caractéristique

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$$

admet 1 et $-\dfrac{1}{2}$ pour solutions.
Il s'ensuit qu'il existe des réels λ, μ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N},\quad a_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Mais alors

$$\begin{cases} a_0 &= 2 \\ a_1 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda + -\frac{\mu}{2} &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda &= \frac{4}{3} \\ \mu &= \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ainsi,

G. Dupont – Lycée Gerville-Réache – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

De la même manière, pour (c_n), on trouve

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{bmatrix} = X_n = PY_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2^{n-1}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{bmatrix}$$

et, en effectuant le produit matriciel, la seconde ligne donne bien l'identité :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

6. (a) On propose le programme suivant :

```
function res=X(n)
        Xold=[3;0;-1]
        Xnew=[3;0;-2]
        A=[2,1,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
        B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
        for i=2:n
        Aux = 1/6+A*Xnew+1/6*B*Xold
        Xold = Xnew
        Xnew = Aux
        end
        res = Xnew
endfunction
```

(b) En prenant les expressions de α_n, β_n et γ_n issues du produit matriciel en II.5, on obtient :

$$\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} \approx 2,$$

$$\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{4}{3} \approx -1,3,$$

$$\gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{4}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{11}{6} \approx -2$$

de sorte que :

— la suite des $\times$ correspond à (α_n),

— la suite des $*$ correspond à (β_n),

— la suite des $\diamond$ correspond à (γ_n).

□

G. Dupont – Lycée Gerville-Réache – Licence CC BY-NC-SA 4.0.