EM Lyon 2020 - voie E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{x(1-x)(\ln(x))^2}\left(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\right).$$

2. (a) Justifier : $\forall t \in]0,1[, \quad t\ln(t) < 0$.
   (b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$.
3. (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

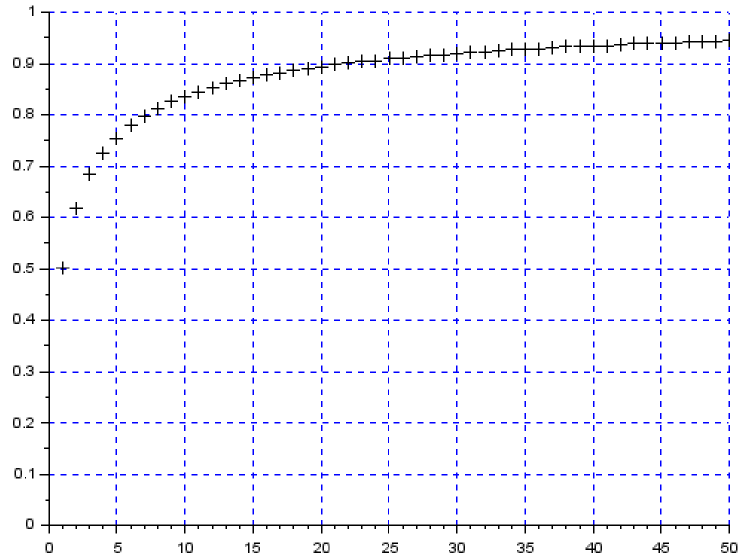
Partie B : Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on note u_n.
7. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.
8. Déterminer u_1 et u_2.
9. (a) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while ...
        c = (a+b)/2
        if (c^n+c-1)>0 then
            ...
        else
            ...
        end
    end
    u = ...
endfunction
```

   (b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
   Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



10. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $f(u_n) = n$.
    (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.
    (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad F(x,y) = x^2y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x.$$

11. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x,y) de $]0,+\infty[^2$.
    (b) Montrer que la fonction F admet (u_3, u_3^2) comme unique point critique, où le réel u_3 est l'unique solution sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation (E_3) définie dans la partie B.
12. (a) Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point (u_3, u_3^2).
    (b) Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant :

    $$\lambda_1\lambda_2 = -6u_3^2 - 2.$$

    (c) La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0,+\infty[^2$?

Solution :

Partie A : Étude de la fonction f

1. La fonction ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto 1-x$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ à valeurs dans ce même intervalle. Par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et donc, par quotient, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$, et donc en particulier dérivable.
   En outre, pour tout $x \in]0,1[$, on a :

   $$f'(x) = \frac{1}{\ln(x)^2}\left[-\frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}\right]$$

   et donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\ln(x)^2}(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)).}$$

2. (a) Soit $t \in]0,1[$, alors $t > 0$ et $\ln(t) < 0$ donc, par produit :

$$\boxed{\forall t \in]0,1[, \quad t\ln(t) < 0.}$$

   (b) Pour tout $x \in]0,1[$, on a $\dfrac{1}{x(1-x)\ln(x)^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-(x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x))$. Or, puisque pour tout $x \in]0,1[$, on a $1-x \in]0,1[$, il suit de la question précédente que $x\ln(x) < 0$ et $(1-x)\ln(1-x) < 0$ de sorte que $f'(x) > 0$.
   Ainsi,

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,1[.}$$

3. (a) On a $\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln(1) = 0$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ donc, par quotient de limites usuelles, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0}$$

   et en posant $f(0) = 0$, on prolonge f par continuité à l'intervalle $[0,1[$.

   (b) Soit $x > 0$. On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{x\ln(x)}.$$

   Mais $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+.$$

   En conséquence :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0.}$$

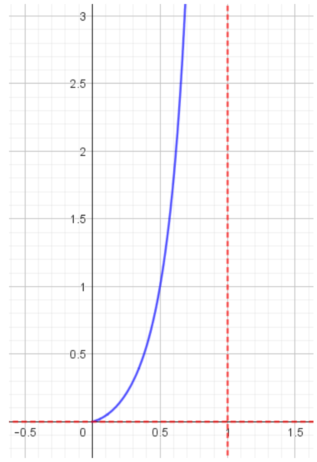
4. On a $\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0^-$ donc, par quotient de limites usuelles, il vient

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.}$$

   Géométriquement, cela signifie que :

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 1.}$$

5. On obtient la représentation graphique suivante :



Partie B : Étude d'une suite

6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$. Alors f_n est une fonction polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et en particulier dérivable sur $\mathbf{R}_+$. Par ailleurs, pour tout $x \geq 0$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$ de sorte que f_n est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.
   En outre, $f_n(0) = -1$ et $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc, il suit du théorème de la bijection continue que f_n induit une bijection de $\mathbf{R}_+$ vers $]-1,+\infty[$. Puisque $0 \in]-1,+\infty[$,

   $$\boxed{\text{il existe un unique réel } u_n \in \mathbf{R}_+ \text{ tel que } f_n(u_n) = 0.}$$

7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $f_n(0) = -1 < 0$ donc $u_n > 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$. Puisque f_n est continue, il suit du théorème des valeurs intermédiaires que f_n s'annule sur $]0,1[$. Puisque u_n est l'unique solution positive de l'équation $f_n(x) = 0$, il s'ensuit que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n \in]0,1[.}$$

8. L'équation (E_1) étant $2x - 1 = 0$, son unique solution est $u_1 = \dfrac{1}{2}$.
   L'équation (E_2) étant $x^2 + x - 1 = 0$, elle admet deux solutions réelles que sont $r_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   Puisque seule la seconde est positive, il vient $u_2 = r_2$.
   En conclusion :

   $$\boxed{u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$$

9. (a) On propose le programme suivant :

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while (b-a)>10^(-3)
        c = (a+b)/2
        if (c^n+c-1)>0 then
            b = c
        else
            a = c
        end
    end
    u = c
endfunction
```

(b) Le graphique nous amène à conjecturer que :

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers 1 en croissant.}}$$

Remarque : Le graphique proposé dans l'énoncé a été obtenu avec le script Scilab suivant :

```
X = 1:50
Y = zeros(1,50)
for i =1:50
    Y(i) = valeur_approchee(i)
end
plot2d(X,Y,style=-1,rect=[0,0,50,1])
xgrid(2)
```

10. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Raisonnons par équivalences. On a :

$$\begin{aligned} f(u_n) = n \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} = n \\ & \Leftrightarrow \quad \ln(1-u_n) = n\ln(u_n) \\ & \Leftrightarrow \quad 1-u_n = u_n^n \quad \text{(en passant à l'exponentielle)} \\ & \Leftrightarrow \quad u_n^n + u_n - 1 = 0. \end{aligned}$$

La dernière assertion étant vraie par définition de u_n, la première l'est aussi. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f(u_n) = n.}$$

(b) Puisque f est une bijection croissante de $[0,1[$ vers $[0,+\infty[$, sa réciproque f^{-1} est aussi croissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il suit de la question précédente que l'on a $u_n = f^{-1}(n)$ et donc

$$n \leq n+1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+1) \quad \Leftrightarrow \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

En conséquence :

$$\boxed{(u_n) \text{ est une suite croissante.}}$$

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante d'après 10.b et à valeurs dans $]0,1[$ d'après 7. Il suit alors du théorème de convergence monotone que (u_n) converge vers une limite $\ell \in [0,1]$. Supposons que $\ell < 1$. Puisque f est continue sur $[0,1[$, il s'ensuit que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ mais $f(u_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, une contradiction. Ainsi, on a nécessairement $\ell = 1$ et donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

Remarque : On a ainsi démontré ce qui avait été conjecturé à la question 9.b.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

On pose $U =]0,+\infty[^2$ dont l'énoncé nous dit que c'est un ouvert, ce qui est effectivement le cas puisqu'il s'agit d'un produit d'intervalles ouverts. Par ailleurs, F est effectivement de classe $\mathcal{C}^2$ sur U puisqu'il s'agit d'une fonction polynomiale.

11. (a) Pour tout $(x,y) \in U$, un simple calcul donne :

$$\boxed{\partial_1(F)(x,y) = 2xy + 2x - 2 \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(x,y) = x^2 - y.}$$

(b) Soit $(x,y) \in U$. On a

$$\begin{aligned}
\nabla(F)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2xy + 2x - 2 &= 0 \\ x^2 - y &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x^3 + 2x - 2 &= 0 \\ y &= x^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^3 + x - 1 &= 0 \\ y &= x^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= u_3 \\ y &= u_3^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{F \text{ admet } (u_3, u_3^2) \text{ pour unique point critique.}}$$

12. (a) Pour tout $(x,y) \in U$, on a

$$\nabla^2(F)(x,y) = \begin{bmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$$

donc

$$\boxed{\nabla^2(F)\left(u_3, u_3^2\right) = \begin{bmatrix} 2u_3^2+2 & 2u_3 \\ 2u_3 & -1 \end{bmatrix} = H.}$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathrm{Sp}(H) \quad &\Leftrightarrow \quad H - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad (2u_3^2 + 2 - \lambda)(-1-\lambda) - 4u_3^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + (-2u_3^2 - 1)\lambda - 6u_3^2 - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de H sont les racines du polynôme $X^2 + (-2u_3^2 - 1)X - 6u_3^2 - 2$. Or on sait que, pour un polynôme unitaire de degré 2, le produit des racines est égal au terme constant du polynôme. Ainsi, si on note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de H, il vient :

$$\boxed{\lambda_1\lambda_2 = -6u_3^2 - 2.}$$

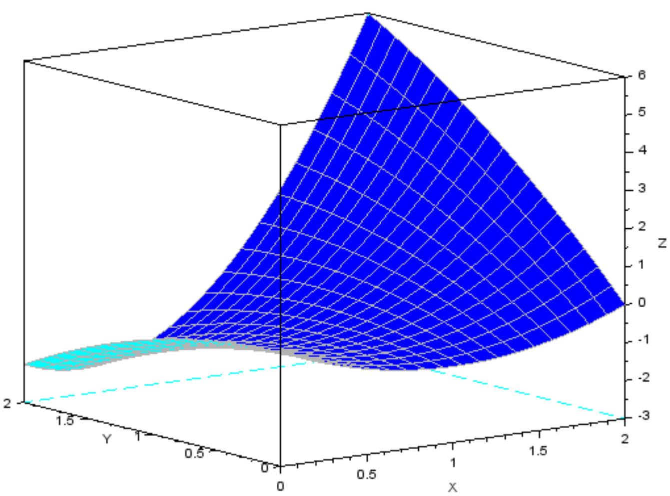
(c) Puisque $u_3 \in]0,1[$, on a $-6u_3^2 - 2 < 0$ et donc les valeurs propres de H sont non nulles et de signes opposés. Il s'ensuit que F présente un point col en (u_3, u_3^2). Puisque U est ouvert et que (u_3, u_3^2) est l'unique point critique de F sur U d'après la question 11.b, il s'ensuit que F ne peut présenter un extremum local en un autre point de U. Ainsi :

$$\boxed{F \text{ ne présente pas d'extremums locaux sur } U.}$$

Remarque : Avec le script Scilab suivant, nous avons obtenu la figure ci-dessous sur laquelle on observe effectivement la présence d'un point col et l'absence d'extremums locaux.

```
function z=F(x,y)
    z = x^2*y+x^2-y^2/2-2*x
endfunction

x = linspace(0,2,20)
y = x
fplot3d(x,y,F)
```



□

Exercice 2

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{bmatrix},$$

et on note : $E = \{M(a,b)\ ;(a,b) \in \mathbf{R}^2\}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$.
   Déterminer une base de E et sa dimension.

   (b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
   Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.** Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

   (a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

   (b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

   (c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ diagonale telle que : $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.** Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

   (a) Déterminer le rang des matrices B et $B - bI_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

   (b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.

   (c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.** Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est $M(a,b)$.

   On pose : $v_1 = (1,1,1,0)$, $\quad v_2 = (0,0,0,1)$ $\quad$ et $\quad T = \begin{bmatrix} a & a \\ 3b & b \end{bmatrix}$.

   (a) Montrer que $\ker(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\ker(f)$.

   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.

   (c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

   (d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$.

   Montrer : X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ

   $$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à la valeur propre } \lambda \\ \quad \text{et} \\ z = t = 0. \end{array} \right.$$

   (e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,1)$.
   Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1,1)$ est diagonalisable.

   (f) On suppose dans cette question uniquement que $(a,b) = (1,-1)$.
   Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1,-1)$ est-elle diagonalisable ?

   (g) Montrer l'équivalence :

   $$M(a,b) \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 10ab + b^2 > 0.$$

Solution :

1. (a) On pose

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, on a $M(a, b) = aA_1 + bB_1$ de sorte que

$$E = \mathrm{Vect}(A_1, B_1).$$

Les matrices A_1 et B_1 étant non colinéaires, elles forment une famille libre dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$. Ainsi,

$$\boxed{(A_1, B_1) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim E = 2.}$$

(b) On a $A_1 \in E$ et $B_1 \in E$ mais

$$A_1B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin E.$$

Ainsi,

$$\boxed{E \text{ n'est pas stable par produit.}}$$

2. **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**

$$\boxed{\text{La matrice } M(0,0) \text{ est la matrice nulle qui est diagonale donc diagonalisable.}}$$

3. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.** Soit a un réel non nul. On a :

$$A = M(a, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = aA_1.$$

(a) On commence par observer que $A_1^2 = A_1$ donc $A^2 = (aA_1)^2 = a^2A_1 = aA$. Alors $A^2 - aA = 0$ de sorte que

$$\boxed{X^2 - aX \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

(b) Les racines du polynôme $X^2 - aX$ sont 0 et a donc les seules valeurs propres possibles pour A sont 0 et a.

En outre, pour $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$, on a :

$$\begin{aligned} AX = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad ax + at = 0 \\ & \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad t = -x \\ & \Leftrightarrow \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$0 \in \mathrm{Sp}(A) \quad \text{et} \quad E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

On vérifie en outre aisément que la famille $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ est libre donc il s'agit d'une base de $E_0(A)$.

De même en résolvant le système associé à $AX = aX$, on obtient $a \in \mathrm{Sp}(A)$ et une base de $E_a(A)$ est $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, a\}}$$

et

$$\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_a(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

(c) D'après la question précédente, on a $\dim E_0(A) = 3$ et $\dim E_a(A) = 1$ donc la somme des dimensions des espaces propres de A est égale à la taille de A. Il s'ensuit que A est diagonalisable. Si on pose

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres et

$$\boxed{D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix},}$$

on a la relation $A = PDP^{-1}$.

4. **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.** Soit b un réel non nul. On pose :

$$B = M(0, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & b & b & b \end{bmatrix} = bB_1.$$

(a) En échelonnant les matrices, il vient :

$$\operatorname{rg}(B) \underset{L_4 \leftrightarrow L_1}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} b & b & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

et

$$\operatorname{rg}(B - bI_4) = \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1 + L_2 + L_3}{=} \operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3.$$

En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{rg}(B) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(B - bI_4) = 3.}$$

(b) D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \ker(B) = 4 - \operatorname{rg}(B) = 3 \quad \text{et} \quad \dim \ker(B - bI_4) = 4 - 3 = 1$$

donc 0 et b sont des valeurs propres de B et, puisque $\dim E_0(B) + \dim E_b(B) = 4$, ce sont les seules. En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Sp}(B) = \{0, b\}, \quad \dim E_0(B) = 3 \quad \text{et} \quad \dim E_b(B) = 1.}$$

(c) Il suit de la question précédente que la somme des dimensions des espaces propres de B est égale à la taille de la matrice B. Ainsi :

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$$

5. **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.** Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est $M(a, b)$.

On pose : $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $\quad v_2 = (0, 0, 0, 1)$ $\quad$ et $\quad T = \begin{bmatrix} a & a \\ 3b & b \end{bmatrix}$.

(a) Si on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ que l'on se donne $x = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i \in \mathbf{R}^4$, on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = X$ et alors :

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) \quad &\Leftrightarrow \quad M(a,b)X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} ax_1 + ax_4 & = 0 \\ ax_1 + ax_4 & = 0 \\ ax_1 + ax_4 & = 0 \\ bx_1 + bx_2 + bx_3 + bx_4 & = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rl} x_4 & = -x_1 \\ x_3 & = -x_2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad X = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,-1,0).$$

Ainsi, si on pose

$$\boxed{v_3 = (1,0,0,-1) \quad \text{et} \quad v_4 = (0,1,-1,0),}$$

alors (v_3, v_4) est une famille génératrice de $\ker(f)$ qui est libre puisque les deux vecteurs qui la composent sont non colinéaires, c'est donc une base de $\ker(f)$ et

$$\boxed{\dim \ker(f) = 2.}$$

(b) Si on note, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $V_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_i) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ la représentation matricielle de v_i, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3, v_4) &= \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&\underset{L_2 \leftrightarrow L_4}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&\underset{L_4 \leftrightarrow L_4 - L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de $\mathbf{R}^4$ et, puisqu'elle est composée de 4 vecteurs et que $\dim \mathbf{R}^4 = 4$, il s'agit d'une base de $\mathbf{R}^4$

(c) On calcule :

$$M(a,b)V_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ 3b \end{bmatrix} = aV_1 + 3bV_2$$

$$M(a,b)V_2 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{bmatrix} = aV_1 + bV_2$$

de sorte que

$$f(v_1) = av_1 + 3bv_2 \quad \text{et} \quad f(v_2) = av_1 + bv_2.$$

Par ailleurs, v_3 et v_4 étant des éléments du noyau de f, on a

$$f(v_3) = f(v_4) = 0$$

et donc :

$$N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{bmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 3b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Remarque : En représentant la matrice N par blocs, on peut réécrire le résultat sous la forme suivante :

$$N = \left[\begin{array}{c|c} T & 0_2 \\ \hline 0_2 & 0_2 \end{array}\right].$$

(d) Soient $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$ non nulle.

Alors

$$\begin{aligned} NX = \lambda X \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ax + ay & = \lambda x \\ 3bx + by & = \lambda y \\ 0 & = \lambda z \\ 0 & = \lambda t \end{cases} \\ & \underset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ z & = 0 \\ t & = 0 \end{cases} \\ & \underset{X \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \in E_\lambda(T) \setminus \{0\} \\ z & = 0 \\ t & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien l'équivalence demandée.

(e) Supposons $a = b = 1$. Alors $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ de sorte que, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(T) \quad & \Leftrightarrow \quad T - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)^2 - 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda \in \left\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, T possède deux valeurs propres distinctes et, puisqu'il s'agit d'une matrice de taille 2, elle est diagonalisable.

Si on note $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ un vecteur propre de T associé à la valeur propre $1 - \sqrt{3}$, alors $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $M(1,1)$ associé à la même valeur propre. Ainsi, $1 - \sqrt{3} \in \mathrm{Sp}(M(1,1))$. De la même manière, $1 + \sqrt{3} \in \mathrm{Sp}(M(1,1))$.

Puisque $\dim E_0(M(1,1)) = \dim \ker(f) = 2$, il s'ensuit que

$$\dim E_{1-\sqrt{3}}(M(1,1)) + \dim E_{1+\sqrt{3}}(M(1,1)) + \dim E_0(M(1,1)) \geq 1 + 1 + 2 = 4$$

et donc, puisque la somme des dimensions ne peut excéder la taille de la matrice, on a

$$\dim E_{1-\sqrt{3}}(M(1,1)) + \dim E_{1+\sqrt{3}}(M(1,1)) + \dim E_0(M(1,1)) = 4$$

et donc :

$$\boxed{\text{la matrice } M(1,1) \text{ est diagonalisable.}}$$

(f) Si $a = 1$ et $b = -1$, alors $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ donc, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(T) \quad & \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad -(1-\lambda^2) + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(T) = \emptyset$ et donc, d'après la question 5.d, $M(1,-1)$ n'admet pas de valeur propre autre que 0. Puisque $\dim E_0(M(1,-1)) = \dim \ker(f) = 2 < 4$, il s'ensuit que :

$$\boxed{M(1,-1) \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

(g) En reprenant le raisonnement mené à la question 5.e, on observe que $M(a,b)$ est diagonalisable si et seulement si T l'est. Puisque T est de taille 2 et qu'elle n'est pas diagonale, elle est diagonalisable si et seulement si elle admet deux valeurs propres distinctes. Or, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(T) \quad & \Leftrightarrow \quad (a-\lambda)(b-\lambda) - 3ab = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (a+b)\lambda - 2ab = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est racine de } X^2 - (a+b)X - 2ab. \end{aligned}$$

Ainsi, T admet deux valeurs propres distinctes si et seulement si le discriminant Δ de ce dernier polynôme est strictement positif. Or

$$\Delta = (a+b)^2 + 8ab = a^2 + 10ab + b^2.$$

On obtient donc l'équivalence :

$$\boxed{M(a,b) \text{ diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 10ab + b^2 > 0.}$$

□

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Partie A : Loi de Pareto

Soient a et b deux réels strictement positifs. On définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < b \\ a\dfrac{b^a}{x^{a+1}} & \text{si} \quad x \geq b. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Pareto de paramètres a et b lorsqu'elle admet pour densité la fonction f. Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X suivant une loi de Pareto de paramètres a et b.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Montrer que la variable aléatoire $bU^{-1/a}$ suit la loi de Pareto de paramètres a et b.

   (b) En déduire une fonction Scilab d'en-tête `function X = pareto(a,b)` qui prend en arguments deux réels a et b strictement positifs et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

   (c) On considère la fonction Scilab ci-dessous.
Que contient la liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` ?

```
function L = mystere(a,b)
        L = []
        for p = 2:6
                S = 0
                for k = 1 : 10^p
                        S = S + pareto(a,b)
                end
                L = [L,S/10^p]
        end
endfunction
```

   (d) On exécute la fonction précédente avec différentes valeurs de a et de b.
Comment interpréter les résultats obtenus ?

```
--> mystere(2,1)
 ans =
   1.9306917  1.9411352  1.9840089  1.9977684  2.0012415

--> mystere(3,2)
 ans =
   3.1050951  3.0142956  2.9849407  2.9931656  2.9991517

--> mystere(1,4)
 ans =
   21.053151  249.58609  51.230522  137.64549  40.243918
```

4. (a) Montrer que X admet une espérance si et seulement si $a > 1$ et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{ab}{a-1}.$$

   (b) Montrer que X admet une variance si et seulement si $a > 2$ et que, dans ce cas,

$$\mathbf{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose **dans cette partie uniquement** que $a = 3$ et on cherche à déterminer un estimateur performant de b. Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < b \\ \dfrac{3b^3}{x^4} & \text{si} \quad x \geq b. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

On définit : $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

On admet que Y_n et Z_n sont encore des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

5. (a) Calculer, pour tout x de $[b, +\infty[$, $\mathbf{P}\left([Y_n > x]\right)$.
   (b) En déduire que Y_n suit une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.
   (c) Montrer que $Y'_n = \dfrac{3n-1}{3n} Y_n$ est un estimateur sans biais de b.
   Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
6. (a) Déterminer l'espérance et la variance de Z_n.
   (b) En déduire un estimateur noté Z'_n sans biais de b de la forme αZ_n, où α est un réel à préciser.
   Calculer le risque quadratique de cet estimateur.
7. Entre Y'_n et Z'_n, quel estimateur choisir ? Justifier.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose **dans cette partie uniquement** que $b = 1$ et on cherche à construire un intervalle de confiance pour a. Ainsi, la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{a}{x^{a+1}} & \text{si} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose : $W_n = \ln(X_n)$.
   Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de W_n.
9. On définit, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $M_n = \dfrac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{M_n}$ et $T_n = \sqrt{n}(aM_n - 1)$.
   (a) Justifier que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
   (b) En déduire que l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}M_n}, \dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}M_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 95%.
   On admettra que $\Phi(2) \geq 0,975$, où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Solution :

Partie A : Loi de Pareto

Pour alléger la rédaction, dans toute la correction, on notera $X \hookrightarrow \mathcal{V}(a, b)$ si X suit une loi de Pareto de paramètres a et b, la lettre $\mathcal{V}$ faisant référence au prénom Vilfredo de l'économiste Pareto (1848-1923) qui a introduit cette loi dans ses travaux en microéconomie.

1. Sur $]-\infty, b[$, f est constante donc continue et positive. Sur $[b, +\infty[$, $x \mapsto a\dfrac{b^a}{x^{a+1}}$ est continue puisque le dénominateur ne s'annule pas du fait de la positivité stricte de b. Ainsi, f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{b\}$, et positive puisque $a > 0$.
   Par ailleurs,
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_b^{+\infty} a\frac{b^a}{x^{a+1}}\, dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1}}\, dx.$$

Il s'agit d'une intégrale de Riemann convergente car $a+1>1$ et $b>0$ et

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1}}\ dx = \lim_{B\to+\infty} \int_b^B \frac{1}{x^{a+1}}\ dx = \lim_{B\to+\infty} \left[-\frac{1}{ax^a}\right]_b^B = \frac{1}{ab^a}$$

de sorte que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = 1$.
En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

2. Pour tout $t\in\mathbf{R}$, on a $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(x)\ dx$.
Si $t<b$, alors pour tout $x\in]-\infty,t]$, on a $f(x)=0$ donc $F_X(t)=0$.
Si $t\geq b$, alors

$$F_X(t) = ab^a \int_b^t \frac{1}{x^{a+1}}\ dx = ab^a\left[-\frac{1}{ax^a}\right]_b^t = ab^a\left(\frac{1}{ab^a}-\frac{1}{at^a}\right) = 1-\left(\frac{b}{t}\right)^a.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall t\in\mathbf{R},\quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si}\quad t<b \\ 1-\left(\dfrac{b}{t}\right)^a & \text{sinon.}\end{cases}}$$

3. (a) Soit $U\rightsquigarrow\mathcal{U}([0,1[)$ et $Y=bU^{-1/a}$. On a $U(\Omega)=[0,1[$ et la fonction $x\mapsto\dfrac{b}{x^{1/a}}$ induit une bijection de $[0,1[$ vers $[b,+\infty[$ donc $Y(\Omega)=[b,+\infty[$. Ainsi, pour tout $t\in]-\infty,b[$, on a $F_Y(t)=0=F_X(t)$. Et pour $t\geq b$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}\left(Y\leq t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(bU^{-1/a}\leq t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U^{-1/a}\leq \frac{t}{b}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U^{1/a}\geq \frac{b}{t}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U\geq \left(\frac{b}{t}\right)^a\right) \\ &= 1-F_U\left(\left(\frac{b}{t}\right)^a\right) \end{aligned}$$

mais, pour $t\geq b>0$, on a $\dfrac{b}{t}\in]0,1]$ donc $F_U\left(\left(\dfrac{b}{t}\right)^a\right)=\left(\dfrac{b}{t}\right)^a$ et ainsi $F_Y(t)=1-\left(\dfrac{b}{t}\right)^a=F_X(t)$. Ainsi $F_Y=F_X$ et donc, X et Y suivent la même loi. En conclusion,

$$\boxed{bU^{-1/a}\rightsquigarrow\mathcal{V}(a,b).}$$

(b) En utilisant le résultat démontré à la question précédente, on propose le script suivant :

```
function X = pareto(a,b)
        X = b*rand()^(-1/a)
endfunction
```

(c) La liste `L` renvoyée par la fonction `mystere` contient les moyennes des valeurs obtenues respectivement sur 100, 1000, 10 000, 100 000 et 1 000 000 simulations indépendantes de la loi $\mathcal{V}(a,b)$.

(d) En s'appuyant sur la loi faible des grands nombres qui affirme que, pour une variable aléatoire admettant une variance, la moyenne sur un grand échantillon converge vers l'espérance, on peut conjecturer que :

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{V}(2,1)$, alors $\mathbf{E}[X] \approx 2$,
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{V}(3,2)$, alors $\mathbf{E}[X] \approx 3$,
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{V}(1,4)$, alors la moyenne ne semble pas converger, ce qui indique que la loi des grands nombres ne s'applique pas et donc que X n'admet pas de variance, et peut-être pas d'espérance non plus.

  Remarque : Dans le cadre du programme d'ECE, la mise en défaut de la loi des grands nombres ne permet que d'affirmer l'absence de variance. Il se trouve en fait que la loi des grands nombres s'applique plus généralement aux échantillons de variables aléatoires dont la loi mère possède une espérance mais pas de variance, mais ce résultat est hors-programme. La mise en défaut de cette convergence indique donc que la loi mère ne possède pas d'espérance, mais une telle réponse ne peut pas être exigée dans le cadre des programmes d'ECE.

4. (a) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge absolument. Mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\,dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$$

donc, d'après le critère de Riemann, cette intégrale converge si et seulement si $a > 1$. Dans ce cas,

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \lim_{B\to+\infty} ab^a \left[-\frac{1}{(a-1)b^{a-1}}\right]_b^B = \frac{ab^a}{(a-1)b^{a-1}} = \frac{ab}{a-1}.$$

En conclusion :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance si et seulement si } a > 1 \text{ et alors } \mathbf{E}[X] = \frac{ab}{a-1}.}$$

(b) X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance, ce qui équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ d'après le théorème de transfert. Or,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}}\,dx$$

donc, d'après le critère de Riemann, cette intégrale converge si et seulement si $a > 2$. Dans ce cas,

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = ab^a \int_b^{+\infty} \frac{1}{x^{a-1}}\,dx = \lim_{B\to+\infty} ab^a \left[-\frac{1}{(a-2)b^{a-2}}\right]_b^B = \frac{ab^2}{a-2}.$$

Alors, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{ab^2}{(a-2)} - \left(\frac{ab}{a-1}\right)^2 = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.$$

En conclusion :

$$\boxed{X \text{ admet une variance si et seulement si } a > 2 \text{ et alors } \mathbf{V}(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}.}$$

Partie B : Estimation du paramètre b

On suppose dans cette partie que $X \hookrightarrow \mathcal{V}(3,b)$.

5. (a) Soit $x \in [b,+\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y_n > x) &= \mathbf{P}(\min(X_1,\ldots,X_n) > x) \\
&= \mathbf{P}(X_1 > x,\ldots,X_n > x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i > x) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \prod_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(x)) \\
&= (1 - F_X(x))^n \quad \text{(car les } X_i \text{ ont la même loi que } X\text{)} \\
&= \left(\frac{b}{x}\right)^{3n} \quad \text{(d'après la question 2)}
\end{aligned}$$

(b) On a $Y_n(\Omega) = [b,+\infty[$ donc, pour tout $x < b$, $F_{Y_n}(x) = 0$ et, pour $x \geq b$, on a :

$$\mathbf{P}(Y_n \leq x) = 1 - \mathbf{P}(Y_n > x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{3n}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi de Pareto $\mathcal{V}(3n,b)$ et donc

$$\boxed{Y_n \rightsquigarrow \mathcal{V}(3n,b).}$$

(c) Y_n est une statistique de l'échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ et donc $Y_n' = \dfrac{3n-1}{3n}Y_n$ aussi. Par ailleurs, puisque $Y_n \rightsquigarrow \mathcal{V}(3n,b)$, il suit de la question 4.a que $\mathbf{E}[Y_n] = \dfrac{3nb}{3n-1}$ de sorte que, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y_n'] = \mathbf{E}\left[\frac{3n-1}{3n}Y_n\right] = \frac{3n-1}{3n}\mathbf{E}[Y_n] = b.$$

Ainsi,

$$\boxed{Y_n' \text{ est un estimateur sans biais de } b.}$$

Puisque Y_n' est sans biais, il suit du théorème de décomposition biais-variance que

$$r_b(Y_n') = \mathbf{V}(Y_n') = \mathbf{V}\left(\frac{3n-1}{3n}Y_n\right) = \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \mathbf{V}(Y_n) \underset{4.\text{b}}{=} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^2 \times \frac{3nb^2}{(3n-1)^2(3n-2)} = \frac{b^2}{3n(3n-2)}.$$

En conclusion :

$$\boxed{r_b(Y_n') = \frac{b^2}{3n(3n-2)}.}$$

6. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}[Z_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[X_i] = \mathbf{E}[X] \underset{4.\text{a}}{=} \frac{3b}{2}$$

et, par additivité de la variance pour des variables aléatoires indépendantes, on a

$$\mathbf{V}(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbf{V}(X) = \underset{4.\text{b}}{=} \frac{3b^2}{4n}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}\left[Z_n\right] = \frac{3b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(Z_n\right) = \frac{3b^2}{4n}.}$$

(b) Si on pose $Z_n' = \dfrac{2}{3}Z_n$, alors Z_n' est une statistique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et

$$\mathbf{E}\left[Z_n'\right] = \frac{2}{3}\mathbf{E}\left[Z_n\right] = b \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(Z_n'\right) = \frac{4}{9}\mathbf{V}\left(Z_n\right) = \frac{b^2}{3n}$$

Ainsi

$$\boxed{Z_n' \text{ est un estimateur sans biais de } b \text{ et } r_b(Z_n') = \frac{b^2}{3n}.}$$

7. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $3n - 2 \geq 1$ donc $3n(3n-2) \geq 3n$ et donc $r_b(Y_n') \leq r_b(Z_n')$. Ainsi :

$$\boxed{Y_n' \text{ estime } b \text{ plus efficacement que } Z_n'.}$$

Remarque : On observe en outre que $r_b(Y_n') = o\left(r_b(Z_n')\right)$ de sorte qu'asymptotiquement, le risque quadratique de Y_n' est infiniment plus petit que celui de Z_n'. Le gain de qualité dans l'estimation sera donc d'autant plus important que l'échantillon considéré sera grand.

Partie C : Estimation du paramètre a

On suppose dorénavant que $X \rightsquigarrow \mathcal{V}(a, 1)$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $X_n(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $W_n(\Omega) = \ln([1, +\infty[) = [0, +\infty[$. En outre, pour tout $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F_{W_n}(x) &= \mathbf{P}\left(W_n \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\ln(X_n) \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X_n \leq e^x\right) \quad \text{(car exp est une bijection croissante)} \\ &= F_X(e^x) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{e^x}\right)^a \quad \text{(d'après la question 2)} \\ &= 1 - e^{-ax}. \end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ et donc :

$$\boxed{W_n \rightsquigarrow \mathcal{E}(a).}$$

On sait alors que :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[W_n\right] = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(W_n\right) = \frac{1}{a^2}.}$$

9. On définit, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $M_n = \dfrac{\ln(X_1) + \cdots + \ln(X_n)}{M_n}$ et $T_n = \sqrt{n}(aM_n - 1)$.

(a) Les W_i admettent toute la même loi et ont pour espérance $\mu = \dfrac{1}{a}$ et pour écart-type $\sigma = \dfrac{1}{a}$. Il suit donc du théorème de la limite centrée (TCL) que :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

mais

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sqrt{n}(M_n - 1/a)}{1/a} = \sqrt{n}(aM_n - 1) = T_n.$$

On a donc bien :

$$\boxed{T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).}$$

(b) On sait que, pour $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbf{P}\left(-2 \leq Z \leq 2\right) = 2\Phi(2) - 1 \geq 0,95$ donc, d'après la convergence en loi établie à la question précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(-2 \leq T_n \leq 2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\Phi(2) - 1 \geq 0,95.$$

Mais

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(-2 \leq T_n \leq 2\right) &= \mathbf{P}\left(-2 \leq \sqrt{n}(aM_n - 1) \leq 2\right) \\
&= \mathbf{P}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq aM_n \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}-2}{M_n\sqrt{n}} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}+2}{M_n\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$\left[\dfrac{\sqrt{n}-2}{M_n\sqrt{n}}, \dfrac{\sqrt{n}+2}{M_n\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance 0,95.

$\square$