EMLyon 2016 - voie E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 3

Partie I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ définie, pour tout t de $\mathbf{R}$, par :

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge.

   (b) En utilisant l'imparité de la fonction $t \mapsto tf(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbf{E}[X] = 0$.

Partie II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie, pour tout x de $\mathbf{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbf{P}(Y \leq 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Partie III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $T_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

    (b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{P}(U_n \leq x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}.$$

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on préciser la fonction de répartition et une densité.

Solution : **D'après EMLyon 2016**.

Partie I

1. f est définie sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(-t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^{2t}}{e^{2t}} \times \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2} = f(t).$$

2. f est continue et positive sur $\mathbf{R}$. En outre elle est paire donc l'intégrale de f sur $\mathbf{R}$ converge si et seulement si son intégrale sur $\mathbf{R}_+$ converge. Mais, pour tout $T > 0$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\ dt &= \int_0^T \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\ dt \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^T \\ &= \frac{1}{1+e^{-T}} - \frac{1}{2} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1.$$

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.$$

Posons $T \leq x$, on a

$$\begin{aligned}\int_T^x f(t)\ dt &= \int_T^x \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\ dt \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_T^x \\ &= \frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{1+e^{-T}} \\ &\xrightarrow[T\to-\infty]{} \frac{1}{1+e^{-x}}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.}$$

4. (a) $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et, pour $t > 0$,

$$tf(t) \div \frac{1}{t^2} = t^3 f(t) = \frac{t^3 e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

donc $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc $\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge.

(b) Si on effectue le changement de variable $u = -t$ dans $\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt = -\int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\, dt = 0.$$

Partie II

5. φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$$

donc φ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. En outre,

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

donc φ induit une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0, +\infty[$.

6. Soit $y \in \mathbf{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(x) = y &\Leftrightarrow \ln(1+e^x) = y\\ &\Leftrightarrow 1 + e^x = e^y\\ &\Leftrightarrow e^x = e^y - 1\\ &\Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1).\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)$.

7. φ est à valeurs positives donc $Y = \varphi(X) \geq 0$ et donc $\mathbf{P}(Y \leq 0) = 0$.
8. Soit $y \in \mathbf{R}$. Si $y \leq 0$, on a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) \leq \mathbf{P}(Y \leq 0) = 0$. Et si $y > 0$, on a

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathbf{P}(Y \leq y)\\ &= \mathbf{P}(\varphi(X) \leq y)\\ &= \mathbf{P}\left(X \leq \varphi^{-1}(y)\right) \quad \text{(car } \varphi \text{ est une bijection croissante)}\\ &= F_X(\ln(e^y - 1))\\ &= \frac{1}{1 + e^{-\ln(e^y-1)}}\\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{e^y-1}}\\ &= \frac{1}{\frac{e^y}{e^y-1}}\\ &= \frac{e^y - 1}{e^y}\\ &= 1 - e^{-y}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in \mathbf{R}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 0\\ 1 - e^{-y} & \text{sinon}\end{cases}}$$

9. On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{E}(1)$. Ainsi, $Y \leadsto \mathcal{E}(1)$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\mathbf{E}[Y] = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y) = 1.}$$

Partie III

10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$.

    (a) On a

$$\begin{aligned} F_{T_n}(x) &= \mathbf{P}\left(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X_1 \leq x\right) \times \cdots \times \mathbf{P}\left(X_n \leq x\right) \\ &= F(x)^n. \end{aligned}$$

    (b) Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} F_{U_n}(x) &= \mathbf{P}\left(U_n \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(T_n - \ln(n) \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(T_n \leq x + \ln(n)\right) \\ &= F(x + \ln(n))^n \\ &= \left(\frac{1}{1 + e^{-x}e^{-\ln(n)}}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1 + \frac{e^{-x}}{n}}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

11. On a observé à la question précédente que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad F_{U_n}(x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$$

mais, quand n tend vers $+\infty$,

$$\ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) = \frac{e^{-x}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$-n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x} + o(1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -e^{-x}$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_{U_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(-e^{-x}).}$$

Posons $G : x \mapsto \exp(-e^{-x})$. Alors G est croissante sur $\mathbf{R}$ comme composition de deux fonctions décroissantes ($t \mapsto e^{-t}$). En outre, un calcul classique de compositions de limites montre que

$$\lim_{x:-\infty} G(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x:+\infty} G(x) = 1.$$

Par ailleurs, G est clairement continue à droite sur $\mathbf{R}$ donc il s'agit d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.
Il s'ensuit que

$$\boxed{U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Z.}$$

Puisqu'en outre G est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ (car composée de deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$), G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité Z. Une densité f_Z de Z est obtenue en dérivant la fonction de répartition G :

$$\boxed{f_Z : x \mapsto \exp(-(x + e^{-x})).}$$

$\square$