ECRiCOME 2020 - voie E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{bmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$.

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.
9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.
10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T.
11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés.
    La matrice M est-elle diagonalisable ?

Solution :

Partie A : Étude du cas où $a = 1$.

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Puisque $a = 1$, on a

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

et donc, par un calcul matriciel direct,

$$\boxed{(M-I_3)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = 0_3.}$$

2. D'après la question précédente, $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de M et sa seule racine est 1. Ainsi, la seule valeur propre possible pour M est 1. Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) \subset \{1\}.}$$

3. Puisque $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$, on peut affirmer que M est inversible.
   Par ailleurs, la matrice M étant composée de deux colonnes colinéaires et d'une colonne nulle, on a $\mathrm{rg}(M-I_3) = 1 < 3$ donc 1 est valeur propre. Ainsi, M possède 1 pour unique valeur propre et $M \neq I_3$ donc M n'est pas diagonalisable.
   En conclusion,

$$\boxed{\text{Si } a = 1, \text{ alors } M \text{ est inversible et non diagonalisable.}}$$

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

Dans cette partie, puisque $a = 0$, on a

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. On a

$$M - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

donc $\mathrm{rg}(M-I_3) = 1$ et donc $\dim\ker(M-I_3) = 3-1 = 2 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(M) \quad \text{et} \quad \dim E_1(M) = 2.}$$

En outre, si $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, on a

$$X \in E_1(M) \quad \Leftrightarrow \quad (M-I_3)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-y-z=0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} y+z \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de $E_1(M)$. Les deux vecteurs constituant cette famille étant non colinéaires, la famille est libre et :

$$\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ est une base de } E_1(M).}$$

5. Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. Alors, on a :

$$X \in \ker(M) \quad \Leftrightarrow \quad MX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y - z &= 0 \\ x - z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z &= x \\ y &= x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\ker(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \neq \{0\}$ et donc M n'est pas inversible.

6. Puisque M n'est pas inversible, on a $0 \in \mathrm{Sp}(M)$. Par ailleurs, $1 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\dim E_1(M) = 2$. Puisque la somme des dimensions des espaces propres ne peut pas excéder la taille de la matrice, on a nécessairement $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1\}$ et $\dim E_0(M) = 1$. Il s'ensuit que $\dim E_0(M) + \dim E_1(M) = 3$ et donc :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$$

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

7. Soient λ, μ, γ des réels. Alors

$$\begin{aligned} au + bv + cw = 0 &\Rightarrow (\lambda + \mu + \gamma,\ \lambda + \gamma,\ \lambda + \mu) = (0,0,0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + \gamma &= 0 \\ \lambda + \gamma &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une famille libre composée de 3 vecteurs dans $\mathbf{R}^3$ qui est un espace de dimension 3, il s'ensuit que :

$$\boxed{\mathcal{B}' = (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$$

8. On a $u = e_1 + e_2 + e_3$ et donc, en utilisant la linéarité de f et en lisant en colonnes dans la matrice M les images des vecteurs de $\mathcal{B}$, il vient :

$$f(u) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = a(e_1 + e_2 + e_3) = au$$

et

$$f(v) = f(e_1) + f(e_3) = e_1 + e_3 = v.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(u) = au \quad \text{et} \quad f(v) = v.}$$

9. On a

$$f(w) = f(e_1) + f(e_2) = (a+1)e_1 + e_2 + ae_3$$

et donc

$$\boxed{f(w) = av + w.}$$

10. Par définition de la matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et du fait des deux questions précédentes, il vient :

$$T = \boxed{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.}$$

11. La matrice T étant triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(T) = \{1, a\}.}$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{rg}(T - I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

donc $\dim E_1(T) = 3 - 2 = 1$.
De même,

$$\mathrm{rg}(T - aI_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}\right) = 2$$

donc $\dim E_a(T) = 3 - 2 = 1$.
Ainsi, $\mathrm{Sp}(T) = \{1, a\}$ et $\dim E_1(T) + \dim E_a(T) = 2 < 3$ donc T n'est pas diagonalisable. Il s'ensuit que f n'est pas diagonalisable et donc :

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n.

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$, et que :

$$\forall x \geq 0, \quad f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

2. Étudier les variations de f_n.
3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
   En déduire que f_n est convexe sur $\mathbf{R}_+$.
4. (a) Démontrer que :

$$\forall t \geq 1, \quad t^{2n} - 1 \geq n(t^2-1).$$

   (b) Montrer alors que :

$$\forall x \geq 1, \quad f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2.$$

   (c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer que $f_n(1) < 0$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
   On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite.

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}.$$

7. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

8. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geq 0$.
   (c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
9. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.
   (b) A l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b de la partie A, montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$

   Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \quad G_n(x,y) = f_n(x) f_n(y).$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n), puis au point $(1,1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Solution :

Partie A : Étude de la fonction f_n.

1. La fonction $g_n : t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f_n est l'unique primitive de g_n sur $\mathbf{R}_+$ qui s'annule en 0. Puisque $f_n' = g_n$ est continue, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad f_n'(x) = g_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.}$$

2. Pour tout $x \geq 0$, $x+1>0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $x^{2n}-1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$		$\searrow$	$f_n(1)$	$\nearrow$	

3. On a $f_n' = g_n$ et g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$ comme quotient de polynômes, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi, f_n est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$ et donc en particulier de classe $\mathcal{C}^2$.
Pour tout $x \geq 0$, on a

$$f_n''(x) = g_n'(x) = \frac{(2n-1)x^{2n} + (2n+1)}{(x+1)^2} \geq \frac{x^{2n}+1}{x+1} > 0$$

donc f_n'' est strictement positive sur $\mathbf{R}_+$ et donc

$$\boxed{f_n \text{ est (strictement) convexe sur } \mathbf{R}_+.}$$

4. (a) La fonction $d_n : t \mapsto t^{2n} - 1 - n(t^2-1)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $t \geq 1$, on a :

$$d_n'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt(t^{2n-2}-1) \geq 0.$$

Ainsi, d_n est croissante sur $[1,+\infty[$ et $d_n(1) = 0$ donc

$$\forall t \geq 1, \quad d_n(t) \geq d_n(1) = 0$$

et donc

$$\boxed{\forall t \geq 1, \quad t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).}$$

(b) Soit $x \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\ dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\ dt + \int_1^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\ dt \\
&\geq f_n(1) + \int_1^x n\frac{t^2 - 1}{t+1}\ dt \quad \text{(d'après 4.a)} \\
&= f_n(1) + n\int_1^x t - 1\ dt \\
&= f_n(1) + n\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^x \\
&= f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \geq 1, \quad f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2.}$$

(c) On a $f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc il suit de la minoration établie à la question précédente que :

$$\boxed{f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.}$$

5. Puisque f_n est la primitive de g_n qui s'annule en 0, on a $f_n(0) = 0$. Par ailleurs, f_n étant strictement décroissante sur $[0, 1]$, on a $f_n(1) < f_n(0) = 0$ et donc

$$\boxed{f_n(1) < 0.}$$

6. f_n est strictement négative sur $]0, 1]$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0, 1]$.
Sur $]1, +\infty[$, la fonction f_n est continue et strictement croissante. En outre, il suit des questions précédentes que $\lim\limits_{x\to1^+} f_n(x) = f_n(1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ de sorte que f_n induit une bijection croissante de $]1, +\infty[$ vers $]f_n(1), +\infty[$. Puisque $0 \in]f_n(1), +\infty[$, il existe un unique réel $x_n \in]1, +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } x_n > 0 \text{ tel que } f_n(x_n) = 0, \text{ et } x_n > 1.}$$

Partie B : Étude d'une suite implicite.

7. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Alors :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{1}{t+1}(t^{2n+2} - t^{2n})\ dt \\
&= \int_0^x t^{2n}\frac{t^2 - 1}{t+1}\ dt \\
&= \int_0^x t^{2n}(t-1)\ dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^x t^{2n+1} - t^{2n}\ dt$$
$$= \left[\frac{t^{2n+2}}{2n+2} - \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x$$
$$= x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}$, alors x est positif et, d'après la question précédente, $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ est du signe de $\left(\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$. Mais $x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}$ donc $\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+1} = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \geq \frac{2n+2}{2n+1}, \quad f_{n+1}(x) \geq f_n(x).}$$

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque $x_n \geq \dfrac{2n+2}{2n+1}$, on a a $f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{f_{n+1}(x_n) \geq 0.}$$

   (c) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. D'après la question précédente, on a a $f_{n+1}(x_n) \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, sa bijection réciproque aussi et et donc

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1}) \quad \Rightarrow \quad x_n \geq x_{n+1}$$

   et donc :

$$\boxed{(x_n) \text{ est décroissante.}}$$

   Par ailleurs, par construction, la suite (x_n) est minorée par 1 et donc

$$\boxed{(x_n) \text{ converge vers une limite } \ell \geq 1.}$$

9. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a, pour tout $t \in [0, 1]$, $-1 \leq t^{2n} - 1 \leq 0$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$-\int_0^1 \frac{1}{t+1}\ dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\ dt \leq 0$$

   et, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\ dt = [\ln(t+1)]_0^1$, il vient :

$$\boxed{-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0.}$$

   (b) D'après la question 4.b de la partie A, puisque $x_n \geq 1$, on a :

$$0 = f_n(x_n) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$$

donc
$$\frac{n}{2}(x_n-1)^2 \leq f_n(1) \leq \ln(2),$$
et donc
$$(x_n-1)^2 \leq \frac{2\ln 2}{n}.$$
Puisque $x_n - 1 \geq 0$, il vient :
$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln 2}{n}}}$$
En faisant tendre n vers l'infini, le théorème d'encadrement montre que $x_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1.}$$

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On note $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ qui est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ comme produit d'intervalles ouverts.

10. Les fonctions $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ et $\pi_2 : (x,y) \mapsto y$ sont $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiales. Par composition, les fonctions $f_n \circ \pi_1 : (x,y) \mapsto f_n(x)$ et $f_n \circ \pi_2 : (x,y) \mapsto f_n(y)$ sont $\mathcal{C}^2$ sur U et donc, par produit,
$$\boxed{G_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U.}$$
Soit $(x,y) \in U$. Alors :
$$\boxed{\partial_1(G_n)(x,y) = f_n'(x)f_n(y) \quad \text{et} \quad \partial_2(G_n)(x,y) = f_n(x)f_n'(y).}$$

11. Soit $(x,y) \in U$. Alors
$$\begin{aligned}
\nabla(G_n)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_n'(x)f_n(y) & = 0 \\ f_n(x)f_n'(y) & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_n'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f_n(y) = 0 \\ f_n(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f_n'(y) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \quad \text{ou} \quad y = x_n \\ x = x_n \quad \text{ou} \quad y = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) \in \{(1,1),(x_n,x_n)\}.
\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\boxed{G_n \text{ admet exactement deux points critiques sur } U \text{ qui sont } (1,1) \text{ et } (x_n,x_n).}$$

12. Soit $(x,y) \in U$. Alors :
$$\nabla^2(G_n)(x,y) = \begin{bmatrix} f_n''(x)f_n(y) & f_n'(x)f_n'(y) \\ f_n'(x)f_n'(y) & f_n(x)f_n''(y) \end{bmatrix}$$
Ainsi,
$$\boxed{\nabla^2(G_n)(1,1) = \begin{bmatrix} f_n''(1)f_n(1) & 0 \\ 0 & f_n(1)f_n''(1) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2(G_n)(x_n,x_n) = \begin{bmatrix} 0 & f_n'(x_n)^2 \\ f_n'(x_n)^2 & 0 \end{bmatrix}}$$

13. Si on pose $H = \nabla^2 (G_n)(x_n, x_n)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors λ est une valeur propre de H si et seulement si $H - \lambda I_2$ n'est pas inversible, ce qui est le cas si et seulement si $\lambda^2 - f_n'(x)^4 = 0$. Ainsi, H admet pour valeurs propres $f_n'(x_n)^2 > 0$ et $-f_n'(x_n)^2 < 0$ de sorte que :

$$\boxed{G_n \text{ présente un point col en } (x_n, x_n).}$$

14. Si on pose $K = \nabla^2 (G_n)(1, 1)$, alors K est diagonale donc admet $\lambda = f_n(1) f_n''(1)$ pour valeur propre double. Puisque $f_n(1) < 0$ (question A.5) et $f_n''(1) > 0$ (question A.3), $\lambda < 0$ et donc :

$$\boxed{G_n \text{ présente un maximum local en } (1, 1).}$$

□

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt.$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité.
   Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   (b) Donner la fonction de répartition de X.

   (c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

   (d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$.

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   (b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que X et Y suivent la même loi.

   (c) Écrire une fonction en langage Scilab d'en-tête : `function Y=simulX(a,m,n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de manière indépendante.
   A cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m,n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0,1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendante.

4. (a) Calculer $\mathbf{P}([X > 2a])$.

   (b) Calculer $\mathbf{P}_{[X>2a]}([X > 6a])$.

   (c) On suppose que la fonction Scilab de la question 3 a été programmée correctement et compilée.
   Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente :

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k = 1:N
    if -------- then
        s1 = s1+1
        if X(k)>6*a then
            --------
        end
    end
end
if s1>0 then
    disp(--------)
end
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose $V_n = \dfrac{2}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a.
   (b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n}$.
6. On pose $W_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.
   (b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}$$

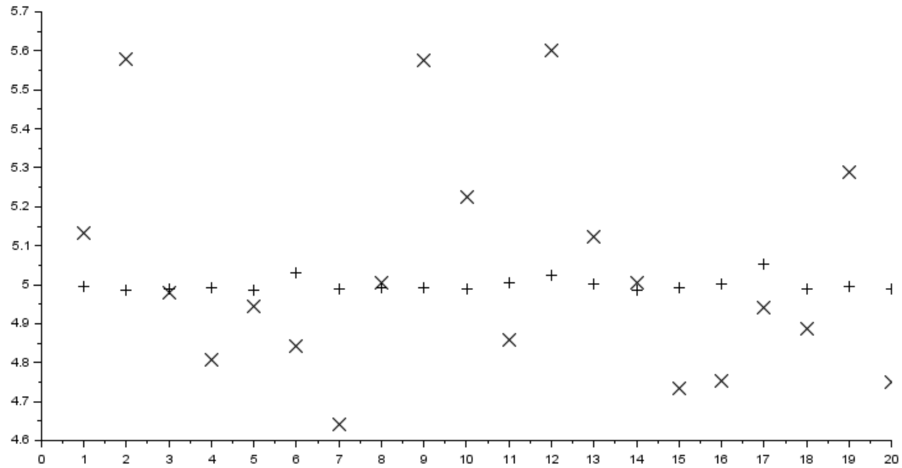
   (c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
   Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a.
   (d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n(3n-2)}$.
7. On rappelle que :
   — Si `A` est une matrice Scilab, l'instruction : `A(i,:)` renvoie la i-ième ligne de la matrice `A`.
   — Si `A` est une matrice Scilab (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice `A`.
   — Si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-1)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix droites.
   — Si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-2)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix obliques.
   (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments.

```
function V = simulV(a,m,n)
    X = simulX(a,m,n)
    V = zeros(1,m)
    for k = --------
        V(k) = --------
    end
endfunction
```

   Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.
   (b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
W = simulW(--------)
V = simulV(--------)
plot2d(----,style=-1)
plot2d(----,style=-2)
```

   On justifiera la réponse pour les deux dernières lignes.



Solution :

1. $I_n(a)$ est une intégrale de Riemann convergente sur $[a, +\infty[$. En outre,

$$I_n(a) = \lim_{B \to +\infty} \int_a^B \frac{1}{t^n}\ dt = \lim_{B \to +\infty} \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} \right]_a^B = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n(a) \text{ converge et vaut } \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}.}$$

2. (a) Puisque $a > 0$, f est positive sur $\mathbf{R}$ et continue sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$. En outre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^4}\ dt = 3a^3 I_4(a) = \frac{3a^3}{3a^3} = 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

(b) Notons F_X la fonction de répartition de X. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^t f(x)\ dx$. Si $t < a$, alors pour tout $x \in]-\infty, t]$, on a $f(x) = 0$ et donc $F_X(t) = 0$.
Supposons $t \geq a$. Alors :

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^t f(x)\ dx \\ &= \int_a^t \frac{3a^3}{x^4}\ dx \\ &= \left[-\frac{a^3}{x^3} \right]_a^t \\ &= 1 - \left(\frac{a}{t} \right)^3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 - \left(\dfrac{a}{t}\right)^3 & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}}$$

(c) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\ dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}\ dt = 3a^3 I_3(a) \text{ qui converge.}$$

donc X admet une espérance et

$$\boxed{\mathbf{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ dt = 3a^3 I_3(a) = \frac{3}{2}a.}$$

(d) On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\ dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt = 3a^3 I_2(a)$$

donc, d'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance et

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\ dt = 3a^3 I_2(a) = 3a^2.$$

Par ailleurs, puisque X admet un moment d'ordre 2, X admet une variance et, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\boxed{\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}\left[X\right]^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}.}$$

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$.

(a) La fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{a}{u^{1/3}}$ induit une bijection de $]0,1]$ vers $[a, +\infty[$. Ainsi, puisque $U(\Omega) =]0,1]$ et $Y = \varphi(U)$, il s'ensuit que

$$\boxed{Y(\Omega) = [a, +\infty[.}$$

(b) Soit F_Y la fonction de répartition de Y. Puisque $Y(\Omega) = [a, +\infty[$, pour tout réel $t < a$, on a $F_Y(t) = 0$. Par ailleurs, si $t \geq a$, on a

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}\left(Y \leq t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{a}{U^{1/3}} \leq t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U^{1/3} \geq \frac{a}{t}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U \geq \left(\frac{a}{t}\right)^3\right) \\ &= 1 - F_U\left(\left(\frac{a}{t}\right)^3\right), \end{aligned}$$

où F_U désigne la fonction de répartition de U. Mais puisque $t \geq a > 0$, $\left(\dfrac{a}{t}\right)^3 \in]0,1]$ et donc $F_U\left(\left(\dfrac{a}{t}\right)^3\right) = \left(\dfrac{a}{t}\right)^3$. Ainsi, $F_Y(t) = 1 - \left(\dfrac{a}{t}\right)^3 = F_X(t)$. Ainsi, $F_Y = F_X$ et, la fonction de répartition caractérisant la loi, il vient :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$$

(c) En s'appuyant sur la question précédente, on propose la fonction suivante :

```
function Y = simulX(a,m,n)
    U = rand(m,n)
    Y = a*1./(U.^(1/3))
endfunction
```

4. (a) On a :

$$\boxed{\mathbf{P}([X > 2a]) = 1 - F_X(2a) = 1 - \left(1 - \frac{a^3}{(2a)^3}\right) = \frac{1}{8}}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{[X>2a]}([X > 6a]) &= \frac{\mathbf{P}([X > 2a] \cap [X > 6a])}{\mathbf{P}(X > 2a)} \\
&= \frac{\mathbf{P}([X > 6a])}{\mathbf{P}(X > 2a)} \\
&= \frac{a^3/(6a)^3}{1/8} \\
&= 8 \times \frac{1}{6^3} \\
&= \frac{1}{27}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}_{[X>2a]}([X > 6a]) = \frac{1}{27}.}$$

(c) On propose le script suivant :

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k = 1:N
    if X(k)>2*a then
        s1 = s1+1
        if X(k)>6*a then
            s2 = s2+1
        end
    end
end
if s1>0 then
    disp(s2/s1)
end
```

Remarque : Une exécution du script ci-dessus a donné comme résultat $0,0371608$ alors que $\frac{1}{27} \approx 0,037037$, ce qui est bien cohérent avec notre résultat théorique.

5. (a) $V_n = \dfrac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ est une statistique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$. En outre, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[V_n] = \frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}[X_k] \underset{(2.c.)}{=} \frac{2}{3n} \times n\frac{3a}{2} = a.$$

Ainsi,

$$\boxed{V_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$$

(b) Puisque V_n est sans biais

$$\begin{aligned} r_a(V_n) &= \mathbf{V}(V_n) \\ &= \mathbf{V}\left(\frac{2}{3n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \\ &= \frac{4}{9n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(X_k) \quad \text{(par indépendance)} \\ &\underset{(2.d.)}{=} \frac{4}{9n^2} \times n\frac{3a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{3n}. \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{r_a(V_n) = \frac{a^2}{3n}.}$$

6. On pose $W_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) On a $W_n(\Omega) = [a, +\infty[$ donc, si on appelle F_{W_n} la fonction de répartition de W_n, pour tout réel $t < a$, on a $F_{W_n}(t) = 0$. Soit $t \geq a$. Alors

$$\begin{aligned} F_{W_n}(t) &= \mathbf{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(X_1 > t, \ldots, X_n > t) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X_k > t) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= 1 - (1 - F_X(t))^n \\ &= 1 - \left(1 - \left(1 - \left(\frac{a}{t}\right)^3\right)\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{a}{t}\right)^{3n}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad F_{W_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 - \left(\dfrac{a}{t}\right)^{3n} & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}}$$

La fonction de répartition F_{W_n} est clairement de classe $\mathcal{C}^1$, et donc continue, sur $\mathbf{R} \setminus \{a\}$. En outre, elle est continue à droite sur $\mathbf{R}$ comme fonction de répartition et, $\lim\limits_{t \to a^-} F_{W_n}(t) = 0 = F_{W_n}(a)$ de sorte que F_{W_n} est continue sur $\mathbf{R}$. Ainsi,

$$\boxed{F_{W_n} \text{ est une fonction de répartition de variable aléatoire à densité.}}$$

(b) Une densité de W_n doit être égale à $F'_{W_n}(t)$ en tout point $t \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$. Mais, si $t < a$, on a $F_{W_n}(t) = 0$ donc $F'_{W_n}(t) = 0$. Et si $t > a$,

$$F'_{W_n}(t) = -3n\left(\frac{-a}{t^2}\right)\left(\frac{a}{t}\right)^{3n-1} = \frac{3na^{3n}}{t^{3n+1}}.$$

Ainsi, une densité f_n de W_n est définie par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}}$$

(c) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_n(t)\ dt = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n}}\ dt = 3na^3 I_{3n}(a) \text{ qui converge}$$

donc W_n admet une espérance et

$$\boxed{\mathbf{E}[W_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\ dt = 3na^3 I_{3n}(a) = \frac{3n}{3n-1}a.}$$

Ainsi, si on pose $\lambda_n = \dfrac{3n-1}{3n}$, alors $\lambda_n W_n$ est bien une statistique de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ et $\mathbf{E}[\lambda_n W_n] = a$ de sorte que

$$\boxed{\frac{3n-1}{3n} W_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$$

(d) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\ dt = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n-1}}\ dt = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) \text{ qui converge}$$

donc W_n^2 admet une espérance et

$$\mathbf{E}\left[W_n^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\ dt = 3na^{3n} I_{3n-1}(a) = \frac{3n}{3n-2}a^2.$$

Alors

$$\mathbf{V}(W_n) = \mathbf{E}\left[W_n^2\right] - \mathbf{E}[W_n]^2 = 3na^2\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{3n}{(3n-1)^2}\right)$$

et donc

$$\mathbf{V}(\lambda_n W_n) = \lambda_n^2 \mathbf{V}(W_n) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right) 3na^2 \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{3n}{(3n-1)^2}\right),$$

ce qui, après simplification, donne

$$\boxed{\mathbf{V}(\lambda_n W_n) = \frac{a^2}{3n(3n-2)}.}$$

7. (a) On propose le script ci-dessous :

```
function V = simulV(a,m,n)
    X = simulX(a,m,n)
    V = zeros(1,m)
    for k=1:m
        V(k)=2/(3*n)*sum(X(k,:))
    end
endfunction
```

(b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
V = simulV(5,20,100)
W = simulW(5,20,100)
plot2d(W,style=-1)
plot2d(V,style=-2)
```

Pour justifier les deux dernières lignes, on observe que les croix droites fluctuent beaucoup moins autour de $a = 5$ que les croix obliques. Ceci traduit le fait que, pour $n = 100$, le risque quadratique $r_a(W_n) = \dfrac{a^2}{3n(3n-2)} \approx 0,0002796$ est nettement inférieur au risque $r_a(V_n) = \dfrac{a^2}{3n} \approx 0,0833333$.

Remarque : Pour la simulation de V_n et l'obtention du graphique donné dans l'énoncé, nous avons utilisé le script suivant :

```
function W = simulW(a,m,n)
    X = simulX(a,m,n)
    W = zeros(1,m)
    for k=1:m
        W(k) = (3*n-1)/(3*n)*min(X(k,:))
    end
endfunction
```

$\square$