Agrégation Interne de Mathématiques 2020
Composition 1

Éléments de correction proposés par G. Dupont

Version du 27 juillet 2020.

***

Notations

Dans ce corrigé, nous adoptons les notations suivantes :

— Si E est un ensemble et $(i,j) \in E^2$, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker correspondant.

— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $[A]_{i,j}$ le coefficient situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne de cette matrice.

— Si X est un groupe agissant sur un ensemble X et si $x \in X$, on note $\mathrm{stab}_G(x)$ le stabilisateur de x pour cette action et $G \cdot x$ son orbite.

Partie I : Drapeaux de sous-espaces vectoriels

1. Par définition, on a $E_0 = \{0\}$ et, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\{e_1, \dots, e_j\} \subset \{e_1, \dots, e_{j+1}\}$ donc $E_j = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{j+1}) = E_{j+1}$ et cette inclusion est stricte puisque $e_{j+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$ du fait de la liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$. En outre, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, on a bien $E_n = E$ et donc

$$\boxed{(E_j)_{0 \leq j \leq n} \text{ est un drapeau total de } E.}$$

2. On commence par observer que si $(E_j)_{1 \leq j \leq n}$ est un drapeau total, alors

$$0 = \dim E_0 < \dim E_1 < \dots < \dim E_n = n$$

de sorte que, nécessairement, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\dim E_j = j$.

Construisons alors une base adaptée $(e_1, \dots, e_n)$ au drapeau total $(E_j)_{1 \leq j \leq n}$. Pour $j = 1$, on a $\dim E_1 = 1$ et donc n'importe quel vecteur non nul de E_1 fournit une base de E_1. Supposons maintenant que, pour un certain $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a construit une famille $(e_1, \dots, e_j)$ telle que, pour tout $k \in [\![1, j]\!]$, $(e_1, \dots e_k)$ est une base de E_k. Alors puisque $E_j \subset E_{j+1}$ et que $\dim E_{j+1} = \dim E_j + 1$, il suit du théorème de la base incomplète qu'il existe un vecteur $e_{j+1} \in E_{j+1}$ tel que $(e_1, \dots, e_{j+1})$ est une base de E_{j+1}. On construit ainsi par récurrence une base $(e_1, \dots, e_n)$ adaptée au drapeau total $(E_j)_{0 \leq j \leq n}$.

3. Si $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un drapeau total de E, on peut construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E adaptée à ce drapeau. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette famille, on obtient une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_j) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = E_j.$$

4. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note λ_k la valeur propre associée à e_k. En posant, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $E_j = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j)$, il suit de la question 1 que $(E_j)_{0 \leq j \leq n}$ est un drapeau total. Alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$u(E_j) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_j)) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_j e_j) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_j) = E_j$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{le drapeau } (E_j)_{0\leq j\leq n} \text{ est total et stable par } u.}$$

5. (a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la famille $(u^{n-j}(x))_{j\in[\![1,k]\!]}$ est une sous-famille de la famille $(u^j(x))_{0\leq j\leq n-1}$, il suffit donc de montrer que cette dernière famille est libre, ce qui est on ne peut plus classique. Soit $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j u^j(x) = 0.$$
Alors en appliquant u^{n-1} à cette identité, il vient $\lambda_0 u^{n-1}(x) = 0$. Puisque $u^{n-1}(x) \neq 0$, il vient $\lambda_0 = 0$ et donc, en reportant dans l'égalité, on obtient
$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_i u^j(x) = 0.$$
En appliquant alors u^{n-2} à cette identité, il vient $\lambda_1 = 0$. On continue ainsi jusqu'à avoir annulé tous les λ_i, ce qui montre la liberté de la famille $(u^{n-j}(x))_{j\in[\![1,k]\!]}$ et donc de chacune des familles $(u^j(x))_{0\leq j\leq n-1}$, avec $k \in [\![1,n]\!]$.

(b) Pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$, on a $\ker(u^{j-1}) \subset \ker(u^j)$ et donc
$$\{0\} = \ker(u^0) \subset \ker(u) \subset \ker(u^2) \subset \cdots \subset \ker(u^{n-1}) \subset \ker(u^n) = E.$$
Montrons que toutes les inclusions sont strictes. On a déjà $u^{n-1} \neq 0$ donc $\ker(u^{n-1}) \neq E = \ker(u^n)$. Supposons qu'il existe $j \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $\ker(u^j) = \ker(u^{j-1})$. Montrons alors par récurrence que, pour tout $p \geq j$, $\ker(u^p) = \ker(u^{j-1})$. Pour $p = j$, c'est l'hypothèse de départ. Supposons alors que $\ker(u^p) = \ker(u^{j-1})$, pour un certain $p \geq j$. Alors, pour tout $v \in E$, on a
$$\begin{aligned} v \in \ker(u^{p+1}) \quad &\Leftrightarrow \quad u^p(u(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u(v) \in \ker(u^p) = \ker(u^{j-1}) \\ &\Leftrightarrow \quad u^j(v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \ker(u^j) = \ker(u^{j-1}). \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $p \geq j$, on a $\ker(u^p) = \ker(u^{j-1})$ et donc en particulier, $\ker(u^{j-1}) = \ker(u^n) = E$, une contradiction puisque $u^{j-1} \neq 0$.

Les inclusions étant toutes strictes, il s'agit bien d'un drapeau et il est total par cardinalité. Il s'ensuit en particulier que $\dim\ker(u^j) = j$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$.

En reprenant les notations de la question précédente, posons, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $e_j = u^{n-j}(x)$. Alors, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $(e_j)_{j\in[\![1,k]\!]}$ est une famille libre et $u^k(e_j) = u^k(u^{n-j}(x)) = u^{n+k-j}(x) = 0$. Par dimension, $(e_j)_{j\in[\![1,k]\!]}$ est donc une base de $\ker(u^k)$. En conséquence, $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base adaptée au drapeau total $(\ker(u^j))_{0\leq j\leq n}$.

Il ne reste plus qu'à observer que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $u(e_j) = u^{n-j+1}(x) = u^{n-(j-1)}(x) = e_{j-1}$ pour en déduire que $u(E_j) \subset E_{j-1} \subset E_j$ de sorte que le drapeau est stable par u. En conclusion :

$$\boxed{(\ker(u^j))_{0\leq j\leq n} \text{ est un drapeau total, stable par } u \text{ de base adaptée } (u^{n-j}(x))_{1\leq j\leq n}.}$$

6. Si u est trigonalisable, il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u(e_k) \in u(E_k) \subset E_k = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$ et donc $u\left(\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)\right) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$. Ainsi, le drapeau total associé à la base $(e_1,\ldots,e_n)$ est un drapeau total stable par u.

Réciproquement, si $(E_1,\ldots,E_n)$ est un drapeau total stable par u et que $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$ est une base adaptée à ce drapeau, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u(e_k) \in u(E_k) \subset E_k = \mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_k)$ de sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

En conclusion :

$$\boxed{u \text{ est trigonalisable si et seulement si } E \text{ admet un drapeau total stable par } u.}$$

7. Si u est trigonalisable, il admet un drapeau total $(E_1, \ldots, E_n)$ stable par u de base adaptée $\mathcal{B}$. Si on note $\mathcal{C}$ la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$, alors $\mathcal{C}$ est une base adaptée au drapeau total $(E_1, \ldots, E_n)$ d'après la question 3. En outre, puisque $\mathcal{C}$ est la base d'un drapeau total stable par u, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ est triangulaire. Ainsi :

$$\boxed{\text{la base } \mathcal{C} \text{ est une base orthonormée dans laquelle la matrice de } u \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

Partie II : des groupes quotients

8. Soit $H \lhd G$.

   (a) Montrons que l'application

$$\star : \left\{ \begin{array}{ccc} G/H \times G/H & \longrightarrow & G/H \\ (g_1H, g_2H) & \mapsto & g_1g_2H \end{array} \right.$$

   définit une structure de groupe sur G/H.

   La première chose à faire est de vérifier que cette application est bien définie, autrement dit que si $g_1H = g_1'H$ et $g_2H = g_2'H$ avec $g_1, g_2, g_1', g_2' \in G$, alors $g_1g_2H = g_1'g_2'H$. Mais puisque H est distingué dans G et que la loi de composition est associative dans G, on a :

$$\begin{aligned} (g_1'g_2')H &= g_1'(g_2'H) \\ &= g_1'(g_2H) \\ &= g_1(Hg_2) \\ &= (g_1H)g_2 \\ &= (Hg_1)g_2 \\ &= H(g_1g_2) \\ &= (g_1g_2)H, \end{aligned}$$

   de sorte que $\star$ est bien définie.

   L'associativité de $\star$ découle immédiatement de celle de la loi de groupe dans G. Par ailleurs, pour tout $g \in G$, on a $1_GH \star gH = gH = g_H \star \mathbb{1}_GH$ donc $1_GH = H$ est neutre pour $\star$. Enfin, pour tout $g \in G$, on a

$$(g^{-1}H) \star (gH) = (g^{-1}g)H = 1_GH = (gg^{-1})H = (gH) \star (g^{-1}H)$$

   de sorte que gH est inversible et $(gH)^{-1} = g^{-1}H$.

   En conclusion :

$$\boxed{(G/H, \star) \text{ est un groupe.}}$$

   (b) Soient $g, g' \in G$. On a

$$\pi(gg') = (gg')H = gH \star g'H = \pi(g) \star \pi(g')$$

   de sorte que $\pi : G \longrightarrow G/H$ est un morphisme de groupes. Il est évidemment surjectif puisque tout élément gH de G/H est de la forme $\pi(g)$.

   En conclusion :

$$\boxed{\pi \text{ est un morphisme de groupes surjectif.}}$$

9. (a) $TU_n(\mathbb{K})$ est évidemment un sous-groupe de $T_n^+(\mathbb{K})$. Montrons qu'il est distingué.

   Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in TU_n^+(\mathbb{K})$. Fixons $T = \begin{pmatrix} t_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_n \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbb{K})$, où les t_i sont non-nuls.

Alors $T^{-1} = \begin{pmatrix} t_1^{-1} & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_n^{-1} \end{pmatrix}$ de sorte

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} t_1^{-1}t_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & t_n^{-1}t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} \in TU_n^+(\mathbb{K}).$$

Ainsi :

$$\boxed{TU_n^+(\mathbb{K}) \lhd T_n^+(\mathbb{K}).}$$

(b) $TU_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mais il n'est pas distingué. En effet, pour $n = 2$, si on considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin TU_n^+(\mathbb{K}).$$

Ainsi :

$$\boxed{TU_n^+(\mathbb{K}) \text{ n'est pas distingué dans } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).}$$

10. Soit H un sous-groupe de G tel que $|G/H| = 2$. Alors G possède exactement deux classes à gauche modulo H : H et gH, où g est n'importe quel élément de G qui n'est pas dans H. L'application $x \mapsto x^{-1}$ induisant une bijection entre l'ensemble des classes à gauche modulo H et celle des classes à droite modulo H, G possède exactement deux classes à droite modulo H. Puisque H est l'une d'entre elles, l'autre est Hg, où g désigne n'importe quel élément qui n'est pas dans H.
Soit donc $g \in G$. Si $g \in H$, on a $gH = H = Hg$. Si $g \notin H$, puisque les classes à gauche (respectivement à droite) forment une partition de G, on a
$$G = H \sqcup gH \quad \text{et} \quad G = H \sqcup Hg.$$
Il s'ensuit que $gH = Hg$ et donc $H \lhd G$.
En conclusion :
$$\boxed{|G/H| = 2 \quad \Rightarrow \quad H \lhd G.}$$

11. On considère ici $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(a) On a
$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = I,$$
$$B^2 = I, \quad A^2B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Si on note $\langle A, B\rangle$ le sous-groupe engendré par A et B, on a
$$\langle A, B\rangle = \left\{A^kB^l \ |(k,l) \in \mathbb{Z}^2\right\} \cup \left\{B^lA^k \ |(k,l) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$
de sorte que $\Delta \subset \langle A, B\rangle$.
Puisque $A^4 = I$, on a $A^{-1} = A^3$ et, puisque $B^2 = I$, on a $B^{-1} = I$. Ainsi,
$$\langle A, B\rangle = \underbrace{\left\{A^kB^l \ |k \in [\![0,3]\!], l \in [\![0,1]\!]\right\}}_{=\Delta} \cup \left\{B^lA^k \ |k \in [\![0,3]\!], l \in [\![0,1]\!]\right\}.$$
Par ailleurs, un calcul matriciel immédiat montre que $A^3B = BA$ donc $BA^2 = A^3BA = A^3A^3B = A^6B = A^2B$ et $BA^3 = BA^2A = A^2BA = A^2A^3B = A^5B = AB$ de sorte que $\left\{B^lA^k \ |k \in [\![0,3]\!], l \in [\![0,1]\!]\right\} \subset \Delta$ et donc $\langle A, B\rangle \subset \Delta$.
En conclusion, on a bien établi :

$$\boxed{\langle A, B\rangle = \Delta.}$$

(b) On a $\Gamma = \langle A\rangle = \{I, A, A^2, A^3\}$ et $R = \langle B\rangle = \{I, B\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Commençons par montrer que Γ est distingué dans Δ. Pour cela, nous allons déterminer les classes à gauche modulo Γ. En reprenant les calculs effectués à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
I_2\Gamma &= \Gamma \\
A\Gamma &= \{A, A^2, A^3, I\} \\
A^2\Gamma &= \{A^2, A^3, I, A\} \\
A^3\Gamma &= \{A^3, I, A, A^2\} \\
B\Gamma &= \{B, BA, BA^2, BA^3\} \\
&= \{B, A^3B, A^2B, AB\} \\
AB\Gamma &= \{AB, ABA, ABA^2, ABA^3\} \\
&= \{AB, B, A^3B, A^2B\} \\
A^2B\Gamma &= \{A^2B, A^2BA, A^2BA^2, A^2BA^3\} \\
&= \{A^2B, BA, B, AB\} \\
A^3B\Gamma &= \{A^3B, A^3BA, A^3BA^2, A^3BA^3\} \\
&= \{A^3B, A^2B, AB, B\}
\end{aligned}$$

Ainsi, il y a exactement deux classes à gauche modulo Γ et donc $\Gamma \lhd \Delta$ d'après la question 10. Par ailleurs, $|\Delta/\Gamma| = 2$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'unique groupe d'ordre 2. Il s'ensuit que

$$\boxed{\Delta/\Gamma \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq R.}$$

(c) $\Gamma \times R$ est un groupe abélien comme produit direct de groupes cycliques alors que Γ n'est pas abélien puisque, par exemple, $AB \neq BA$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'isomorphisme entre } \Delta \text{ et } \Gamma \times R.}$$

12. (a) On a :

$$\begin{aligned}
HgK &= \{hgk \mid (h, k) \in H \times K\} \\
&= \bigcup_{h\in H} hgK \\
&= \bigcup_{k\in K} Hgk
\end{aligned}$$

de sorte que HgK est bien réunion de classes à gauche modulo K, et réunion de classes à droite modulo H.

(b) Pour tout $g \in G$, on a $HgK \subset G$ et $1_G g 1_G = g \in HgK$ de sorte que

$$G = \bigcup_{g\in G} HgK.$$

Montrons que pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$, si $Hg_1K \cap Hg_2K \neq \emptyset$, alors $Hg_1K = Hg_2K$. En effet, si $Hg_1K \cap Hg_2K \neq \emptyset$, alors il existe (h_1, k_1) et (h_2, k_2) dans $H \times K$ tels que $h_1g_1k_1 = h_2g_2k_2$ mais alors $g_1 = h_1^{-1}h_2g_2k_2k_1^{-1} \in Hg_2K$ et donc $Hg_1K \subset Hg_2K$. Par symétrie, $Hg_2K \subset Hg_1K$ et donc $Hg_1K = Hg_2K$. Ainsi, si on note $\mathcal{Z}$ un ensemble de représentants dans G des doubles classes, on a

$$\boxed{G = \bigsqcup_{g\in\mathcal{Z}} HgK.}$$

Partie III : décomposition de Bruhat et matrices

13. (a) Si $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$, on a :

$$\boxed{P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

(b) Il suit immédiatement de la définition que l'application $\sigma \mapsto u_\sigma$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathrm{GL}(E)$ et donc, $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. En particulier, si $\sigma = c_1 \cdots c_k$, alors

$$\boxed{P_\sigma = \prod_{j=1}^{k} P_{c_j}.}$$

(c) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a :

$$[P_\sigma]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc

$$[{}^tP_\sigma]_{i,j} = [P_\sigma]_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = \sigma^{-1}(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = [P_{\sigma^{-1}}]_{i,j}.$$

Ainsi, on a

$${}^tP_\sigma = P_{\sigma^{-1}}$$

mais puisque $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes, on a

$$P_\sigma\, {}^tP_\sigma = P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = P_{\mathrm{id}} = I_n.$$

Ainsi, ${}^tP_\sigma = P_\sigma^{-1}$ et donc

$$\boxed{P_\sigma \in O_n(\mathbb{R}).}$$

(d) On commence par montrer que, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$, où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.
Pour cela, on observe que si $\tau = (i, j)$ est une transposition, alors si on applique l'opération élémentaire consistant à échanger la i-ième et la j-ième colonne, on obtient la matrice identité. Puisque le déterminant est une forme n-linéaire alternée, si vient

$$\det(P_\tau) = -\det(I_n) = -1 = \epsilon(\tau).$$

Puisque ϵ et $\sigma \mapsto \det(P_\sigma)$ sont des morphismes de groupes et que les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, on a bien $\det(P_\sigma) = \epsilon(\sigma)$, pour toute permutation σ de $\mathfrak{S}_n$.
Ceci étant observé, puisque $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et que $P_\sigma \in O_n(\mathbb{R})$ d'après la question 13.c, on a :

$$P_\sigma \in SO_n(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \det(P_\sigma) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon(\sigma) = 1.$$

En conclusion, si on note $\mathcal{A}_n = \ker(\epsilon)$ le groupe alterné d'indice n, on a établi :

$$\boxed{P_\sigma \in SO_n(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \in \mathcal{A}_n.}$$

14. (a) Posons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Soit $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$. On a :

$$\begin{aligned}
[T_{i,j}(\lambda)A]_{k,\ell} &= \sum_{p=0}^{n} [T_{i,j}(\lambda)]_{k,p}[A]_{p,\ell} \\
&= \sum_{p=0}^{n} [I_n]_{k,p}a_{p,l} + \lambda [E_{i,j}]_{k,p}a_{p,\ell} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \delta_{k,p}a_{p,l} + \lambda\delta_{i,k}\delta_{j,p}a_{p,\ell} \\
&= a_{k,l} + \lambda\delta_{i,k}a_{j,l} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} a_{k,l} & \text{si} & k \neq i \\ a_{i,l} + \lambda a_{j,l} & \text{si} & k = i. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ a les mêmes coefficients que si l'on avait appliqué l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur les lignes de A.

(b) De la même manière, on démontre :

Opération sur A	**Produit matriciel**
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$D_i(\lambda)A$
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$T_{i,j}(\lambda)A$

Opération sur A	**Produit matriciel**
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$AD_i(\lambda)$
$C_i \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$AT_{i,j}(\lambda)$

(c) On peut compléter le tableau suivant comme suit :

Opération sur A	**Produit matriciel**
$L_i \leftrightarrow L_j$	$P_{i,j}A$

Opération sur A	**Produit matriciel**
$C_i \leftrightarrow C_j$	$AP_{i,j}$

Alors, puisque $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on obtient :

— $P_\sigma A$ est obtenue à partir de A en permutant les lignes de A selon la permutation σ ;

— AP_σ est obtenue à partir de A en permutant les colonnes de A selon la permutation σ.

15. Soient $U = (u_{i,j})$ et $V = (v_{i,j})$ deux matrices de $T_n^+(\mathbb{K})$ et $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ tels que $P_\sigma^{-1}UP_{\sigma'} = V$, c'est-à-dire $UP_{\sigma'} = P_\sigma V$. Alors, en particulier, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $[P_\sigma V]_{\sigma(j),j} = [UP_{\sigma'}]_{\sigma(j),j}$. Mais :

$$[P_\sigma V]_{\sigma(j),j} = \sum_{k=1}^{n} [P_\sigma]_{\sigma(j),k}v_{k,j} = v_{j,j}$$

et

$$[UP_{\sigma'}]_{\sigma(j),j} = \sum_{k=1}^{n} u_{\sigma(j),k}[P_{\sigma'}]_{k,j} = u_{\sigma(j),\sigma'(j)}.$$

Puisque V est triangulaire supérieure et inversible, on a $v_{j,j} \neq 0$ et donc $u_{\sigma(j),\sigma'(j)} \neq 0$. Mais puisque U est triangulaire supérieure, il s'ensuit que $\sigma(j) \leq \sigma'(j)$. Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a nécessairement $\sigma(j) = \sigma'(j)$ et donc $\sigma = \sigma'$.

16. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(a) On procède de manière analogue au pivot de Gauss, si ce n'est que l'on ne procède à aucune interversion et que l'on n'effectue des opérations sur les colonnes ne faisant intervenir que des colonnes d'indices inférieurs. On obtient ainsi une matrice A' dont le nombre de zéros à la fin de chaque colonne est maximal. Et en multipliant à droite par les matrices de dilatations adéquates, on peut supposer que le dernier coefficient non nul de chaque colonne – que nous appellerons *pivot* – est égal à 1. La matrice A étant inversible, chaque ligne de A' contient un unique pivot. On a ainsi $A' = AV$, où V est un produit de matrices de dilatations et de transvections triangulaires supérieures, autrement dit V est elle-même triangulaire supérieure.

Si on note $\sigma(i)$ le numéro de la ligne contenant le pivot de la i-ème colonne de A', alors il ne reste plus qu'à permuter les colonnes le long de σ pour obtenir une matrice U triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. On a alors $U = A'P_\sigma = AVP_\sigma$ et ainsi :

$$\boxed{A = UP_\sigma V.}$$

Remarque : Nous avons trouvé une matrice de *permutation* P_σ alors que l'énoncé demandait que P_σ soit une matrice de *transposition*. Ceci étant, il nous semble qu'il s'agit là d'une erreur d'énoncé puisque dans le cas (dégénéré) où $n = 1$, une telle décomposition n'existe pas puisqu'il n'y a pas de transposition dans $\mathfrak{S}_1$. On observera en outre dans la littérature que c'est bien de matrices de permutation dont parle la décomposition de Bruhat et non de matrices de transposition, voir par Exemple [CG15, Ch. I]. Et c'est d'ailleurs bien sur $\mathfrak{S}_n$ que se fait la réunion dans la conclusion proposée dans l'énoncé pour cette question.

(b) On commence par observer que dans une décomposition de Bruhat de la forme précédente, puisque A, U et P_σ sont inversibles, V est aussi nécessairement inversible. Soient alors $U_1P_\sigma V_1$ et $U_2P_\tau V_2$ deux décompositions de Bruhat de la matrice A. On a donc :

$$\begin{aligned} U_1P_\sigma V_1 = U_2P_\tau V_2 \quad &\Rightarrow \quad U_2^{-1}U_1P_\sigma = P_\tau V_2V_1^{-1} \\ &\Rightarrow \quad P_{\tau^{-1}}U_2^{-1}U_1P_\sigma = V_2V_1^{-1} \\ &\Rightarrow \quad \tau = \sigma \quad \text{(d'après 15).} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } A = UP_\sigma V \text{ est une décomposition de Bruhat, alors } \sigma \text{ est entièrement déterminée par } A.}$$

17. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

— Si $c \neq 0$, on procède aux suites d'opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\underset{C_2 \leftarrow -cC_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & -bc \\ c & -cd \end{pmatrix} \\ &\underset{C_2 \leftarrow C_2 + dC_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & -bc + ad \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &\underset{C_1 \leftarrow C_1/c}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a/c & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En traduisant matriciellement ces opérations, il vient :

$$A \underbrace{D_2(-c)T_{1,2}(d)D_1(1/c)}_{=V} P_{(1,2)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=U}$$

et la décomposition de Bruhat de A est donc :

$$\boxed{A = UP_{(1,2)}V^{-1}.}$$

— Si $c = 0$, alors $a \neq 0$ et $d \neq 0$ et on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1/a \\ C_2 \leftarrow C_2/d}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$A \underbrace{D_1(1/a)D_2(1/d)}_{=V} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=U}$$

et la décomposition de Bruhat est donc :

$$\boxed{A = UP_{\mathrm{id}}V^{-1}.}$$

18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Si A vérifie (E_1), on peut écrire $A = LU$, avec $L \in T_n^-(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $U \in T_n^+(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un groupe, $A = LU \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   Si A vérifie (E_2), alors $\det(A) \neq 0$ puisque $\det(A)$ est le déterminant principal obtenu en conservant toutes les lignes et toutes les colonnes de A. Ainsi, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère les décompositions par blocs :
$$L = \left(\begin{array}{c|c} L_k & 0_{k,n-k} \\ \hline \star & L_{n-k} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad U = \left(\begin{array}{c|c} U_k & \star \\ \hline 0_{n-k,k} & U_{n-k} \end{array}\right).$$
   de sorte que
$$A = LU = \left(\begin{array}{c|c} L_k U_k & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right)$$
   et donc, si on note $\Delta_k(A)$ le mineur principal de A associé à l'ensemble d'indices $[\![1, k]\!] \subset [\![1, n]\!]$, on a :
$$\Delta_k(A) = \det(L_k U_k) = \det(L_k) \times \det(U_k)$$
   mais $L_k \in T_k^-(\mathbb{C})$ et $U_k \in T_k^+(\mathbb{C})$ donc $\det(L_k) \neq 0$ et $\det(U_k) \neq 0$. Il s'ensuit que $\Delta_k(A) \neq 0$.
   On a donc bien établi :
$$\boxed{(E_1) \Rightarrow (E_2).}$$
   (c) Montrons par récurrence sur n que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a ses mineurs principaux tous non nuls, alors A peut s'écrire $L \times U$, avec $L \in T_n^-(\mathbb{C})$ et $U \in T_n^+(\mathbb{C})$. Si $n = 1$, on a $A = \alpha \in \mathbb{C}^*$ et on peut par exemple poser $T = \alpha$ et $U = 1$.
   Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ une matrice dont tous les mineurs principaux sont non nuls. On pose
$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_n & \Gamma_{n+1} \\ \hline \Lambda_{n+1} & \alpha \end{array}\right),$$
   avec $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Gamma_{n+1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\lambda_{n+1} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.
   Puisque les déterminants principaux de A sont tous non nuls, il en est de même de ceux de A_n et alors, par hypothèse de récurrence, il existe $L_n \in T_n^-(\mathbb{C})$ et $U_n \in T_n^+(\mathbb{C})$ telles que $A_n = L_n U_n$. Les matrices L_n et U_n étant inversibles, on pose $Z = L_n^{-1}\Gamma_{n+1}$, $Y = \Lambda_{n+1}U_n^{-1}$ et on considère les matrices
$$L_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} L_n & 0 \\ \hline Y & \alpha \end{array}\right) \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} U_n & Z \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$
   de sorte que
$$L_{n+1}U_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} L_n U_n & L_n Z \\ \hline Y U_n & \alpha \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_n U_n & \Gamma_{n+1} \\ \hline \Lambda_{n+1} & \alpha \end{array}\right) = A.$$
   Par ailleurs, $\det(A) \neq 0$ et $\det(U_{n+1}) \neq 0$ donc $\det(L_{n+1}) \neq 0$ et on a donc bien trouvé des matrices $L_{n+1} \in T_{n+1}^-(\mathbb{C})$ et $U_{n+1} \in T_{n+1}^+(\mathbb{C})$ telles que $A = L_{n+1}U_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.
   Ainsi :
$$\boxed{(E_2) \Rightarrow (E_1).}$$

19. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'application Δ_k qui à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le mineur principal associé à l'ensemble d'indices $[\![1, k]\!] \subset [\![1, n]\!]$ est une application polynomiale en les entrées de A, elle est donc en particulier continue. Il s'ensuit que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_k^{-1}(\mathbb{C}^*)$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. Mais alors l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des matrices qui vérifient (E_2) est :
$$\mathcal{E}_2 = \bigcap_{k=1}^{n} \Delta_k^{-1}(\mathbb{C}^*) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$
qui est ouvert comme intersection finie d'ouverts.

20. On considère
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n.$$

(a) On commence par observer que τ est une involution donc $\tau^{-1} = \tau$ et $P_\tau^{-1} = P_\tau$. Alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a
$$[P_\tau A P_\tau]_{i,j} = [P_\tau A P_\tau^{-1}]_{i,j} = [A]_{\tau(i),\tau(j)}.$$
Mais puisque τ est strictement décroissante sur $[\![1,n]\!]$, on a $i > j \quad \Leftrightarrow \quad \tau(i) < \tau(j)$ et donc :
$$A \in T_n^+(\mathbb{C}) \quad \Leftrightarrow \quad P_\tau A P_\tau \in T_n^-(\mathbb{C}).$$
Autrement dit,
$$\boxed{P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau = T_n^-(\mathbb{C}).}$$

(b) Si on note $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des matrices qui vérifie (E_1) et $\mathcal{E}_2$ celui des matrices qui vérifie (E_2), on a vu à la question 18 que $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ et donc : On a
$$P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) \underset{(20.\text{a})}{=} T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C}) = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$$
mais on a établi à la question 19 que $\mathcal{E}_2$ est un ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ donc :
$$\boxed{P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) \text{ est un ouvert de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$$

(c) Si on note $T_{\sup}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, non nécessairement inversibles, on a $T_{\sup}(\mathbb{C}) = \overline{T_n^+(\mathbb{C})}$
D'après le théorème de décomposition LU, si une matrice M est inversible, on peut l'écrire LU avec L une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U une matrice triangulaire supérieure. Autrement dit, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset T_n^-(\mathbb{C}) T_{\sup}(\mathbb{C})$. Mais alors, par continuité du produit matriciel,
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset T_n^-(\mathbb{C}) T_{\sup}(\mathbb{C}) = T_n^-(\mathbb{C}) \overline{T_n^+(\mathbb{C})} \subset \overline{T_n^-(\mathbb{C}) T_n^+(\mathbb{C})} \underset{(20.\text{a})}{=} \overline{P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})}$$
et donc :
$$\boxed{P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$$
Remarque : Bien que classique, la décomposition LU n'étant pas explicitement au programme de l'agrégation interne, il eût peut-être été plus judicieux de donner un autre argument ou de la redémontrer. Pour plus d'informations sur cette décomposition, on pourra avantageusement consulter [CP19, Section 1.3.6].

(d) Puisque $\tau^2 = \mathrm{id}$, l'application $A \mapsto P_\tau A$ est involutive et donc bijective. Par ailleurs, elle est continue par continuité du produit matriciel. Ainsi :
$$\boxed{A \mapsto P_\tau A \text{ est un homéomorphisme de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ vers } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$$

(e) On a :
$$T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = P_\tau^{-1}(P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})) = P_\tau(P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})) \underset{\text{homéo.}}{\simeq} P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$$
or $P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ d'après les questions 20.b et 20.c. Ainsi,
$$\boxed{T_n^+(\mathbb{C}) P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) \text{ est un ouvert dense de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$$

D'après la question 12.b, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, si $\sigma \neq \tau$, alors $T_n^+(\mathbb{C})P_\sigma T_n^+(\mathbb{C}) \cap T_n^+(\mathbb{C})P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = \emptyset$. Alors

$$\left(\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbb{C})P_\sigma T_n^+(\mathbb{C}) \right) \cap T_n^+(\mathbb{C})P_\tau T_n^+(\mathbb{C}) = \emptyset.$$

Il suit alors de la question 16 que

$$\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbb{C})P_\sigma T_n^+(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \setminus T_n^+(\mathbb{C})P_\tau T_n^+(\mathbb{C}).$$

Puisque $T_n^+(\mathbb{C})P_\tau T_n^+(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il s'ensuit que :

$$\boxed{\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma \neq \tau}} T_n^+(\mathbb{C})P_\sigma T_n^+(\mathbb{C}) \text{ est un ferme d'intérieur vide.}}$$

Partie IV : décomposition de Bruhat et drapeaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux totaux de E et Δ l'ensemble des bases de E.

On considère

$$\delta : \left\{ \begin{array}{rcl} \Delta & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) & \mapsto & (\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i))_{i \in [\![1,n]\!]} \end{array} \right.$$

21. On sait que l'image d'une base par un isomorphisme est une base donc $\mathrm{GL}(E)$ agit bien sur Δ.
Par ailleurs, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B} = (e_1', \dots, e_n')$ sont deux bases de E, il existe une unique application linéaire $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $g(e_i) = e_i'$, et puisqu'elle envoie une base sur une base, c'est nécessairement un automorphisme de E. En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{GL}(E) \text{ agit transitivement et fidèlement sur } \Delta.}$$

22. Soit $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n) \in \mathcal{D}$ et $g \in \mathrm{GL}(E)$. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $E_i \subset E_{i+1}$ donc $g(E_i) \subset g(E_{i+1})$. Par ailleurs, puisque g est injectif, on a $\dim g(E_i) = \dim E_i$ donc $g \cdot \mathcal{E} = (g(E_1), \dots, g(E_n))$ est un drapeau total de sorte que $\mathrm{GL}(E)$ agit sur $\mathcal{D}$.
Si $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ est un drapeau total et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base adaptée à $\mathcal{E}$, alors

$$\delta(g \cdot \mathcal{B}) = \delta((g(e_1), \dots, g(e_n)) = (\mathrm{Vect}(g(e_1), \dots, g(e_i))_{i \in [\![1,n]\!]} = (g(E_1), \dots, g(E_n)) = g \cdot \delta(\mathcal{B}).$$

Alors, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux drapeaux totaux et si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases adaptées à ces drapeaux, puisque l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur Δ est transitive, il existe g tel que $g \cdot \mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et donc

$$\mathcal{E}' = \delta(\mathcal{B}') = \delta(g \cdot \mathcal{B}) = g \cdot \delta(\mathcal{B}) = g \cdot \mathcal{E}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{GL}(E) \text{ agit transitivement sur } \mathcal{D}.}$$

Remarque : L'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\mathcal{D}$ n'est pas fidèle puisque n'importe quelle homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$ stabilise un drapeau total.

23. Soit $B_0 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ une base de E. Si $g \in \mathrm{GL}(E)$ stabilise $\delta(B_0) = (E_1, \dots, E_n)$ alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $g(E_i) \subset E_i$ de sorte que

$$\mathrm{Mat}_{B_0}(g) = \begin{pmatrix} \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \star \end{pmatrix},$$

les termes diagonaux étant non nuls puisque g est un isomorphisme.
Réciproquement, si $T \in T_n^+(\mathbb{K})$ est la matrice d'un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$, alors puisque T est inversible, g est un isomorphisme et, puisque T est triangulaire supérieure, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $g(E_i) \subset E_i$ de sorte que g stabilise $\delta(B_0)$.
En conclusion :

$$\boxed{g \mapsto \mathrm{Mat}_{B_0}(g) \text{ induit une bijection } \mathrm{stab}_{\mathrm{GL}(E)}(\delta(B_0)) \xrightarrow{\sim} T_n^+(\mathbb{K}).}$$

24. Posons $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $H = T_n^+(\mathbb{K})$, sous-groupe de G. Alors

$$M\mathcal{R}N \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad MT_n^+(\mathbb{K}) = NT_n^+(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad MH = NH$$

et donc $M\mathcal{R}N$ si et seulement si M et N ont la même classe à gauche modulo H. Or c'est un fait général que dans un groupe G muni d'un sous-groupe H, l'égalité des classes à gauche induit une relation d'équivalence sur les éléments de G. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

25. Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \overline{M} & \mapsto & M \cdot \delta(B_0) \end{array} \right. .$$

(a) Nous avons vu à la question 23 que le stabilisateur H de $\delta(B_0)$ est $T_n^+(\mathbb{K})$. Ainsi, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur l'orbite $\mathcal{D}$ de $\delta(B_0)$ passe au quotient en une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$ sur cette même orbite, et donc l'application φ est bien définie.
Explicitement, si $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont telles que $\overline{M} = \overline{N}$, alors $M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K})$ et donc

$$\varphi(\overline{M}) = M \cdot \delta(B_0) = (\mathrm{Vect}(M(\epsilon_1), \ldots, M(\epsilon_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$$

et

$$\varphi(\overline{N}) = N \cdot \delta(B_0) = (\mathrm{Vect}(N(\epsilon_1), \ldots, N(\epsilon_i))_{i \in [\![1,n]\!]} .$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, puisque $T_n^+(\mathbb{K})$ stabilise $\delta(B_0)$, on a $\mathrm{Vect}(M^{-1}N\epsilon_1, \ldots, M^{-1}N\epsilon_i) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i)$ et donc $\mathrm{Vect}(N\epsilon_1, \ldots, N\epsilon_i) = \mathrm{Vect}(M\epsilon_1, \ldots, M\epsilon_i)$ et donc $\varphi(\overline{M}) = \varphi(\overline{N})$.
En conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie.}}$$

(b) On peut là encore invoquer un résultat général : Si G est un groupe agissant sur un ensemble X et si $x \in X$, alors l'action de G sur X induit une bijection $G/\mathrm{stab}_G(x) \longrightarrow G \cdot x$. En particulier, quand l'action de G sur X est transitive, on obtient une bijection $G/\mathrm{stab}_G(x) \longrightarrow X$. Dans ce cas précis, puisque $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$ d'après la question 22 et que le stabilisateur de $x = \delta(B_0)$ est $T_n^+(\mathbb{K})$ d'après 23, l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}$ induit par passage au quotient une bijection $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{D}$ et cette action n'est autre que l'application φ.
Explicitement, φ est surjective car l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}$ est transitive. Par ailleurs, si $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\overline{M}) = \varphi(\overline{N}) & \Leftrightarrow & \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(M\epsilon_1, \ldots, M\epsilon_i) = \mathrm{Vect}(N\epsilon_1, \ldots, N\epsilon_i) \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(M^{-1}N\epsilon_1, \ldots, M^{-1}N\epsilon_i) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i) \\ & \Leftrightarrow & M^{-1}N \cdot \delta(B_0) = \delta(B_0) \\ & \Leftrightarrow & M^{-1}N \in T_n^+(\mathbb{K}) \quad \text{(d'après 23)} \\ & \Leftrightarrow & \overline{M} = \overline{N}, \end{array}$$

ce qui prouve l'injectivité de φ.
En conclusion :

$$\boxed{\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{D} \text{ est bijective.}}$$

(c) Soient $X, Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\overline{XY}) &= XY \cdot \delta(B_0) \\
&= (\mathrm{Vect}(XY\epsilon_1, \dots, XY\epsilon_i))_{1 \leq i \leq n} \\
&= X \cdot (\mathrm{Vect}(Y\epsilon_1, \dots, Y\epsilon_i))_{1 \leq i \leq n} \\
&= X \cdot \varphi(\overline{Y}).
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall (X,Y) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(\overline{XY}) = X \cdot \varphi(\overline{Y}).}$$

26. $A \cdot (\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{AX}, \overline{AY})$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$.

(a) Raisonnons par analyse-synthèse.
Analyse : Soient $T_1 \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
(\overline{X}, \overline{Y}) = XT_1 \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) \quad &\Leftrightarrow \quad (\overline{X}, \overline{Y}) = (\overline{XT_1}, \overline{XT_1P_\sigma}) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overline{X} &= \overline{XT_1} \\ \overline{Y} &= \overline{XT_1P_\sigma} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} X^{-1}XT_1 \in T_n^+(\mathbb{K}) \\ Y^{-1}XT_1P_\sigma \in T_n^+(\mathbb{K}) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists U \in T_n^+(\mathbb{K}), \quad Y^{-1}XT_1P_\sigma = U \\
&\Leftrightarrow \quad \exists U \in T_n^+(\mathbb{K}), \quad Y^{-1}X = UP_\sigma^{-1}T_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Synthèse : Puisque $Y^{-1}X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on peut considérer sa décomposition de Bruhat $Y^{-1}X = UP_\tau V$ et en posant $T_1 = V^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$ et $\sigma = \tau^{-1} \in \mathfrak{S}_n$, il suit de l'analyse que $(\overline{X}, \overline{Y}) = XT_1 \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma})$, ce qui prouve l'existence. L'unicité de σ découle de la question 15.

(b) Notons $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $X = \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K})$ et Ω l'ensemble des orbites de G dans X et considérons l'application :

$$\psi : \begin{cases} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \Omega \\ \sigma & \mapsto & G \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) \end{cases}.$$

L'application φ est bien définie et surjective d'après la question 27. Montrons qu'elle est injective. Si $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ sont deux permutations, on a

$$\begin{aligned}
\psi(\sigma) = \psi(\tau) \quad &\Leftrightarrow \quad G \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) = G \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\tau}) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad A \cdot (\overline{I_n}, \overline{P_\sigma}) = (\overline{I_n}, \overline{P_\tau}) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad (\overline{A}, \overline{AP_\sigma}) = (\overline{I_n}, \overline{P_\tau}) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \begin{cases} \overline{A} &= \overline{I_n} \\ \overline{AP_\sigma} &= \overline{P_\tau} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists A \in T_n^+(\mathbb{K}), \quad P_\tau^{-1}AP_\sigma \in T_n^+(\mathbb{K}).
\end{aligned}$$

Or, il suit de la question 16.a que cette dernière égalité implique $\tau = \sigma$ et donc ψ est injective et donc bijective. En conclusion :

$$\boxed{\text{L'action de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ sur } \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T_n^+(\mathbb{K}) \text{ possède } n! \text{ orbites.}}$$

Références

[CG15] Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de Groupes et de Géométrie. Tome second.* Calvage & Mounet, 2015.

[CP19] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie.* Calvage & Mounet, 2019.