EDHEC 2020 - VOIE E

Correction proposée par G. Dupont pour http://maths-concours.fr.

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA.$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$.
4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
   (b) En déduire une base de $\text{im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
   (c) Déterminer la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.
5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$. Déterminer le rang de $f + \text{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Solution :

1. On a ${}^t0_n = 0_n = -0_n$ de sorte que $0_n \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et, pour toutes matrices M, N de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$ {}^t(\lambda M + N) = \lambda\, {}^tM + {}^tN = -\lambda M - N = -(\lambda M + N)$$

de sorte que $\lambda M + N \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{A}_n(\mathbf{R}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$$

2. (a) Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Alors

$$ {}^tf(M) = {}^t(({}^tA)M + MA) = ({}^tM)A + {}^tA\,{}^tM = -MA - {}^tAM = -({}^tAM + MA) = -f(M).$$

En conclusion :

$$\boxed{f(\mathcal{A}_n(\mathbf{R})) \subset \mathcal{A}_n(\mathbf{R}).}$$

(b) On a déjà observé à la question précédente que $f(\mathcal{A}_n(\mathbf{R})) \subset \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Il suffit donc de vérifier que f est linéaire. Or, pour $M, N \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$f(\lambda M + N) = {}^t A(\lambda M + N) + (\lambda M + N)A = \lambda({}^t AM + MA) + {}^t AN + NA = \lambda f(M) + f(N).$$

Ainsi :

$$\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbf{R})).}$$

3. (a) On commence par observer que J, K, L sont des matrices antisymétriques donc $\mathrm{Vect}(J, K, L) \subset \mathcal{A}_3(\mathbf{R})$. Par ailleurs, si $M \in \mathcal{A}_3(\mathbf{R})$, alors il existe des réels j, k, ℓ tels que :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & j & k \\ -j & 0 & \ell \\ -k & -\ell & 0 \end{bmatrix} = jJ + kK + \ell L \in \mathrm{Vect}(J, K, L).$$

Ainsi, $\mathcal{A}_3(\mathbf{R}) \subset \mathrm{Vect}(J, K, L)$ et donc :

$$\boxed{\mathcal{A}_3(\mathbf{R}) = \mathrm{Vect}(J, K, L).}$$

(b) Soient j, k, ℓ des réels tels que $jJ + kK + \ell L = 0_3$. Alors, $\begin{bmatrix} 0 & j & k \\ -j & 0 & \ell \\ -k & -\ell & 0 \end{bmatrix} = 0_3$ et donc $j = k = \ell = 0$. Il s'ensuit que la famille (J, K, L) est libre et donc, puisqu'elle est génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$, il s'agit d'une base de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$.
En particulier, on a :

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_3(\mathbf{R}) = 3.}$$

4. (a) On a

$$f(J) = {}^t AJ + JA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -J - L,$$

$$f(K) = {}^t AK + KA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0_3 = 0J - 0L,$$

$$f(L) = {}^t AL + LA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0J - L.$$

(b) On a

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(J), f(K), f(L)) = \mathrm{Vect}(-J - L, -L) = \mathrm{Vect}(J, L).$$

Puisque J et L ne sont pas colinéaires, il s'ensuit que :

$$\boxed{(J, L) \text{ est une base de } \mathrm{im}(f).}$$

(c) D'après le théorème du rang et les questions 1 et 4.b, on a :

$$\dim \ker(f) = \dim \mathcal{A}_3(\mathbf{R}) - \dim \mathrm{im}(f) = 3 - 2 = 1.$$

Par ailleurs, $f(K) = 0_3$ donc $K \in \ker(f)$ et, par dimension :

$$\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}(K).}$$

5. (a) En appliquant la définition de la matrice représentative d'un endomorphisme dans une base donnée, il suit des calculs menés en 4.a que :

$$\boxed{F = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.}$$

(b) La matrice F est triangulaire (inférieure) donc ses valeurs propres se situent sur sa diagonale. En conséquence :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 0\}\,.}$$

(c) On a

$$\mathrm{rg}(f + \mathrm{id}) = \mathrm{rg}(F + I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

donc $\dim\ker(f + \mathrm{id}) = 3 - \mathrm{rg}(f + \mathrm{id}) = 1$ et donc,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E_{-1}(f) + \dim E_0(f) = \dim\ker(f + \mathrm{id}) + \dim\ker(f) = 1 + 1 = 2 < 3.$$

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, où σ est strictement positif.

On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associée $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt.$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Montrer que la fonction de répartition Y est la fonction, notée F_Y, définie par :
   $$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$
   (b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.
   (c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $\mathbf{E}[Y] = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.
3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.
   On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   (a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.
   (b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbf{E}\left[Y^2\right]$, $\mathbf{V}(Y)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
   (c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.
4. On rappelle qu'en `Scilab`, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i,j,'nor',m,s)` simule dans un tableau à i lignes et j colonnes, $i \times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance m et de variance s^2.
   Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n :')
sigma = input('entrez la valeur de sigma :')
X = ------ // simulations de X1,...,Xn
Y = ------ // simulations de Y1,...,Yn
S = ------
T = ------
```

Solution :

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_X(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\ dt \\ &= \int_{x}^{+\infty} f_X(-u)\ du \quad \text{(C.V. : } u = -t) \\ &= \int_{x}^{+\infty} f_X(u)\ du \quad \text{(parité de } f_X) \\ &= \mathbf{P}(X \geq x) \\ &= 1 - \mathbf{P}(X \leq x) \\ &= 1 - F_X(x). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(-x) = 1 - F_X(x).}$$

2. On pose $Y = |X|$.

   (a) On a $X(\Omega) = \mathbf{R}$ et $x \mapsto |x|$ induit une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+$ donc $Y(\Omega) = \mathbf{R}_+$. En particulier, pour tout réel $x < 0$, on a $F_Y(x) = 0$. Soit $x \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}(Y \leq x) \\ &= \mathbf{P}(|X| \leq x) \\ &= \mathbf{P}(-x \leq X \leq x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \\ &= F_X(x) - (1 - F_X(x)) \\ &= 2F_X(x) - 1. \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}}$$

   (b) Puisque f_X est continue sur $\mathbf{R}$, F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Il s'ensuit que F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ et, puisqu'elle est constante sur $\mathbf{R}_-^*$, elle est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, et donc aussi continue. Par ailleurs, F_Y est une fonction de répartition donc elle est continue à droite et $\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$ qui est bien égal à $F_Y(0) = 2F_X(0) - 1 = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1$. Ainsi, la fonction de répartition F_Y est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*$, c'est donc la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
   En outre, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, une densité f_Y vérifie $f_Y(x) = F_Y'(x)$ de sorte que l'on peut poser :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_Y(x) = \begin{cases} 2f_X(x) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}}$$

   (c) Y possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_Y(x)\, dx$ converge, mais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_Y(x)\, dx = 2\int_0^{+\infty} x f_X(x)\, dx,$$

   intégrale qui converge puisque X admet une espérance. Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\, dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} x f_X(x)\, dx \\ &= 2 \lim_{B \to +\infty} \int_0^B \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \times \frac{x^2}{2}\right)\, dx \\ &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{B \to +\infty} \int_0^B \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \times \frac{x^2}{2}\right)\, dx \\ &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \lim_{B \to +\infty} \left[-\exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \times \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^B \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Ainsi, on trouve bien :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[Y\right] = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.}$$

3. (a) S_n est une statistique de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et, par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}\left[S_n\right] = \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[Y_k\right] = \mathbf{E}\left[Y\right] = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Ainsi, le biais de S_n est :

$$\boxed{b_\sigma(S_n) = \mathbf{E}\left[S_n\right] - \sigma = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1\right)\sigma.}$$

Si on pose $T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}S_n$, alors T_n est encore une statistique de l'échantillon $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $\mathbf{E}\left[T_n\right] = \sigma$ de sorte que :

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \sigma.}$$

(b) D'après la formule de Koenig-Huygens, on a

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \underbrace{\mathbf{V}\left(X\right)}_{=\sigma^2} + \underbrace{\mathbf{E}\left[X\right]^2}_{=0} = \sigma^2$$

et $Y^2 = |X|^2 = X^2$ donc

$$\mathbf{E}\left[Y^2\right] = \mathbf{E}\left[X^2\right] = \sigma^2,$$

$$\mathbf{V}\left(Y\right) = \mathbf{E}\left[Y^2\right] - \mathbf{E}\left[Y\right]^2 = \sigma^2 - \frac{2}{\pi}\sigma^2 = \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right),$$

et, par indépendance des Y_i, on a

$$\mathbf{V}\left(S_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}\left(Y_i\right) = \frac{\mathbf{V}\left(Y\right)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[X^2\right] = \sigma^2, \quad \mathbf{E}\left[Y^2\right] = \sigma^2, \mathbf{V}\left(Y\right) = \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(S_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right).}$$

(c) Puisque T_n estime σ sans biais, il suit du théorème de décomposition biais-variance que

$$r_\sigma(T_n) = \mathbf{V}\left(T_n\right) = \mathbf{V}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}S_n\right) = \frac{\pi}{2}\mathbf{V}\left(S_n\right) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{T_n \text{ est un estimateur convergent de } \sigma.}$$

4. On propose le programme suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
sigma = input('entrez la valeur de sigma :')
X = grand(1,n,'nor',0,sigma)
Y = abs(X)
S = mean(Y)
T = sqrt(%pi/2)*S
```

□

Exercice 3

Soit n un entier nature non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = i)$.
4. On rappelle les commandes `Scilab` suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
   - `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
   - `grand(1,1,'bin',n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
   - `grand(1,1,'geom',p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
   - `grrand(1,1,'poi',a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

   Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = ------
Y = ------
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0, n]\!]$, puis montrer que :

$$\mathbf{P}(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}.$$

   (b) Écrire, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la probabilité $\mathbf{P}(Y = i)$ sous la forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}.$$

   (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right).$$

   (c) En déduire que $\mathbf{E}[Y] = \dfrac{(n+1)p}{2}$.

7. (a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{E}[Y(Y-1)] = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right).$$

   (b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbf{E}[Y(Y-1)] = \frac{(n^2-1)p^2}{3}.$$

   (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

   (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbf{E}[Y(Y-1)]$ et $\mathbf{E}[Y]$.

Solution :

1. $n=1$ signifie que l'urne U contient une seule boule et que celle-ci est donc numérotée 1. On effectue alors un seul tirage dans l'urne V de sorte que $Y(\Omega)=\{0,1\}$, $\mathbf{P}(Y=1)=p$ et $\mathbf{P}(Y=0)=q$. En d'autres termes :

$$\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(p).}$$

2. Puisque les boules sont indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n, tous les numéros ont la même probabilité de sortir de sorte que :

$$\boxed{X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]), \quad \mathbf{E}[X]=\frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X)=\frac{n^2-1}{12}.}$$

3. Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Si l'événement $(X=k)$ est réalisé, alors on effectue k tirages avec remise dans l'urne V de sorte que Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(k,p)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall i \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}_{(X=k)}(Y=i)=\begin{cases} \binom{k}{i}p^iq^{k-i} & \text{si} \quad i \in 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si} \quad i > k. \end{cases}}$$

4. On propose le script suivant :

```
n = input('entrez la valeur de n :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = grand(1,1,'uin',1,n)
Y = grand(1,1,'bin',X,p)
```

5. (a) Le plus grand numéro dans l'urne U étant égal à n, on tire au plus n fois dans V et on peut avoir une boule blanche à chaque tirage, ainsi la plus grande valeur possible pour Y est n. Toutes les autres valeurs entre 0 et n étant aussi possibles lors d'un tel tirage dans V, on a $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
Par ailleurs, puisque $\{(X=k)\}_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements, il suit de la formule des probabilités totales que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y=0) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X=k, Y=0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X=k)\,\mathbf{P}_{(X=k)}(Y=0) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\binom{k}{0}p^0q^k \quad \text{(d'après 2 et 3)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q^k \\
&= \frac{q}{n}\sum_{k=0}^{n-1} q^k \\
&= \frac{q}{n} \times \frac{1-q^n}{1-q} \\
&= \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathbf{P}(Y=0) = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}.}$$

(b) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On observe que $(X = k, Y = i) = \emptyset$ si $k < i$ car on ne peut pas obtenir plus de boules blanches que l'on ne tire de boules dans V. Ainsi,

$$(Y = i) = \bigsqcup_{k=i}^{n} (X = k, Y = i)$$

donc

$$\mathbf{P}(Y = i) = \sum_{k=i}^{n} \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}_{(X=k)}(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(Y = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i}.}$$

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. On a

$$i\binom{k}{i} = i \times \frac{k!}{i!(k-i)!} = i \times \frac{k(k-1)!}{i(i-1)!(k-i)!} = k\frac{(k-1)!}{(i-1)!((k-1)-(i-1))!} = k\binom{k-1}{i-1}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}.}$$

(b) $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ est fini donc Y admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \sum_{i=0}^{n} i\mathbf{P}(Y = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \frac{1}{n} \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} i\binom{k}{i} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} k\binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}.}$$

(c) On poursuit le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} p^{i-1} q^{(k-1)-(i-1)} \\
&= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} k \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} k\binom{k-1}{j} p^j q^{(k-1)-j}}_{=(p+q)^{k-1}=1} \\
&= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{p(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathbf{E}[Y] = \frac{(n+1)p}{2}.}$$

7. (a) En appliquant le théorème de transfert, on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y(Y-1)] &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\mathbf{P}(Y=i) \\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)\mathbf{P}(Y=i) \\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1) \times \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} p^i q^{k-i} \quad \text{(d'après 5.b)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} i(i-1)\binom{k}{i} p^i q^{k-i}
\end{aligned}$$

mais, pour $k \geq 2$ et $i \in [\![2, k]\!]$, on a

$$i(i-1)\binom{k}{i} = i(i-1)\frac{k(k-1)(k-2)!}{i(i-1)(i-2)!((k-2)-(i-2))!} = k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$$

de sorte que

$$\boxed{\mathbf{E}[Y(Y-1)] = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}.}$$

(b) En poursuivant le calcul précédent, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y(Y-1)] &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \\
&= \frac{p^2}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^{i-2} q^{(k-2)-(i-2)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} p^j q^{(k-2)-j}}_{=(p+q)^{k-2}=1} \\
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{p^2}{n} \sum_{k=0}^{n} k^2 - k \\
&= \frac{p^2}{n} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \right) \\
&= \frac{p^2}{n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{p^2}{6} \left((n+1)(2n+1) - 3(n+1) \right) \\
&= \frac{p^2}{6} (2n^2 - 2).
\end{aligned}
$$

En simplifiant par 2, il vient :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[Y(Y-1)\right] = \frac{p^2(n^2-1)}{3}.}$$

(c) Pour $n = 1$, on a $Y(Y-1) = 0$ et donc $\mathbf{E}\left[Y(Y-1)\right] = 0$. Par ailleurs, $\frac{p^2(n^2-1)}{3} = 0$ de sorte que la formule reste valable pour $n = 1$.

(d) En appliquant la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}\left[Y^2\right] - \mathbf{E}\left[Y\right]^2 = \mathbf{E}\left[Y(Y-1) + Y\right] - \mathbf{E}\left[Y\right]^2 = \mathbf{E}\left[Y(Y-1)\right] + \mathbf{E}\left[Y\right] - \mathbf{E}\left[Y\right]^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}\left[Y(Y-1)\right] + \mathbf{E}\left[Y\right] - \mathbf{E}\left[Y\right]^2.}$$

□

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de $\mathbf{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1.
3. (a) Pour tout n de $\mathbf{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.
   (b) En déduire I_2.
   (c) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n :')
a = 1/2
b = log(2)-1/2
for k=2:n
        aux = a
        a = ------
        b = ------
end
disp(b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.
5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
   (b) En déduire la valeur de J_1.
7. En utilisant les question 5 et 6, Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n :')
J = log(2)
for k=1:n-1
J = ------
end
I = ------
disp(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
9. (a) Utiliser les question 4 et 5 pour déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (c) Utiliser la question 5 pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
10. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.
   (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
   (b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

    Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

    (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :
    $$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.$$

    (b) En déduire l'égalité suivante :
    $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1-(-1)^n).$$

    (c) Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$

Solution :

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque, pour tout $x \in [0,1]$, $1+x \neq 0$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^n}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{(1+x)^2}$ sont continues sur $[0,1]$ de sorte que les intégrales I_n et J_n sont bien définies.

2. On a
$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
et
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+x-1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 - I_0 \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
On a donc :
$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad I_2 = \ln(2) - \frac{1}{2}.}$$

3. (a) Pour tout n de $\mathbf{N}$, on a par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n \frac{x^2+2x+1}{(1+x)^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x^n\,dx \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{n+1}.$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}.$$

(b) En appliquant la relation précédente avec $n = 0$, on a $I_2 + 2I_1 + I_0 = 1$ de sorte que

$$I_2 = 1 - I_0 - 2I_1 = 1 - \frac{1}{2} - (2\ln(2) - 1) = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

En conclusion :

$$I_2 = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

(c) On propose le script suivant :

```
n = input('donnez une valeur pour n :')
a = 1/2
b = log(2)-1/2
for k=2:n
        aux = a
        a = b
        b = 1/(k-1)-2*a-aux
end
disp(b)
```

4. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x$ donc $(1+x)^2 \geq 1$ et donc $0 \leq \dfrac{1}{(1+x)^2} \leq 1$ de sorte que

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

(b) D'après le théorème d'encadrement appliqué à l'inégalité précédente, il vient immédiatement :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

5. Les fonctions $u : x \mapsto x^n$ et $v : x \mapsto -\dfrac{1}{1+x}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc, par intégration par parties :

$$I_n = \int_0^1 x^n \times \frac{1}{(1+x)^2} \, dx$$

$$= \left[-\frac{x^n}{1+x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+x}\, dx$$
$$= -\frac{1}{2} + nJ_{n-1}.$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.}$$

6. (a) On a

$$J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{J_0 = \ln(2) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad J_n + J_{n+1} = \frac{1}{n+1}.}$$

(b) En appliquant la relation précédente avec $n = 0$, il vient $J_0 + J_1 = 1$ et donc

$$\boxed{J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln(2).}$$

7. En utilisant les question 5 et 6, Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n :')
J = log(2)
for k=1:n-1
J = 1/k-J
end
I = n*J-1/2
disp(I)
```

8. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $J_1 = 1 - \ln(2)$ et

$$(-1)^1 \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = -(\ln 2 - 1) = 1 - \ln(2)$$

donc la relation est satisfaite.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que la relation est vérifiée. Alors :

$$J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - J_n \quad \text{(d'après 6.a)}$$
$$= \frac{1}{n+1} - \left((-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \ln 2 - (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= (-1)^{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).$$

Ainsi, par récurrence, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad J_n = (-1)^n\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).}$$

9. (a) On a $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$ donc $nJ_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ et donc

$$\boxed{J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

(b) On a

$$|J_n| = \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.$$

Ainsi, la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.}$$

(c) On a déjà observé que $J_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ donc

$$\boxed{J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

10. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{J_n}{(-1)^n} = (-1)^n J_n$ et donc, il suit de la question 9.c que

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\dfrac{(-1)^n}{2n} = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et donc, la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est une conséquence de 9.c. On ne peut néanmoins pas conclure quant à la convergence de la série de terme général u_n à partir du seul équivalent puisque le théorème de comparaison correspondant nécessite que les termes généraux soient de signe constant.

11. (a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On a

$$u_{k+1} = \ln 2 - \sum_{j=1}^{k+1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

$$= \ln 2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$= u_k - \frac{(-1)^k}{k+1}$$

de sorte que

$$(k+1)u_{k+1} = (k+1)u_k - (-1)^k$$

et donc

$$\boxed{u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.}$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, posons $v_k = ku_k$. Alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \end{aligned}$$

mais, par télescopage, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1 = (n+1)u_{n+1} - u_1$$

et, par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que l'on peut réécrire

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -\frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$

On a donc bien l'égalité :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).}$$

(c) On a :

$$S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+1)\frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)} - u_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2} - u_1$$

et

$$S_{2n+1} = (2n+2)u_{2n+2} - u_1 - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+2)\frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)} - u_1 - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} - u_1 - 1 = -\frac{1}{2} - u_1$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = -\frac{1}{2} - u_1 = \frac{1}{2} - \ln 2$ et donc, en appliquant le résultat admis dans l'énoncé, il vient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} - \ln 2.}$$

12. On a montré que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2} - \ln 2$ mais

$$\begin{aligned} u_k &= \ln 2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \\ &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}. \end{aligned}$$

La relation établie est donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2).}$$

$\square$