ECRiCOME 2020 - VOIE E

Exercice 1

Dans cet exercice, on désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3, et on note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

Soit a un réel ; on pose $M = \begin{bmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$.

Partie A : Étude du cas où $a = 1$.

Dans toute cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. Expliciter la matrice M, puis calculer $(M - I_3)^2$.
2. En déduire l'unique valeur propre possible de M.
3. La matrice M est-elle inversible ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

Dans cette partie, on suppose que $a = 0$.

4. Démontrer que 1 est valeur propre de M, et donner une base et la dimension du sous-espace propre associé.
5. Démontrer que M n'est pas inversible.
6. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

Dans cette partie, on suppose que a est différent de 0 et de 1.
On pose $E = \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
Soit $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

7. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de E.
8. Calculer $f(u)$, $f(v)$.
9. Calculer $f(w)$ et trouver deux réels α et β tels que $f(w) = \alpha v + \beta w$.
10. Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$, que l'on notera T.
11. En déduire l'ensemble des valeurs propres de M, et la dimension des sous-espaces propres associés.
    La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1}\, dt.$$

Partie A : Étude de la fonction f_n.

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$, et que :
$$\forall x \geq 0, \quad f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$
2. Étudier les variations de f_n.
3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur $\mathbf{R}_+$.
4. (a) Démontrer que :
$$\forall t \geq 1, \quad t^{2n}-1 \geq n(t^2-1).$$
(b) Montrer alors que :
$$\forall x \geq 1, \quad f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2.$$
(c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer que $f_n(1) < 0$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite.

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n), où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.
On admettra que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}.$$

7. Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$
8. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \geq \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.
(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geq 0$.
(c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
9. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.
(b) A l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b de la partie A, montrer alors que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$
Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.
L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ par :
$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*, \quad G_n(x,y) = f_n(x)f_n(y).$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n), puis au point $(1,1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

Exercice 3

Soit a un réel strictement positif.

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}\, dt.$$

Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \dfrac{3a^3}{t^4} & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}$$

(a) Démontrer que f est bien une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

(b) Donner la fonction de répartition de X.

(c) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.

(d) Démontrer que X admet une variance et que celle-ci vaut $\dfrac{3a^2}{4}$.

3. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$. On pose : $Y = \dfrac{a}{U^{1/3}}$.

(a) Déterminer $Y(\Omega)$.

(b) Déterminer la fonction de répartition de Y et vérifier que X et Y suivent la même loi.

(c) Écrire une fonction en langage Scilab d'en-tête : `function Y=simulX(a,m,n)` prenant en argument un réel a strictement positif et deux entiers naturels m et n non nuls, qui renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient est un réel choisi de façon aléatoire en suivant la loi de X. Ces réels seront choisis de manière indépendante.
A cet effet, on rappelle que si m et n sont des entiers naturels non nuls, l'instruction : `rand(m,n)` renvoie une matrice à m lignes et n colonnes dont chaque coefficient suit la loi uniforme sur $]0,1]$, ces coefficients étant choisis de façon indépendante.

4. (a) Calculer $\mathbf{P}([X > 2a])$.

(b) Calculer $\mathbf{P}_{[X>2a]}([X > 6a])$.

(c) On suppose que la fonction Scilab de la question 3 a été programmée correctement et compilée.
Compléter le script ci-dessous afin qu'il renvoie une valeur permettant de vérifier le résultat de la question précédente :

```
a = 10
N = 100000
s1 = 0
s2 = 0
X = simulX(a,1,N)
for k = 1:N
    if -------- then
        s1 = s1+1
        if X(k)>6*a then
            --------
        end
    end
end
if s1>0 then
    disp(--------)
end
```

On cherche dans la suite de l'exercice à estimer le paramètre a.
Soit n un entier naturel non nul, et $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

5. On pose $V_n = \dfrac{2}{3n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (a) Montrer que V_n est un estimateur sans biais pour le paramètre a.

   (b) Calculer son risque quadratique et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n}$.

6. On pose $W_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

   (a) Déterminer la fonction de répartition de W_n et vérifier que W_n est bien une variable aléatoire à densité.

   (b) Montrer que W_n admet pour densité la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}$$

   (c) Démontrer que W_n admet une espérance et calculer cette espérance.
   Déterminer alors l'unique réel λ_n dépendant de n tel que $\lambda_n W_n$ est un estimateur sans biais pour le paramètre a.

   (d) Calculer le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ et vérifier que celui-ci vaut $\dfrac{a^2}{3n(3n-2)}$.

7. On rappelle que :

   — Si `A` est une matrice Scilab, l'instruction : `A(i,:)` renvoie la i-ième ligne de la matrice `A`.

   — Si `A` est une matrice Scilab (éventuellement une matrice ligne), l'instruction : `sum(A)` renvoie la somme des coefficients de la matrice `A`.

   — Si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-1)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix droites.

   — Si `X` est une matrice ligne, l'instruction : `plot2d(X,style=-2)` représente graphiquement les coefficients de `X` à l'aide de croix obliques.

   (a) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle réalise m simulations de la variable aléatoire V_n et renvoie les résultats obtenus sous forme d'une matrice ligne à m éléments.

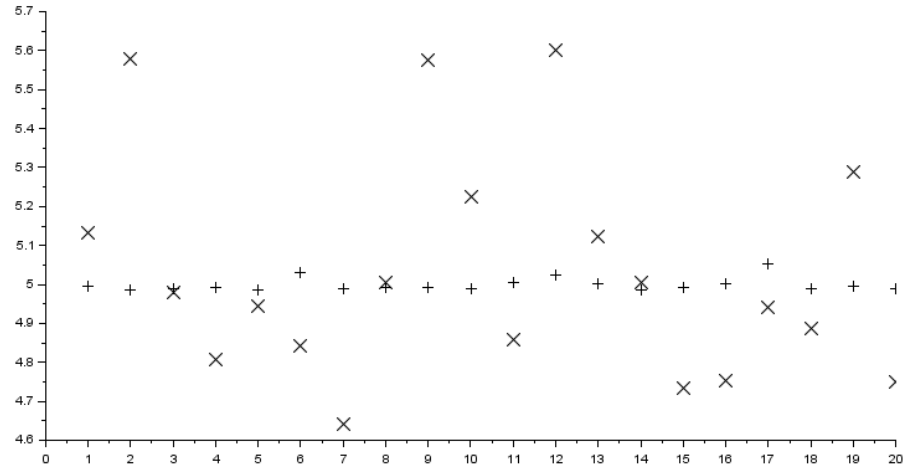
```
function V = simulV(a,m,n)
    X = simulX(a,m,n)
    V = zeros(1,m)
    for k = --------
        V(k) = --------
    end
endfunction
```

   Pour la suite, on prend $n = 100$ et on suppose que l'on dispose d'une fonction similaire `simulW` permettant d'obtenir m simulations de la variable aléatoire $\lambda_n W_n$.

   (b) Compléter les lignes ci-dessous pour écrire le script qui a permis d'obtenir le graphique présenté :

```
W = simulW(--------)
V = simulV(--------)
plot2d(----,style=-1)
plot2d(----,style=-2)
```

   On justifiera la réponse pour les deux dernières lignes.


5.7
5.6
5.5
5.4
5.3
5.2
5.1
5
4.9
4.8
4.7
4.6
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20