EDHEC 2020 - VOIE E

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA.$$

2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   (b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n = 3$ et on choisit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. On considère les trois matrices $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$.
4. (a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.
   (b) En déduire une base de $\mathrm{im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.
   (c) Déterminer la dimension de $\ker(f)$ puis en donner une base.
5. (a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1; 0\}$.
   (b) En déduire les valeurs propres de f.
   (c) On note id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbf{R})$. Déterminer le rang de $f + \mathrm{id}$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où σ est strictement positif.

On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associée $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
2. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   (a) Montrer que la fonction de répartition Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 2F_X(x) - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

   (b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

(c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $\mathbf{E}[Y] = \sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

3. On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.

   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.

   On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   (a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.

   (b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $\mathbf{E}\left[Y^2\right]$, $\mathbf{V}(Y)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

   (c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

4. On rappelle qu'en `Scilab`, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i,j,'nor',m,s)` simule dans un tableau à i lignes et j colonnes, $i \times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance m et de variance s^2.

   Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n = input('entrez la valeur de n :')
sigma = input('entrez la valeur de sigma :')
X = ------ // simulations de X1,...,Xn
Y = ------ // simulations de Y1,...,Yn
S = ------
T = ------
```

Exercice 3

Soit n un entier nature non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1 - p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbf{P}_{(X=k)}(Y = i)$.
4. On rappelle les commandes `Scilab` suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
   — `grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
   — `grand(1,1,'bin',n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
   — `grand(1,1,'geom',p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
   — `grrand(1,1,'poi',a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

   Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = input('entrez la valeur de n :')
p = input('entrez la valeur de p :')
X = ------
Y = ------
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0,n]\!]$, puis montrer que :

$$\mathbf{P}\,(Y=0)=\frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}.$$

   (b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $\mathbf{P}\,(Y=i)$ sous la forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i\binom{k}{i}=k\binom{k-1}{i-1}.$$

   (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbf{E}\,[Y]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right).$$

   (c) En déduire que $\mathbf{E}\,[Y]=\dfrac{(n+1)p}{2}$.

7. (a) Établir que :

$$\forall n \geq 2,\quad \mathbf{E}\,[Y(Y-1)]=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right).$$

   (b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2,\quad \mathbf{E}\,[Y(Y-1)]=\frac{(n^2-1)p^2}{3}.$$

   (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$.

   (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbf{E}\,[Y(Y-1)]$ et $\mathbf{E}\,[Y]$.

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0=1$.

1. Pour tout n de $\mathbf{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\,dx \quad \text{et} \quad J_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

2. Calculer I_0 et I_1.

3. (a) Pour tout n de $\mathbf{N}$, calculer $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n$.

   (b) En déduire I_2.

   (c) Compléter le script Scilab suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n :')
a = 1/2
b = log(2)-1/2
for k=2:n
        aux = a
        a = ------
        b = ------
end
disp(b)
```

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.
6. (a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.
   (b) En déduire la valeur de J_1.
7. En utilisant les question 5 et 6, Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input('donnez une valeur pour n :')
J = log(2)
for k=1:n-1
J = ------
end
I = ------
disp(I)
```

8. Établir que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.
9. (a) Utiliser les question 4 et 5 pour déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (c) Utiliser la question 5 pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\dfrac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
10. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \ln 2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.
    (a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
    (b) Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?
11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

    Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

    (a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :
    $$u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k.$$
    (b) En déduire l'égalité suivante :
    $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n).$$
    (c) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \ln 2$. Conclure.
12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2.$