ECRiCOME 2018 - voie E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et, à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Enfin, on notera A l'événement « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X, puis vérifier que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.
2. Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est un entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant le slogan « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = (-1)^X.$$

Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur paire.

1. (a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.
   (b) Démontrer que $\mathbf{E}[Y] = 2\mathbf{P}(A) - 1$.
2. (a) Donner la loi de X.
   (b) En déduire que l'on a également :
   $$\mathbf{E}[Y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$
   puis que : $\mathbf{E}[Y] = (1-2p)^n$.
3. Exprimer alors la valeur de $\mathbf{P}(A)$ en fonction de n et p.
4. Démontrer que :
$$\mathbf{P}(A) \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[p \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \text{« } n \text{ est pair »} \right].$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $\mathbf{P}(A) \geq \dfrac{1}{2}$) son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $\mathbf{E}[G] \leq 0$).

1. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que :

$$\mathbf{E}[G] = 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\mathbf{P}(X=k).$$

2. Démontrer que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

3. Montrer que :

$$\mathbf{E}[G] = -10np(1-2p)^{n-1}.$$

4. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ \\ \mathbf{E}[G] \leq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad p \leq \frac{1}{2}.$$

5. (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) = x(1-2x)^{n-1}.$$

   (b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur de jeu doit-il truquer sa pièce (c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris entre 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ème joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

1. Pour tout $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i, et calculer son espérance et sa variance.
2. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
   Démontrer alors que $\mathbf{E}[J] = 500$ et que $\mathbf{V}(J) = 11250$.
3. Justifier que : $\mathbf{P}(J \leq 100) \leq \mathbf{P}(|J - 500| \geq 400)$.
4. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $\mathbf{P}(J \leq 100) \leq \dfrac{9}{128}$.
5. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Solution : Dans tout le problème, on posera $q = 1 - p$.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

1. X compte le nombre de succès (Pile) dans la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Ainsi,

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right).}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A\right) &= \mathbf{P}\left(X = 0\right) + \mathbf{P}\left(X = 2\right) \\
&= q^3 + \binom{3}{2} p^2 q \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\frac{2}{3}^3\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{27} + \frac{12}{27} \\
&= \frac{13}{27}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbf{P}\left(A\right) = \frac{13}{27}.}$$

2. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et

$$\begin{gathered}
(X = 0) = (G = 0), \\
(X = 1) = (G = -10), \\
(X = 2) = (G = 20), \\
(X = 3) = (G = -30).
\end{gathered}$$

Ainsi,

$$\boxed{G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}}$$

et

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rll}
\mathbf{P}\left(G = -30\right) & = \mathbf{P}\left(X = 3\right) & = p^3 \\
\mathbf{P}\left(G = -10\right) & = \mathbf{P}\left(X = 1\right) & = 3pq^2 \\
\mathbf{P}\left(G = 0\right) & = \mathbf{P}\left(X = 0\right) & = q^3 \\
\mathbf{P}\left(G = 20\right) & = \mathbf{P}\left(X = 2\right) & = 3p^2q
\end{array}\right.}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[G\right] &= \sum_{x \in G(\Omega)} x\mathbf{P}\left(G = x\right) \\
&= -30\mathbf{P}\left(G = -30\right) - 10\mathbf{P}\left(G = -10\right) + 20\mathbf{P}\left(G = 20\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -30p^3 - 30pq^2 + 60p^2q \\ &= -30 \times \frac{8}{27} - 30 \times \frac{2}{27} + 60 \times \frac{4}{27} \\ &= -\frac{60}{27} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\left[G\right] < 0}$$

et le jeu est bien défavorable au joueur.

Partie II

1. (a) $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et donc $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ de sorte que Z suit une loi de Bernoulli. Par ailleurs :

$$(Z = 1) = \left(\frac{Y+1}{2} = 1\right) = (Y + 1 = 2) = (Y = 1)$$

de sorte que

$$\mathbf{P}\left(Z = 1\right) = \mathbf{P}\left(Y = 1\right) = \mathbf{P}\left(X \text{ pair}\right) = \mathbf{P}\left(A\right).$$

Ainsi, le paramètre de Z est $\mathbf{P}\left(A\right)$ et donc

$$\boxed{Z \rightsquigarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}\left(A\right)).}$$

(b) D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[Y\right] &= \mathbf{E}\left[(-1)^X\right] \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \mathbf{P}\left(X = k\right) \\ &= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \text{ pair}}} \mathbf{P}\left(X = k\right) - \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ k \text{ impair}}} \mathbf{P}\left(X = k\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X \text{ pair}\right) - \mathbf{P}\left(X \text{ impair}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(A\right) - \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(A\right) - (1 - \mathbf{P}\left(A\right)) \\ &= 2\mathbf{P}\left(A\right) - 1. \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbf{E}\left[Y\right] = 2\mathbf{P}\left(A\right) - 1.}$$

2. (a) Comme observé dans la partie I, on a

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

(b) D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[Y\right] &= \mathbf{E}\left[(-1)^X\right] \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \mathbf{P}\left(X = k\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k q^{n-k} \\
&= (q-p)^n \\
&= ((1-p)-p)^n \\
&= (1-2p)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien établi :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[Y\right] = (1-2p)^n.}$$

3. Il suit de 1.b et 2.b que

$$2\mathbf{P}\left(A\right) - 1 = (1-2p)^n$$

   et donc

$$\boxed{\mathbf{P}\left(A\right) = \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2}.}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A\right) \geq \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2} \geq \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad (1-2p)^n \geq \frac{0}{.}
\end{aligned}$$

   Or $(1-2p)^n \geq 0$ si et seulement si n est pair ou $1 - 2p \geq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}\left(A\right) \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[p \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \text{« } n \text{ est pair »}\right].}$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $\mathbf{P}\left(A\right) \geq \frac{1}{2}$) son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $\mathbf{E}\left[G\right] \leq 0$).

1. G est positif si X est pair et négatif si X est impair donc G est du signe de $Y = (-1)^X$. Par ailleurs, la valeur absolue du gain est $10X$. Ainsi, on a :

$$\boxed{G = (-1)^X \times 10X = 10XY.}$$

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}
\end{aligned}$$

$$= n\binom{n-1}{k-1}.$$

En conclusion,

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.}$$

3. D'après le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[G] &= \mathbf{E}[10XY] \\
&= \mathbf{E}\left[10(-1)^X X\right] \\
&= 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\mathbf{P}(X=k) \\
&= 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\
&= 10\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \\
&= -10np\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} \\
&= -10np\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}p^i q^{(n-1)-i} \\
&= -10np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-p)^i q^{(n-1)-i} \\
&= -10np(q-p)^{n-1} \\
&= -10np(1-2p)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}[G] = -10np(1-2p)^{n-1}.}$$

4. On sait depuis II.4 que $\mathbf{P}(A) \geq \dfrac{1}{2}$ si et seulement si n est pair ou que $p \leq \frac{1}{2}$. Supposons n pair. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[G] \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\
&\underset{n-1 \text{ impair}}{\Leftrightarrow} (1-2p) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant n impair. On a alors $(1-2p)^{n-1} \geq 0$ et donc $\mathbf{E}[G] = -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \mathbf{P}(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ \\ \mathbf{E}[G] \leq 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad p \leq \frac{1}{2}.}$$

5. (a) Posons $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. f est dérivable sur I comme fonction polynomiale. Pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-2x)^{n-1} - 2(n-1)x(1-2x)^{n-2} \\ &= (1-2x)^{n-2}\left((1-2x) - 2(n-1)x\right) \\ &= (1-2x)^{n-2}(1-2nx). \end{aligned}$$

Puisque $x \in I$, on a $x \leq \dfrac{1}{2}$ et donc $1 - 2x \geq 0$. Il s'ensuit que

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2nx \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{1}{2n}.$$

Ainsi, f est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2}\right]$. Elle atteint donc son maximum en $\dfrac{1}{2n}$.

(b) Optimiser le jeu signifie minimiser $\mathbf{E}[G]$. Mais

$$\mathbf{E}[G] = -10np(1-2p)^{n-1} = -10nf(p),$$

avec $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
Ainsi,

$$\mathbf{E}[G] \text{ minimale} \quad \Leftrightarrow \quad f(p) \text{ maximale} \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{2n}.$$

$$\boxed{\text{Il faut donc fixer la valeur de } p \text{ à } \frac{1}{2n}.}$$

Partie IV

1. Pour tout $i \in [\![1, 200]\!]$, on a $X_i \rightsquigarrow \mathcal{B}(1/4)$ et alors :

$$G_i(\Omega) = \{-10, 0, 20\}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_i = -10) &= \mathbf{P}(X_i = 1) = 2pq = \frac{3}{8}, \\ \mathbf{P}(G_i = 0) &= \mathbf{P}(X_i = 0) = q^2 = \frac{9}{16}, \\ \mathbf{P}(G_i = 20) &= \mathbf{P}(X_i = 2) = p^2 = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[G_i] &= -10 \times \frac{3}{8} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{10}{4}, \\ \mathbf{E}\left[G_i^2\right] &= 100 \times \frac{3}{8} + 400 \times \frac{1}{16} = \frac{1000}{16} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{V}(G_i) = \mathbf{E}\left[G_i^2\right] - \mathbf{E}[G_i]^2 = \frac{225}{4}.$$

2. On a

$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i$$

donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[J] = -\sum_{i=1}^{200} \mathbf{E}[G_i] = -200 \times \left(-\frac{10}{4}\right) = 500.$$

et, par indépendance des G_i (qui suit de l'indépendance des X_i du fait du lemme des coalitions),

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(J) &= \mathbf{V}\left(-\sum_{i=1}^{200} G_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{200} \mathbf{V}(G_i)\\ &= 200 \times \frac{225}{4}\\ &= 50 \times 225\\ &= 11\ 250.\end{aligned}$$

3. On a $(J \leq 100) \subset (|J - 500| \geq 400)$ donc

$$\boxed{\mathbf{P}(J \leq 100) \leq \mathbf{P}(|J - 500| \geq 400).}$$

4. Si une v.a. X admet une variance, alors

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| > \epsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\epsilon^2}$$

donc, ici,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|J - 500| \geq 400) &\leq \frac{\mathbf{V}(J)}{400^2}\\ &= \frac{11\ 250}{400 \times 400}\\ &= \frac{50 \times 225}{400 \times 400}\\ &= \frac{225}{8 \times 400}\\ &= \frac{9}{8 \times 16}\\ &= \frac{9}{128}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(J \leq 100) \leq \frac{9}{128}.}$$

5. On a $\dfrac{9}{128} \leq \dfrac{10}{100}$ donc la probabilité que le forain gagne moins de 100 euros est strictement inférieure à 10%, il peut installer son stand.

□