ESSEC - 2012 - VOIE E

(adapté pour Scilab)

Correction proposée par G. Dupont.

Ce problème comporte trois parties relativement indépendantes.
Dans la première partie on étudie les lois log-normales. On s'intéresse dans la partie II à une modélisation du cours d'une action appelé modèle binomial ou de Cox-Ross-Rubinstein et à son comportement asymptotique. Dans la troisième partie, on établit la formule de Black et Scholes, pour le prix d'une option dans le modèle limite obtenu dans la partie II.

Notations et définitions

— Les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

— On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

— On note respectivement $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{V}(X)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X, lorsque celles-ci existent.

— Soit m un réel et σ un réel strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi log-normale de paramètres (m, σ^2) si X est à valeurs strictement positives et si $\ln(X)$ suit la loi normale de paramètres (m, σ^2). On écrit alors $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

Partie I : Quelques propriétés des lois log-normales

On note dans cette partie m un réel et σ un réel strictement positif.
Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi log-normale de paramètres (m, σ^2).
On pourra dans la suite utiliser la variable aléatoire $Y = \ln(X)$.

1. Soit a, b deux réels, a étant différent de 0. On rappelle que si U est une variable aléatoire qui suit une loi normale de paramètres (m, σ^2), alors $aU + b$ suit aussi une loi normale.
   Quels en sont les paramètres ?
2. Cas où $m = 0$.
   On suppose dans cette question 2 que $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$.
   (a) *Densité.* Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de Φ.
   En déduire que X est une variable aléatoire à densité et que la fonction définie par
$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$
   est une densité de probabilité de X.
   (b) *Espérance.*
      i. Établir l'existence de $\mathbf{E}[X]$ et l'égalité
$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right) dy.$$
      ii. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{y}{\sigma} - \sigma$, en déduire $\mathbf{E}[X]$ en fonction de σ.
   (c) *Variance.*
      i. Soit α un réel non nul. Montrer que X^α suit une loi log-normale dont on précisera les paramètres.
      ii. En déduire que X admet une variance et que $\mathbf{V}(X) = e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.
3. On reprend le cas général : $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.
   (a) Soit μ un réel strictement positif.
   Montrer que μX suit une loi log-normale de paramètres $(m + \ln(\mu), \sigma^2)$.
   (b) Justifier l'existence de $\mathbf{E}[X]$, de $\mathbf{V}(X)$, et établir :
$$\mathbf{E}[X] = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Partie II : Le modèle binomiale de Cox-Ross-Rubinstein

Soit n un entier naturel non nul.
On souhaite modéliser l'évolution du cours d'une action entre les dates 0 et t fixé, strictement positif.
On suppose qu'initialement ce cours est $S_{0,n} = 1$ et si l'on note $S_{k,n}$ la valeur aléatoire de ce cours à la date $\frac{kt}{n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, on a la relation :

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right),$$

où :

- μ est une constante réel strictement positive liée au rendement moyen de l'action sur une durée égale à t ;
- v est une constante réelle strictement positive appelée volatilité de l'action sur la durée t ;
- $(Y_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (autrement dit, $\mathbf{P}(Y_k = 1) = \mathbf{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$).

  On suppose que n est assez grand pour que $1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} > 0$.

On admet que $S_{0,n}, \dots, S_{n,n}$ sont des variables aléatoires discrètes.
On note C_n la variable aléatoire $S_{n,n}$ qui modélise le cours de l'action à l'instant t.

4. *Simulation de la variable aléatoire C_n.*
   (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre l'expression Scilab : `2*grand(1,1,'uin',0,1)-1` ?
   (b) Compléter le script Scilab suivant pour que la fonction ainsi déclarée simule la variable aléatoire C_n.

```
function S = C(n,mu,v)
        S = 1
        for k = 1:n
                Y = --------
                S = S*--------
        end
endfunction
```

5. (a) Calculer l'espérance et la variance commune aux Y_k.
   (b) i. Montrer l'égalité :

$$C_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right).$$

   ii. En déduire que :

$$\mathbf{E}[C_n] = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(C_n) = \left(\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^{2n}.$$

   (c) Déterminer $\lim_{n:+\infty} \mathbf{E}[C_n]$ et montrer que $\lim_{n:+\infty} \mathbf{V}(C_n) = e^{2\mu}\left(e^{v^2} - 1\right)$.
   Déterminer les paramètres de la loi log-normale ayant pour espérance la première limite et pour variance la seconde.

6. (a) Expliciter un couple de réels (a_n, b_n) tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \ln\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right) = a_n + b_n Y_k.$$

   (b) En déduire que $\ln(C_n) = n a_n + b_n \sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   (c) Établir la convergence en loi, quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ vers la loi normale centrée réduite.
   On énoncera précisément le théorème utilisé.

7. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.
   (b) Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonction $x \mapsto \ln(1 + vx + \mu x^2)$ et $x \mapsto \ln(1 - vx + \mu x^2)$.

(c) Montrer que : $\lim_{n:+\infty} na_n = \mu - \dfrac{v^2}{2}$ et $\lim_{n:+\infty} \sqrt{n} b_n = v$.
En déduire que b_n est strictement positif à partir d'un certain rang.
On suppose dans la suite que cette condition est réalisée.

8. On note F_n la fonction de répartition de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

Soit x un réel. On pose $y = \dfrac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}$.

(a) Soit ϵ un réel strictement positif.

i. Établir l'existence d'un réel η strictement positif tel que

$$\Phi(y) - \frac{\epsilon}{2} \leq \Phi(y - \eta) \leq \Phi(y + \eta) \leq \Phi(y) + \frac{\epsilon}{2}.$$

ii. Montrer qu'il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$:

$$y - \eta \leq \frac{x - na_n}{\sqrt{n} b_n} \leq y + \eta.$$

iii. Montrer qu'il existe un entier naturel n_2 tel que, pour tout $n \geq n_2$:

$$F_n(y + \eta) \leq \Phi(y + \eta) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad F_n(y - \eta) \geq \Phi(y - \eta) - \frac{\epsilon}{2}.$$

iv. Montrer que $G_n(x) = F_n\left(\dfrac{x - na_n}{\sqrt{n} b_n}\right)$, et en déduire que, pour n assez grand, on a :

$$\left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{v^2}{2}}{v}\right) \right| \leq \epsilon.$$

(b) En conclure que la suite de variables aléatoires $(\ln(C_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres.

9. Démontrer que $(C_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi log-normale de paramètres $\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

Partie III : La formule de Black et Scholes

Soit t un réel strictement positif.
A la date 0, un investisseur achète sur le marché une option sur une action dont la date d'échéance est t et le prix d'exercice K, un réel strictement positif.

— Si à la date t, le cours C de l'action est supérieur ou égal à K, il peut acheter l'action au prix K et la revendre au prix C ;

— dans le cas contraire, son option n'a plus de valeur à la date t.

Le but de cette partie est de donner une valeur raisonnable au prix d'achat de l'option, que l'on note π_K.
On fait les hypothèses suivantes :

— On choisit comme unité le cours de l'action à la date 0, c'est-à-dire qu'à cet instant le court de l'action vaut 1.

— Le cours de l'action à la date t est une variable aléatoire C qui suit une loi log-normale de paramètres (m, v^2).

— On suppose qu'il existe sur le marché un actif non risqué dont le taux de rentabilité entre les dates 0 et t vaut $e^r - 1$, où r est un réel strictement positif.

— On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par, pour tout x réel, $f(x) = \max(0, x)$.

10. (a) Justifier que la valeur de l'option à la date t est $f(C - K)$.

(b) Si au lieu d'acheter l'option, l'investisseur avait placé à la date 0 son prix d'achat π_K sur l'actif non risqué, quelle serait la valeur de son placement à la date t ?

(c) En déduire qu'il convient de poser $\pi_K = e^{-r}\mathbf{E}\left[f(C - K)\right]$ si l'on veut que ces deux stratégies aient la même rentabilité moyenne.
Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de π_K que l'on utilise.

11. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
    (b) Établir l'existence de $\mathbf{E}\left[f(C-K)\right]$ et l'égalité

$$\mathbf{E}\left[f(C-K)\right] = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^x - K) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2v^2}\right)\, dx.$$

12. (a) Montrer l'égalité :

$$\pi_K = \exp\left(m - r + \frac{v^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{v^2 + m - \ln(K)}{v}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{v}\right).$$

    (b) On suppose que $m = r - \dfrac{v^2}{2}$, ce qui signifie que le rendement moyen de l'action et de l'actif non risqué sont identiques.
    Établir la formule de Black-Scholes :

$$\pi_K = \Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} + \frac{v}{2}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{r - \ln(K)}{v} - \frac{v}{2}\right).$$

13. Dans la pratique, le prix de l'option est fixé par le marché et vaut x, où x est un réel strictement positif. On pose $\theta = r - \ln(K)$, de sorte que le prix d'échéance vaut $K = \exp(r - \theta)$.

    On appelle alors volatilité implicite de l'action, tout réel positif v, s'il en existe, tel que :

$$x = \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right).$$

    On définit alors la fonction $\Psi : v \mapsto \Phi\left(\dfrac{\theta}{v} + \dfrac{v}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\dfrac{\theta}{v} - \dfrac{v}{2}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

    (a) Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $v > 0$,

$$\Psi'(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right)^2\right).$$

    Dresser le tableau de variation de Ψ en y faisant figurer les limites en 0 et en $+\infty$.
    On distinguera les cas $\theta > 0$ et $\theta \leq 0$.

    (b) Déterminer pour quelles valeurs de x il existe une volatilité implicite et prouver alors qu'elle est unique.
    En conclure finalement que l'on peut définir *la* volatilité implicite si et seulement si :

$$f(1 - e^{-\theta}) < x < 1.$$

Solution :

Notations :

— Si X est une variable aléatoire à valeurs réelles, on note F_X sa fonction de répartition.

— Si X admet une densité, f_X désignera toujours une telle densité.

— On note φ la fonction de densité de la loi normale centrée réduite qui est continue sur $\mathbf{R}$.

Partie I

1. Les deux paramètres d'une loi normale sont respectivement son espérance et sa variance. Puisque $aU+b$ suit une loi normale, il suffit de calculer son espérance et sa variance pour obtenir ses paramètres. Or on a

$$\mathbf{E}\left[aU+b\right] = a\mathbf{E}\left[U\right]+b = am+b$$

et

$$\mathbf{V}\left(aU+b\right) = a^2\mathbf{V}\left(U\right) = (a\sigma)^2.$$

Ainsi,

$$\boxed{aU+b \rightsquigarrow \mathcal{N}(am+b,(a\sigma)^2).}$$

2. Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(0,\sigma^2)$.

(a) X est à valeurs strictement positives donc $F_X(x)=0$ si $x\leq 0$. Soit alors $x>0$, on a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}\left(X\leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\ln(X)\leq \ln(x)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{\ln(X)}{\sigma}\leq \frac{\ln(x)}{\sigma}\right) \\ &= F_N\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

où $N=\dfrac{\ln(X)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x>0,\quad F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right).}$$

Puisque F_X est constante sur $\mathbf{R}_-$, elle y est $\mathcal{C}^1$. Et puisque Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Il s'ensuit que F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$. Par ailleurs,

$$\lim_{x:0^+} F_X(x) = \lim_{x:0^+}\Phi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) = \lim_{y:-\infty}\Phi(y) = 0 = \lim_{x:0^-}F_X(x).$$

Ainsi, F_X est continue sur $\mathbf{R}$. Il s'agit ainsi de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité f_X satisfait $f_X(x)=F_X'(x)$ en tout point $x\in\mathbf{R}^*$. Or, pour $x>0$, on a

$$F_X'(x) = \frac{1}{\sigma x}\Phi'\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma x}\varphi\left(\frac{\ln(x)}{\sigma}\right).$$

Ainsi, X admet pour densité f_X définie par :

$$\boxed{\forall x\in\mathbf{R},\quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si}\quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si}\quad x>0. \end{cases}}$$

(b) **Espérance**.

i. Commençons par étudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\ dx$. Puisque $f_X(x) = 0$ si $x \leq 0$, ceci nous ramène à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_X(x)\ dx$ où l'intégrande est continue et positive sur $\mathbf{R}_+^*$.

On commence par observer que $\lim\limits_{x:0^+} x f_X(x) = 0$, en effet, en posant $u = \ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$, on a

$$x f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \xrightarrow[u \to -\infty]{} 0.$$

Ainsi, f_X est prolongeable par continuité en 0 et donc son intégrale converge absolument sur $[0, 1]$. On a en outre

$$\begin{aligned}
x^2 \times x f_X(x) &= x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(2\ln x) \times \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(2\ln x - \frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\ln(x)\left(2 - \frac{\ln(x)}{2\sigma^2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\ln(x)\left(2 - \frac{\ln(x)}{2\sigma^2}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

donc

$$x^2 \times x f_X(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

et donc

$$x f_X(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Il suit alors du théorème de comparaison que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_X(x)\ dx$ converge et donc

$$\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\ dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right)\ dx \\
&\underset{y=\ln(x)}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) e^y\ dy \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\ dy.
\end{aligned}$$

On a ainsi établi l'égalité :

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y\right)\right)\ dy.}$$

ii. Posons $t = \frac{y}{\sigma} - \sigma$. On a donc $t^2 = \frac{y^2}{\sigma^2} - 2y + \sigma^2$ et alors

$$\frac{y^2}{\sigma^2} - 2y = t^2 - \sigma^2.$$

On a ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X\right] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t^2 - \sigma^2\right)\right) \sigma dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \, dt \\
&= e^{\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \, dt \\
&= e^{\sigma^2/2} \times 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\left[X\right] = e^{\sigma^2/2}.}$$

(c) **Variance**.

i. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$. On a

$$\ln(X^\alpha) = \alpha \ln(X) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, (\alpha\sigma)^2).$$

Ainsi,

$$\boxed{X^\alpha \rightsquigarrow \mathcal{LN}(0, (\alpha\sigma)^2).}$$

ii. Il suit de la question précédente que X^2 suit une loi $\mathcal{LN}(0, 4\sigma^2)$ et donc, en vertu de 2.b, X^2 admet une espérance et

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = e^{(4\sigma^2)/2} = e^{2\sigma^2}.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\left(X\right) &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}\left[X\right]^2 \\
&= e^{2\sigma^2} - (e^{\sigma^2/2})^2 \\
&= e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2} \\
&= e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{V}\left(X\right) = e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).}$$

3. On suppose maintenant que $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(m, \sigma^2)$.

(a) Soit μ un réel strictement positif.
On a

$$\ln(\mu X) = \ln(X) + \ln(\mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(m + \ln(\mu), \sigma^2)$$

et donc

$$\boxed{\mu X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(m + \ln(\mu), \sigma^2).}$$

(b) D'après la question précédente,

$$e^{-m} X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(0, \sigma^2)$$

donc $e^{-m}X$ admet une espérance et $X = e^m(e^{-m}X)$ aussi. En outre,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}\left[e^m(e^{-m}X)\right]\\ &= e^m\mathbf{E}\left[e^{-m}X\right]\\ &\underset{2.b}{=} e^m e^{\sigma^2/2}\\ &= e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{V}\left(e^m(e^{-m}X)\right)\\ &= e^{2m}\mathbf{V}\left(e^{-m}X\right)\\ &\underset{2.c}{=} e^{2m}(e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1))\\ &= e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)).\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right).}$$

Partie II

4. *Simulation de la variable aléatoire C_n.*
   (a) `grand(1,1,'uin',0,1)` simule une loi uniforme sur $\{0,1\}$, elle prend donc les valeurs 0 et 1 avec les mêmes probabilités. Si on multiplie par deux et que l'on retranche 1, on obtient les valeurs -1 et 1 avec la même probabilité.
   Autrement dit,

   `2*grand(1,1,'uin',0,1)-1` simule une loi $\mathcal{U}(\{-1,1\})$.

   (b) Le script Scilab suivant simule la variable aléatoire C_n.

```
function S = C(n,mu,v)
        S = 1
        for k = 1:n
                Y = 2*grand(1,1,'uin',0,1)-1
                S = S*(1 + mu/n + v/sqrt(n)*Y)
        end
endfunction
```

5. (a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\mathbf{E}[Y_k] = \mathbf{P}(Y_k = 1) - \mathbf{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

et, en vertu du théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left[Y_k^2\right] = \mathbf{P}(Y_k = 1) + \mathbf{P}(Y_k = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, il suit de la formule de Koenig-Huygens que

$$\boxed{\mathbf{E}[Y_k] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y_k) = 1.}$$

(b) i. On montre, par récurrence sur $i \in [\![1, n]\!]$ que :

$$S_{i,n} = \prod_{k=1}^{i} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right).$$

Pour $i = 1$, on a

$$S_{1,n} = S_{0,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_1\right) = \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_1\right)$$

car $S_{0,n} = 1$. La propriété est donc vérifiée pour $i = 1$.
Supposons que l'égalité soit vraie pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et montrons qu'elle est vraie pour $i+1$. On a

$$\begin{aligned}
S_{i+1,n} &= S_{i,n} \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_{i+1}\right) \\
&= \left[\prod_{k=1}^{i} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)\right] \times \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_{i+1}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{i+1} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité.
Ainsi,

$$\boxed{C_n = S_{n,n} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right).}$$

ii. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[C_n] &= \mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right] \quad (\text{ par indépendance des } Y_k) \\
&\underset{(5.a)}{=} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}[C_n] = \left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^n.}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[C_n^2\right] &= \mathbf{E}\left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k\right)^2\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{\mu}{n}\right) \frac{v}{\sqrt{n}} Y_k + \frac{v^2}{n} Y_k^2\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right] \quad (\text{ car } \mathbf{E}[Y_k] = 0 \text{ et } \mathbf{E}\left[Y_k^2\right] = 1)
\end{aligned}$$

$$= \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{V}(C_n) = \mathbf{E}\left[C_n^2\right] - \mathbf{E}\left[C_n\right]^2 = \left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n - \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n}.}$$

(c) On a, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[C_n\right] &= \left(1+\frac{\mu}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\right) \\ &= \exp(\mu + o(1)) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\mu}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\left[C_n\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\mu}.}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^2 + \frac{v^2}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2\mu+v^2}{n}+\frac{\mu^2}{n^2}\right)\right) \\ &= \exp(2\mu+v^2+o(1)) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{2\mu+v^2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{2n} &= \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{\mu}{n}\right)\right) \\ &= \exp(2\mu+o(1)) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{2\mu}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{V}(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{2\mu+v^2} - e^{2\mu} = e^{2\mu}(e^{v^2}-1).}$$

Si on pose

$$\boxed{\sigma = v \quad \text{et} \quad m = \mu - \frac{v^2}{2},}$$

alors pour $X \rightsquigarrow \mathcal{LN}(m,\sigma^2)$, on a d'après 3.b,

$$\mathbf{E}[X] = e^{m+\sigma^2/2} = e^{\mu} = \lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}\left[C_n\right]$$

et

$$\mathbf{V}(X) = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1) = e^{2\mu}(e^{v^2}-1) = \lim_{n\to+\infty}\mathbf{V}(C_n).$$

6. (a) Posons

$$\begin{cases} a_n &= \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}-\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ b_n &= \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)-\ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}-\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right)\right]. \end{cases}$$

Alors,

$$\forall \omega\in\Omega, \forall k\in [\![1,n]\!],\quad a_n+b_nY_k(\omega)=\begin{cases} \ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}+\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) & \text{si}\quad Y_k(\omega)=1 \\ \ln\left(1+\dfrac{\mu}{n}-\dfrac{v}{\sqrt{n}}\right) & \text{si}\quad Y_k(\omega)=-1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k\in [\![1,n]\!],\quad a_n+b_nY_k=\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right).}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} \ln(C_n) &= \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}Y_k\right) \\ &\underset{(6.b)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_n+b_nY_k \\ &= na_n+b_n\sum_{k=1}^{n}Y_k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ln(C_n)=na_n+b_n\sum_{k=1}^{n}Y_k.}$$

(c) Les $(Y_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes de même loi admettant toute une espérance (nulle d'après 5.a) et une variance (égale à 1 toujours d'après 5.a). Ainsi, il suit du théorème de la limite centrée (TCL) que

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}Y_i-n\times 0}{\sqrt{n}\times 1}\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}Y_i\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1).}$$

7. (a) Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$ en 0 est :

$$\boxed{\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).}$$

(b) En appliquant le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+u)$ avec $u = vx + \mu x^2$ qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1+vx+\mu x^2) &= (vx+\mu x^2) - \frac{1}{2}(vx+\mu x^2)^2 + o(x^2) \\
&= vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}(v^2x^2 + 2\mu v x^3 + \mu^2 x^4) + o(x^2) \\
&= vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ln(1+vx+\mu x^2) = vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + o(x^2).}$$

De la même manière, en posant $u = -vx + \mu x^2$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(1-vx+\mu x^2) &= -vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}(-vx+\mu x^2)^2 + o(x^2) \\
&= -vx + \mu x^2 - \frac{1}{2}(v^2x^2 - 2\mu v x^3 + \mu^2 x^4) + o(x^2) \\
&= -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ln(1-vx+\mu x^2) = -vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) x^2 + o(x^2).}$$

(c) Si on pose $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\begin{aligned}
na_n &= \frac{n}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2x^2}\left[\ln\left(1+vx+\mu x^2\right) + \ln\left(1-vx+\mu x^2\right)\right] \\
&\underset{(7.b)}{=} \frac{1}{2x^2}\left[vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)x^2 - vx + \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)x^2 + o(x^2)\right] \\
&= \frac{1}{2x^2}\left[2\left(\mu - \frac{v^2}{2}\right)x^2 + o(x^2)\right] \\
&= \left(\mu - \frac{v^2}{2}\right) + o(1) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu - \frac{v^2}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{na_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu - \frac{v^2}{2}.}$$

De la même manière,

$$\sqrt{n}b_n = \frac{\sqrt{n}}{2}\left[\ln\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{v}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(1+\frac{\mu}{n}-\frac{v}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2x}\left[\ln\left(1+vx+\mu x^2\right)-\ln\left(1-vx+\mu x^2\right)\right] \\
&\underset{(7.b)}{=} \frac{1}{2x}\left[vx+\left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)x^2+vx-\left(\mu-\frac{v^2}{2}\right)x^2+o(x^2)\right] \\
&= \frac{1}{2x}\left[2vx+o(x^2)\right] \\
&= v+o(x) \\
&= v+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} v.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{n}b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v.}$$

Il s'ensuit que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v}{\sqrt{n}}$ et donc, pour n suffisamment grand b_n est du même signe que $\frac{v}{\sqrt{n}}$ qui est strictement positif.

8. On note F_n la fonction de répartition de $\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1+\cdots+Y_n)$ et G_n la fonction de répartition de $\ln(C_n)$.

   Soit x un réel. On pose $y=\frac{x-\mu+\frac{v^2}{2}}{v}$.

   (a) Soit ϵ un réel strictement positif.

   i. Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, elle est ainsi continue sur $\mathbf{R}$ et donc en y. En particulier, $\epsilon>0$ étant fixé, il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $t\in\mathbf{R}$,

   $$|t-y|\le\eta \quad\Rightarrow\quad |\Phi(t)-\Phi(y)|\le\frac{\epsilon}{2}.$$

   En particulier, pour $t=y-\eta$, on obtient

   $$|\Phi(y-\eta)-\Phi(y)|\le\frac{\epsilon}{2}$$

   et pour $t=y+\eta$, on obtient

   $$|\Phi(y+\eta)-\Phi(y)|\le\frac{\epsilon}{2}.$$

   Φ étant une fonction de répartition, elle est croissante et donc

   $$\Phi(y-\eta)\le\Phi(y)\le\Phi(y+\eta).$$

   Ainsi,

   $$
   \begin{aligned}
   |\Phi(y+\eta)-\Phi(y)|\le\frac{\epsilon}{2} &\Leftrightarrow \Phi(y+\eta)-\Phi(y)|\le\frac{\epsilon}{2} \\
   &\Leftrightarrow \Phi(y+\eta)\le\Phi(y)+\frac{\epsilon}{2}
   \end{aligned}
   $$

   et

   $$
   \begin{aligned}
   |\Phi(y-\eta)-\Phi(y)|\le\frac{\epsilon}{2} &\Leftrightarrow \Phi(y)-\Phi(y-\eta)\le\frac{\epsilon}{2} \\
   &\Leftrightarrow \Phi(y)-\frac{\epsilon}{2}\le\Phi(y-\eta).
   \end{aligned}
   $$

   En conclusion,

   $$\boxed{\Phi(y)-\frac{\epsilon}{2}\le\Phi(y-\eta)\le\Phi(y+\eta)\le\Phi(y)+\frac{\epsilon}{2}.}$$

ii. On a établi en 7.c que

$$na_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu - \frac{v^2}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{n}b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v.$$

Ainsi,

$$\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x - \mu + v^2/2}{v} = y.$$

Puisque $\eta > 0$, il suit de la définition de la convergence d'une suite qu'il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad y - \eta \leq \frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n} \leq y + \eta.}$$

iii. D'après 6.c, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ et Φ est continue sur $\mathbf{R}$ donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$F_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(t).$$

En particulier,

$$F_n(y-\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(y-\eta) \quad \text{et} \quad F_n(y+\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(y+\eta).$$

Par définition de la convergence de ces deux suites, il existe $n_2 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\boxed{n \geq n_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_n(y-\eta) & \geq \Phi(y-\eta) - \dfrac{\epsilon}{2} \\[2ex] F_n(y+\eta) & \leq \Phi(y+\eta) + \dfrac{\epsilon}{2} \end{cases}}$$

iv. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbf{P}\left(\ln(C_n) \leq x\right) \\ &\underset{(6.b)}{=} \mathbf{P}\left(na_n + b_n \sum_{k=1}^{n} Y_k \leq x\right) \\ &\underset{(7.c)}{=} \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq \frac{x - na_n}{b_n}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k \leq \frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) \\ &= F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad G_n(x) = F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right).}$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$ et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$. On a, d'après 8.a.i,

$$y - \eta \leq \frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n} \leq y + \eta$$

donc, par croissance de F_n,

$$F_n(y-\eta) \leq F_n\left(\frac{x - na_n}{\sqrt{n}b_n}\right) \leq F_n(y+\eta)$$

et donc, d'après le calcul précédent,

$$F_n(y-\eta) \leq G_n(x) \leq F_n(y+\eta).$$

Il suit alors de 8.a.iii que

$$\Phi(y-\eta) - \frac{\epsilon}{2} \leq G_n(x) \leq \Phi(y+\eta) + \frac{\epsilon}{2}$$

et donc, d'après 8.a.ii,

$$\Phi(y) - \epsilon \leq G_n(x) \leq \Phi(y) + \epsilon$$

et donc

$$-\epsilon \leq G_n(x) - \Phi(y) \leq \epsilon.$$

Ainsi,

$$\boxed{n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left| G_n(x) - \Phi\left(\frac{x-\mu+v^2/2}{v}\right)\right| \leq \epsilon.}$$

(b) Soit $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{x-\mu+v^2/2}{v}\right) &= \mathbf{P}\left(Z \leq \frac{x-\mu+v^2/2}{v}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(vZ + \mu - \frac{v^2}{2} \leq x\right) \\
&= F_N(x),
\end{aligned}$$

où $N = vZ + \mu - \dfrac{v^2}{2} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$.

Ainsi, on peut réécrire 8.a.iv comme $G_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_N(x)$. Autrement dit,

$$\boxed{\ln(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right).}$$

9. Soit $N \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$ et $Y = e^N$. On a $C_n(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(C_n \leq x\right) &= \mathbf{P}\left(\ln(C_n) \leq \ln(x)\right) \\
&= G_n(\ln(x)) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} F_N(\ln(x)) \quad \text{(d'après 8.b)} \\
&= \mathbf{P}\left(N \leq \ln(x)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\ln(Y) \leq \ln(x)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(Y \leq x\right) \\
&= F_Y(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, (C_n) converge en loi vers Y et et $\ln(Y) = N \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$ de sorte que Y suit une loi log-normale $\mathcal{LN}\left(\mu - \dfrac{v^2}{2}, v^2\right)$. En conclusion,

$$\boxed{C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{LN}\left(\mu - \frac{v^2}{2}, v^2\right).}$$

Partie III : La formule de Black et Scholes

10. (a) Si à la date t le cours C est strictement supérieur à K, la valeur de l'option est de $C-K$. Sinon, elle est nulle. Ainsi, la valeur de l'option est égale à $C-K$ quand $C-K$ est positif et à 0 sinon. Elle est donc égale à $\max(0, C-K) = f(C-K)$.

    (b) Si on place π_K sur l'actif non risqué, on a un gain de $(e^r - 1)\pi_K$ sur la période de sorte que la valeur du placement à la date t devient $\pi_K + (e^r-1)\pi_K = e^r \pi_K$.

    (c) Avoir la même rentabilité moyenne signifie que l'espérance de la valeur de l'option $f(C-K)$ doit être égale à la valeur du placement non risqué. Autrement dit, on doit avoir $\mathbf{E}[f(C-K)] = e^r\pi_K$, ou encore

$$\boxed{\pi_K = e^{-r}\mathbf{E}[f(C-K)].}$$

Dans les questions suivantes, c'est cette valeur de π_K que l'on utilise.

11. (a) f est nulle sur $\mathbf{R}_-$, elle y est donc continue. f est égale à l'identité sur $\mathbf{R}_+$, elle y est donc continue. Enfin, on a

$$\lim_{x:0^-} f(x) = \lim_{x:0^-} 0 = 0 = \lim_{x:0^+} x = \lim_{x:0^+} f(x)$$

et $f(0) = 0$ de sorte que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$$

    (b) C suit une loi log-normale de paramètres (m, v^2) dont on note f_C une densité. Alors, d'après le théorème de transfert, $f(C-K)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-K)| f_C(x)\,dx$ converge. Or

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-K)| f_C(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} |f(x-K)| f_C(x)\,dx \quad (\text{ car } C(\Omega) = \mathbf{R}_+^*) \\
&= \int_{K}^{+\infty} (x-K) f_C(x)\,dx \\
&\underset{y=\ln(x)}{=} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^y - K) f_C(e^y) e^y\,dy.
\end{aligned}$$

Mais $C \rightsquigarrow \mathcal{LN}(m, v^2)$ donc $N = \ln(C) \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, v^2)$ et donc, pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$F_C(e^y) = \mathbf{P}(C \le e^y) = \mathbf{P}(N \le y) = F_N(y)$$

de sorte que

$$f_N(y) = F_N'(y) = e^y F_C'(e^y) = e^y f_C(e^y).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^y - K) f_N(y)\,dy \\
&= \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^y - K) \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{v}\right)^2\right)\,dy
\end{aligned}$$

qui converge car l'intégrande est continue sur $[\ln(K), +\infty[$, positive et négligeable devant $\dfrac{1}{y^2}$ en $+\infty$. Alors, il suit du théorème de transfert que $f(C-K)$ admet une espérance et que

$$\mathbf{E}[f(C-K)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-K) f_C(x)\,dx$$

$$= \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^y - K) \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m}{v}\right)^2\right) \ dy \quad \text{(voir calcul précédent).}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\left[f(C-K)\right] = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^y - K) \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2v^2}\right) \ dy.}$$

12. (a) Si $N \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, v^2)$, on a

$$\begin{aligned}\pi_K &= e^{-r}\mathbf{E}\left[f(C-K)\right] \\ &= e^{-r} \int_{\ln(K)}^{+\infty} (e^x - K) f_N(x) \ dx \\ &= e^{-r} \int_{\ln(K)}^{+\infty} e^x f_N(x) \ dx - K e^{-r} \int_{\ln(K)}^{+\infty} f_N(x) \ dx.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{\ln(K)}^{+\infty} f_N(x) \ dx &= \mathbf{P}\left(N \geq \ln(K)\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(N \leq \ln(K)\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{N-m}{v} \leq \frac{\ln(K)-m}{v}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(K)-m}{v}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right),\end{aligned}$$

car, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a la relation $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
Par ailleurs,

$$e^x f_N(x) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \exp\left(x - \frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{v}\right)^2\right)$$

mais

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{v}\right)^2 &= \left[\frac{2v^2x - x^2 + 2mx - m^2}{2v^2}\right] \\ &= -\frac{1}{2v^2}\left[x^2 - 2(m+v^2) + m^2\right] \\ &= -\frac{1}{2v^2}\left[(x-(m+v))^2 - 2mv^2 - v^4\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x-(m+v)}{v}\right)^2 + \left(m + \frac{v^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}e^{-r} \int_{\ln(K)}^{+\infty} e^x f_N(x) \ dx &= e^{-r+m+\frac{v^2}{2}} \int_{\ln(K)}^{+\infty} \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-(m+v)}{v}\right)^2\right) \\ &= e^{-r+m+\frac{v^2}{2}} \mathbf{P}\left(N_1 \geq \ln(K)\right),\end{aligned}$$

où $N_1 \rightsquigarrow \mathcal{N}(m + v^2, v)$.
Or,

$$\mathbf{P}\left(N_1 \geq \ln(K)\right) = 1 - \mathbf{P}\left(N_1 \leq \ln(K)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{N_1 - (m+v^2)}{v} \leq \frac{\ln(K) - (m+v^2)}{v}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) - (m+v^2)}{v}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{m+v^2-\ln(K)}{v}\right)
\end{aligned}
$$

et donc

$$
e^{-r}\int_{\ln(K)}^{+\infty} e^x f_N(x)\, dx = e^{-r+m+\frac{v^2}{2}}\Phi\left(\frac{m+v^2-\ln(K)}{v}\right).
$$

En conclusion,

$$
\boxed{\pi_K = e^{-r+m+\frac{v^2}{2}}\Phi\left(\frac{m+v^2-\ln(K)}{v}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{m-\ln(K)}{v}\right).}
$$

(b) On a

$$
\begin{aligned}
m = r - \frac{v^2}{2} &\Rightarrow v^2 + m - \ln(K) = \frac{v^2}{2} + r - \ln(K) \\
&\Rightarrow \frac{v^2+m-\ln(K)}{v} = \frac{v}{2} + \frac{r-\ln(K)}{v}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{m-\ln(K)}{v} &= \frac{r - v^2/2 - \ln(K)}{v} \\
&= \frac{r-\ln(K)}{v} - \frac{v}{2}
\end{aligned}
$$

et donc la formule établie en 12.a devient

$$
\boxed{\pi_K = \Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v} + \frac{v}{2}\right) - Ke^{-r}\Phi\left(\frac{r-\ln(K)}{v} - \frac{v}{2}\right).}
$$

13. On pose $\theta = r - \ln(K)$, de sorte que le prix d'échéance vaut $K = \exp(r-\theta)$.

On appelle alors volatilité implicite de l'action, tout réel positif v, s'il en existe, tel que :

$$
x = \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right).
$$

On définit alors la fonction $\Psi : v \mapsto \Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - e^{-\theta}\Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)$ sur $]0, +\infty[$.

(a) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ comme fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité continue et $v \mapsto \frac{\theta}{v} \pm \frac{v}{2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$ de sorte que Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$ et donc sur $\mathbf{R}_+^*$.
En outre, pour tout $v > 0$, on a

$$
\Psi'(v) = \left(-\frac{\theta}{v^2} + \frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) - e^{-\theta}\left(-\frac{\theta}{v^2} - \frac{1}{2}\right)\varphi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)
$$

mais

$$
e^{-\theta}\varphi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right) = e^{-\theta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right)^2\right)
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(2\theta + \frac{\theta^2}{v^2} - \theta + \frac{v^2}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right)^2\right) \\
&= \varphi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\Psi'(v) = \varphi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Psi \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R}_+^*.}$$

Si $\theta > 0$, on a

$$\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to 0^+]{} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{v} - \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to 0^+]{} +\infty$$

donc

$$\Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v \to 0^+]{} 1 \quad \text{et} \quad \Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v \to 0^+]{} 1$$

de sorte que

$$\Psi(v) \xrightarrow[v \to 0^+]{} 1 - e^{-\theta}.$$

Si $\theta < 0$, on a

$$\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to 0^+]{} -\infty \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{v} - \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to 0^+]{} -\infty$$

donc

$$\Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v \to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad \Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v \to 0^+]{} 0$$

de sorte que

$$\Psi(v) \xrightarrow[v \to 0^+]{} 0.$$

Enfin, si $\theta = 0$,

$$\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{v} - \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to 0^+]{} 0$$

donc

$$\Phi\left(\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v \to 0^+]{} \Phi(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Phi\left(\frac{\theta}{v} - \frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v \to 0^+]{} \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

de sorte que

$$\Psi(v) \xrightarrow[v \to 0^+]{} \Phi(0) - e^0\Phi(0) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{v:0^+} \Psi(v) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta} & \text{si} \quad \theta > 0. \end{cases}}$$

Par ailleurs, pour tout θ réel, on a

$$\frac{\theta}{v} + \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{v} - \frac{v}{2} \xrightarrow[v \to +\infty]{} -\infty$$

de sorte que

$$\Phi\left(\frac{\theta}{v}+\frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \Phi\left(\frac{\theta}{v}-\frac{v}{2}\right) \xrightarrow[v\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$\boxed{\lim_{v:+\infty} \Psi(v) = 1.}$$

On obtient donc, quand $\theta \leq 0$,

v	0		$+\infty$
$\Psi(v)$	0	$\nearrow$	1

et quand $\theta > 0$,

v	0		$+\infty$
$\Psi(v)$	$1-e^{-\theta}$	$\nearrow$	1

(b) Pour x donné, il existe une volatilité implicite s'il existe v tel que $\Psi(v) = x$.
Si $\theta \leq 0$, Ψ induit une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]0,1[$ de sorte qu'il existe une volatilité implicite quand $x \in]0,1[$ et que celle ci est alors unique.
Dans ce cas, on a $1-e^{-\theta} \leq 0$ de sorte que $f(1-e^{-\theta}) = 0$ et donc

$$x \in]0,1[\quad \Leftrightarrow \quad f(1-e^{-\theta}) < x < 1.$$

Si $\theta > 0$, Ψ induit une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]1-e^{-\theta},1[$ de sorte qu'il existe une volatilité implicite quand $x \in]1-e^{-\theta},1[$ et que celle-ci est alors unique.
Dans ce cas, on a $1-e^{-\theta} > 0$ donc $f(1-e^{-\theta}) = 1-e^{-\theta}$ et donc

$$x \in]1-e^{-\theta},1[\quad \Leftrightarrow \quad f(1-e^{-\theta}) < x < 1.$$

Ainsi, dans tous les cas

$$\boxed{\text{La volatilité implicite est bien définie si et seulement si } f(1-e^{-\theta}) < x < 1.}$$

□