EMLyon 2016 - voie E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 2

On considère l'application $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une tangente en O et préciser celle-ci.
   (b) Montrer que $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.
   (c) Tracer l'allure de $\mathcal{C}$.
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0, +\infty[^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x, y) de $]0, +\infty[^2$.
7. (a) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$. Montrer que (x, y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1.$$

   (b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).
8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.)
12. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Solution :

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Les fonctions $t \mapsto t$, $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont continues sur $\mathbf{R}_+^*$ donc, par produit et combinaison linéaire, f est aussi continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{t:0^+} f(t) = 0$ car $t\ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Puisque $f(0) = 0$, f est continue à droite en 0 et donc :

   $$\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

2. Les fonctions $t \mapsto t$, $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$ donc, par produit et combinaison linéaire, f est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
   Soit $t > 0$, on a

   $$\boxed{f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 \quad \text{et} \quad f''(t) = 2 - \frac{1}{t}.}$$

3. Pour tout $t > 0$, on a

   $$f''(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \leq \frac{1}{2}$$

   d'où le tableau de variation pour f' :

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f'	‖	↘	$f'(1/2)$	↗	

   Or $f'(1/2) = -\ln(1/2) = \ln 2 > 0$ donc f' est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et on obtient le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ 0	↗	$+\infty$

   La limite en $+\infty$ venant du fait que $f(t) \underset{t:+\infty}{\sim} t^2$ par croissances comparées.

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Soit $t > 0$, on a

   $$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{f(t)}{t} = t - \ln(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty.$$

   Ainsi,

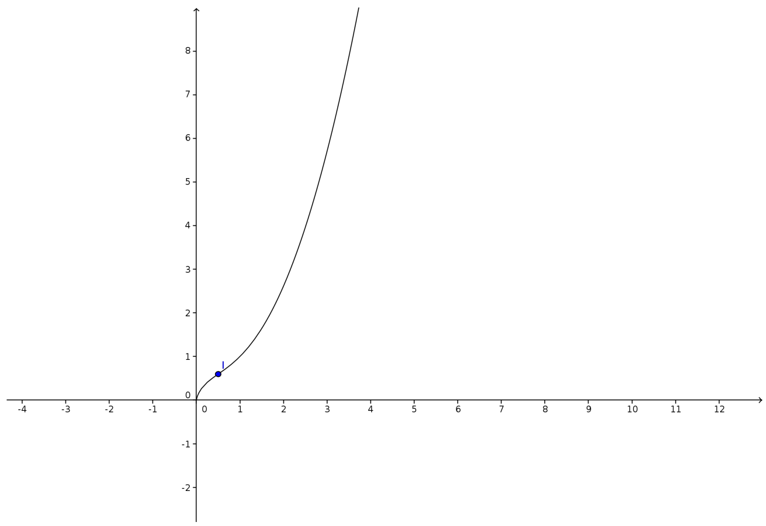
   $$\boxed{C \text{ admet une tangente verticale en } 0.}$$

(b) On a déjà vu que f'' s'annulait et changeait de signe uniquement en $t = 1/2$. Puisque

$$f(1/2) = \frac{1}{4} - \frac{\ln(1/2)}{2} = \frac{1 + 2\ln(2)}{4},$$

$$\boxed{C \text{ admet un unique point d'inflexion en } I = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1+2\ln 2}{4}\right).}$$

(c) On obtient :



5. f est continue, strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{t:+\infty} f(t) = +\infty$. Ainsi, f induit une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$. Puisque $1 \in [0, +\infty[$, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution. Et puisque $f(1) = 1 - 0 = 1$,

$$\boxed{1 \text{ est l'unique solution de l'équation } f(t) = 1 \text{ sur } \mathbf{R}_+.}$$

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On pose $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ qui est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

6. Pour tout $(x, y) \in U$, on a

$$\boxed{\nabla(F)(x, y) = \begin{bmatrix} \ln(y) - \dfrac{y}{x} \\ \\ \dfrac{x}{y} - \ln(x) \end{bmatrix}.}$$

7. (a) Soit $(x, y) \in U$. Alors

$$\nabla(F)(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(y) - \dfrac{y}{x} & = 0 \\ \\ \dfrac{x}{y} - \ln(x) & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ln(y) - y & = 0 \\ \\ x - y\ln(x) & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ln(y) - y & = 0 \\ \\ x & = y\ln(x) \end{cases}.$$

Si $x \leq 1$, on a $\ln(x) \leq 0$ et donc $y\ln(x) \leq 0$, ainsi, la seconde équation ne peut pas être vérifiée. Il s'ensuit que nécessairement $x > 1$. Dans ce cas, on peut diviser par $\ln(x)$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\nabla(F)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ln(y) - y & = 0 \\ \\ y & = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right) - \frac{x}{\ln(x)} & = 0 \\ \\ y & = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ln(x) - x\ln(\ln(x)) - \dfrac{x}{\ln(x)} & = 0 \\ \\ y & = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\ln(x)^2 - x\ln(x)\ln(\ln(x)) & = x \\ \\ y & = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(\ln(x)) & = 1 \\ \\ y & = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(\ln(x)) & = 1 \\ \\ y & = \dfrac{x}{\ln(x)}. \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall (x,y) \in U, \quad \nabla(F)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(\ln(x)) & = 1 \\ x & > 1 \\ y & = \dfrac{x}{\ln(x)}. \end{cases}}$$

(b) Si (x,y) est un point critique, on a $x > 1$ donc $\ln(x) \geq 0$ et donc l'équation $f(\ln(x)) = 1$ implique d'après I.5 que $\ln(x) = 1$, autrement dit $x = e$. Il s'ensuit que $y = \dfrac{e}{\ln(e)} = e$. Ainsi,

$$\boxed{(e,e) \text{ est l'unique point critique de } F.}$$

8. Pour tout $(x,y) \in U$, on a

$$\nabla^2(F)(x,y) = \begin{bmatrix} y/x^2 & 1/y - 1/x \\ 1/y - 1/x & x/y^2 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\nabla^2(F)(e,e) = \begin{bmatrix} y/e & 0 \\ 0 & 1/e \end{bmatrix}$$

qui est diagonale de sorte qu'elle admet $\dfrac{1}{e} > 0$ pour valeur propre double. Il s'ensuit que

$$\boxed{F \text{ présente un minimum local en } (e, e).}$$

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

9. On a $f(1/2) = \dfrac{1 + 2\ln(2)}{4}$ et

$$0,69 < \ln(2) < 0,70 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < 0,595 < \frac{1 + 2\ln(2)}{4} < 0,6.$$

D'autre part $f(1) = 1$. Puisque f est croissante, il vient

$$f([1/2, 1]) \subset [1/2, 1].$$

On montre alors par une récurrence immédiate que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [1/2, 1].}$$

10. On montre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_1 = f(u_0) = f(1/2) > 1/2 = u_0$ comme observé à la question précédente.
Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_{n+1} \geq u_n$. Alors, par croissance de f,

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1},$$

d'où l'hérédité.
Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n.}$$

11. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell \leq 1$. Par ailleurs, puisque $u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a en fait $\dfrac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.
Puisque f est continue, le théorème de point fixe assure que $f(\ell) = \ell$. Mais

$$f(\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell^2 - \ell\ln(\ell) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \ell - \ln(\ell) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad h(\ell) = 1.$$

où l'on a posé $h : x \mapsto x - \ln(x)$ sur $[1/2, 1]$. La fonction h est dérivable et, pour tout $x \in [1/2, 1]$, on a $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} < 0$ de sorte que h est strictement décroissante sur $[1/2, 1]$. Puisque $h(1) = 1$, c'est l'unique solution à l'équation $h(x) = 1$. Ainsi, $\ell = 1$ et

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 1.}$$

12. On propose le programme suivant :

```
u = 1/2
N = 0
while (1-u >= 10^(-4))
        u = u^2 - u*log(u)
        N = N+1
end
disp(N)
```

□