EDHEC 2016 - VOIE E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \quad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt.$$

1. **Étude de f_n.**
   (a) Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. **Étude de la suite (u_n).**
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
3. (a) Utiliser la question 2b) pour compléter les commandes `Scilab` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n = 0
while --------
        n = --------
end
disp(n)
```

   (b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$.
4. On pose $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
   (b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.
   (c) Vérifier ensuite que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\dfrac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.
   (d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2.b que : $u_n - n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Solution : **EDHEC 2016 - Exercice 2**

1. (a) f_n est la primitive de $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ sur $[n, +\infty[$ donc elle est dérivable de dérivée $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ continue. Ainsi, f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ et, pour tout $x \geq n$, on a

$$\boxed{f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0.}$$

Ainsi,

$$\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } [n, +\infty[.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [n, +\infty[$. Pour tout $t \in [n, x]$, on a $t \geq n$ et donc pour $e^{\sqrt{t}} \geq e^{\sqrt{n}}$. Par croissance de l'intégrale, il vient

$$f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}\ dt \geq (x-n)e^{\sqrt{n}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x:+\infty} f_n(x) = +\infty.}$$

(c) f_n est continue, strictement croissante sur $[n, +\infty[$, $f_n(n) = 0$ et $\lim\limits_{x:+\infty} f_n(x) = +\infty$. Il suit alors du théorème de la bijection continue que f_n induit une bijection de $[n, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$. Puisque $1 \in [0, +\infty[$, il vient :

$$\boxed{\exists! u_n \in [n, +\infty[, \quad f_n(u_n) = 1.}$$

2. (a) Par définition, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [n, +\infty[$ et donc

$$u_n \geq n.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

(b) Par croissance de l'intégrale, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}}\ dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}\ dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}}\ dt,$$

c'est-à-dire,

$$e^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leq f_n(u_n) \leq e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n)$$

et donc, puisque $f_n(u_n) = 1$, on a

$$e^{\sqrt{n}}(u_n - n) \leq 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq e^{\sqrt{u_n}}(u_n - n)$$

soit encore

$$u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.}$$

3. (a) On propose le programme suivant :

```
n = 0
while (exp(-sqrt(n))>10^(-4))
        n = n+1
end
disp(n)
```

(b) Le programme s'arrête dès que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$ mais

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-\sqrt{n}} \leq e^{-4\ln(10)} \\ &\Leftrightarrow \quad -\sqrt{n} \leq -4\ln(10) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \geq 4\ln(10) \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq 16\ln(10)^2 \approx 84,64. \end{aligned}$$

Ainsi,

Le programme affiche la valeur 85.

4. (a) Si on applique le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée en 2.b, on obtient

$$\boxed{\lim_{n:+\infty} u_n - n = 1.}$$

(b) On pose, pour tout $x \geq -1$, $d(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2}$. La fonction d est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x > -1, \quad d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{1+x}}{2}.$$

Ainsi, on a

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
d	$\nearrow$		$-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

En conséquence, pour tout $x \geq -1$, on a $d(x) < 0$ et donc

$$\boxed{\forall x \geq -1, \quad \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.}$$

(c) Procédons par équivalence. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned}
e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{n}-\sqrt{u_n}} \geq \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{n} - \sqrt{u_n} \geq -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{u_n} - \sqrt{n} \leq \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{u_n} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{v_n + n} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 + \frac{v_n}{n}} \leq 1 + \frac{v_n}{2},
\end{aligned}$$

cette dernière égalité étant vraie d'après 4.b puisque $\dfrac{v_n}{n} = \dfrac{u_n - n}{n} = \dfrac{u_n}{n} - 1 \geq -1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right).}$$

(d) En combinant 2.b avec l'inégalité précédemment obtenue, on obtient

$$e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

Si on divise par $e^{-\sqrt{n}}$, il vient

$$\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leq \frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1$$

mais $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après 4.a donc $\exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\frac{u_n - n}{e^{-\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{v_n \underset{n:+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}.}$$

□