Agrégation Interne de Mathématiques 2021
Composition 1

***

Notations, rappels et définitions

— Dans le sujet, n désigne toujours un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

— On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'élément neutre pour la multiplication dans cette algèbre est noté I_n. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle s'écrit $A = \lambda I_n$, avec λ un élément de $\mathbb{K}$.

— La transposée d'une matrice A est notée de manière usuelle A^T. Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note A^* la matrice adjointe de A définie par $A^* = \bar{A}^T$.

— On rappelle que le groupe unitaire noté $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ est formé des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^* = A^{-1}$.

— Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E.

— Une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou de $\mathcal{L}(E)$ est dite commutative si deux quelconques de ses éléments commutent.

— Les éléments d'une partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dits co-trigonalisables s'il existe une matrice inversible P telle que pour toute matrice A de $\mathcal{A}$, $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

— Les éléments d'une partie non vide $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ sont dits co-trigonalisables s'il existe une base de E dans laquelle tous les éléments de $\mathcal{A}$ ont une matrice triangulaire supérieure. Cela revient à dire que l'ensemble formé des matrices des éléments de $\mathcal{A}$ dans une base donnée est formé d'éléments co-trigonalisables.

— Une partie de $\mathcal{L}(E)$ est dite irréductible si les seuls sous-espaces de E stables par tous ses éléments sont $\{0\}$ et E. Elle est dite réductible sinon.

— Une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite irréductible si la partie formée des endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés est irréductible. Elle est dite réductible sinon.

— Une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition et contenant l'application identité. La sous-algèbre engendrée par une partie de $\mathcal{L}(E)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant cette partie.

— Une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par produit et contenant la matrice I_n. La sous-algèbre engendrée par une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant cette partie.

— On appelle polynôme complexe en deux variables non commutatives X, Y toute combinaison linéaire à coefficients complexes de mots formés à partir des deux lettres X et Y. Par exemple,

$$p(X, Y) = 4 + X - Y + 3XY + 4iYX + (5 + 2i)Y^3X^2Y$$

est un tel polynôme. Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on notera naturellement

$$p(A, B) = 4I_n + A - B + 3AB + 4iBA + (5 + 2i)B^3A^2B.$$

On peut remarquer que dans ce contexte, l'ensemble des $p(A, B)$ obtenus lorsque $p(X, Y)$ décrit l'ensemble de ces polynômes est exactement la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par A et B.

Structure du sujet

— La partie 1 (préliminaires) est composée de 5 questions indépendantes qui pourront être utiles par la suite.

— La partie 2 propose une démonstration du théorème de Burnside, énoncé avant la question 8 et utilisé dans les parties suivantes.

— La partie 3 illustre par deux exemples l'importance des hypothèses du théorème de Burnside.

— La partie 4 donne trois applications à des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
— La partie 5 étudie les matrices magiques et leur lien avec les matrices de permutation.
— La partie 6 établit un résultat de co-trigonalisation par passage au quotient et propose quelques applications.

Les parties 3, 4, 5 et 6 sont indépendantes et peuvent être traitées en admettant le théorème de Burnside prouvé à la partie 2.

---

1 Quelques préliminaires

Dans cette partie, on établit quelques résultats dont certains pourront être utiles par la suite. Pour i et j entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on note $E_{i,j}$ l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1. Ces matrices forment donc la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pourra utiliser le symbole de Kronecker défini pour tous entiers i et j par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

1. Soit A un élément nilpotent de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire pour lequel il existe un entier naturel p non nul tel que $A^p = 0$. Quelle est sa trace ?
2. Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Démontrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB)$.
   (b) Soient i, j, k, l quatre entiers tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$. Donner sans démonstration ce que vaut le produit $E_{i,j}E_{k,l}$. On utilisera le symbole de Kronecker.
   (c) Démontrer que pour $n \geq 2$, il peut arriver que $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(CBA)$.
3. Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Démontrer que si f est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $f(M) = \mathrm{tr}(AM)$.
   (b) Démontrer que si les matrices $M_1, M_2, \ldots, M_{n^2}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors les formes linéaires définies pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n^2$ par $f_i(M) = \mathrm{tr}(M_iM)$ forment une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En déduire qu'il existe une base $(F_1, \ldots, F_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait :
   $$M = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{tr}(M_iM)F_i.$$
   (c) Démontrer que si f est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(MN) = f(NM)$ pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors f est proportionnelle à la trace. On pourra utiliser les matrices $E_{i,j}$ et le symbole de Kronecker, définis au début de cette partie.
4. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par G.
   (a) Montrer que $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}(G)$, où $\mathrm{Vect}(G)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par G.
   (b) Démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{G}$ formée d'éléments de G.
5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E. On suppose qu'ils commutent.
   (a) Démontrer que tout sous-espace vectoriel propre de f est stable par g.
   (b) Démontrer que si g est diagonalisable, alors sa restriction à tout sous-espace stable (par g) est diagonalisable.
   (c) Démontrer que si f et g sont diagonalisables, alors ils sont co-diagonalisables, c'est-à-dire qu'ils possèdent une base commune de diagonalisation.

2 Un théorème de Burnside

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On note $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$ et on suppose que les seuls sous-espaces de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont E et $\{0\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est irréductible.

6. Démontrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont exactement les homothéties. On pourra considérer une valeur propre d'un tel endomorphisme.
7. Démontrer à l'aide d'un exemple en dimension 2 que le résultat de la question précédente tombe en défaut si $\mathbb{C}$ est remplacé par $\mathbb{R}$. On pourra utiliser des rotations de $\mathbb{R}^2$.

On suppose désormais de plus dans toute cette partie que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. Le but des questions 8 à 11 est de démontrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, ce qui constitue le théorème de Burnside dont l'énoncé suit.

Théorème: (Burnside)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.
Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.

— **On considère l'espace vectoriel E^n et ρ le morphisme de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E^n)$ qui à $f \in \mathcal{L}(E)$ associe l'endomorphisme $\rho(f)$ de E^n donné par $\rho(f)(v_1, \ldots, v_n) \mapsto (f(v_1), \ldots, f(v_n))$.**

— **On désigne par E_i le sous-espace vectoriel de E^n défini par $E_i = \{0\} \times \cdots \times \{0\} \times E \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$ où tous les termes sont $\{0\}$ sauf le terme numéro i qui est E. Ainsi, $E^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.**

— **On fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Cela détermine une base de chaque E_i, et une base de $E^n = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Dans cette base, un élément de $\mathcal{L}(E^n)$ est donc représenté par une matrice de taille n^2 par blocs, tous de taille n.**

8. (a) Décrire dans la base ci-dessus la matrice par blocs d'un élément de $\mathcal{L}(E^n)$ qui commute avec tous les éléments $\rho(a)$, pour $a \in \mathcal{A}$. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E^n qui commutent avec tous les éléments $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

   (b) Démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\rho(f)$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{C}$. On pourra considérer les matrices par blocs de $\rho(f)$.

9. Soit $W \subset E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. On se propose de démontrer que W admet un supplémentaire dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

   (a) Démontrer que si $i \in \{1, \ldots, n\}$, alors $W \cap E_i = \{0\}$ ou $W \cap E_i = E_i$.

   (b) Si $W \cap E_1 = \{0\}$, on pose $W_2 = W \oplus E_1$ et si $W \cap E_1 = E_1$, on pose $W_2 = W$. Que vaut $W_2 \cap E_2$?

   (c) En poursuivant comme ci-dessus, construire une suite croissante $W_1 = W, W_2, \cdots, W_n$ de n sous-espaces de E^n stables par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$, avec $W_n = E^n$ et en déduire l'existence d'un supplémentaire de W dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

10. Soit $W \subset E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Soit W' un supplémentaire de W dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Notons $p : E^n \longrightarrow E^n$ la projection sur W parallèlement à W'. Démontrer que p commute avec tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

11. Soit $W \subset E^n$ l'ensemble formé des éléments $(a(e_1), \ldots, a(e_n))$ quand a décrit $\mathcal{A}$. Vérifier que W est un sous-espace vectoriel de E^n et qu'il est stable par tous les $\rho(b)$ pour $b \in \mathcal{A}$. En utilisant la question précédente, démontrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = (a(e_1), \ldots, a(e_n))$. Conclure que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ et énoncer le résultat finalement obtenu.

3 Sur les hypothèses dans le théorème de Burnside

Les questions 12 et 13 sont indépendantes. On y illustre l'importance des hypothèses faites dans le théorème de Burnside.

12. Dans cette question, on confond matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé. On définit alors :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \middle| (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

   (a) Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents.

   (b) Démontrer que la sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ engendrée par $\mathcal{A}$ contient toutes les matrices diagonales. On pourra considérer A dans $\mathcal{A}$ formée avec $a = 0$ et $b = 1$ et B formée avec $a = 1$ et $b = 0$.

   (c) Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$ stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$. Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

13. Dans cette question, on note u l'endomorphisme de $\mathbb{Q}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^3)$ engendrée par u.

(a) Démontrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Expliciter une base de $\mathcal{A}$ en fonction de u.

(c) Démontrer que $\mathcal{A}$ est un corps.

(d) Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{Q}^3$ stables par u. Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

4 Trois applications du théorème de Burnside à des sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, n désigne un entier naturel au moins égal à 2. Les questions 14, 15 et 16 sont indépendantes. On utilisera dans chacune d'elles le théorème de Burnside démontré à la partie 2.

14. Sous-espace vectoriel engendré par le groupe unitaire.
On note $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ le groupe unitaire de taille n. On munit $\mathbb{C}^n$ de son produit scalaire canonique.

(a) Démontrer que si X et Y sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ de norme (associée au produit scalaire canonique) valant 1, il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ telle que $UX = Y$.

(b) Démontrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par $U_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tout entier. On pourra utiliser la question 4.a du préliminaire.

15. Un sous-groupe nécessairement borné.
Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose que G est irréductible et que les valeurs propres des éléments de G sont toutes de module égal à 1. On désire montrer que le groupe G est borné.

(a) Démontrer qu'il existe une base $(M_1, \dots, M_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G. On pourra utiliser la question 4.b du préliminaire.

(b) Démontrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n^2$ et tout élément M de G, on a $|\mathrm{tr}(M_i M)| \leq n$. En déduire que le groupe G est borné pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra utiliser la question 3.b du préliminaire.

16. Un résultat de co-trigonalisation.
Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ formé d'éléments tous unipotents, c'est-à-dire tel que pour tout $g \in G$, la seule valeur propre de g soit 1. On désire démontrer que les éléments de G sont co-trigonalisables, ce qui constitue un théorème dû à Kolchin. On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ engendrée par G.

(a) Démontrer qu'un endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ admet 1 comme valeur propre si et seulement si $g - \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ est nilpotent.
On suppose que $\mathcal{G}$ est irréductible.
Soit a un élément de G. On écrit $a = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} + b$, avec b nilpotent.

(b) Démontrer que pour tout élément f de G, $\mathrm{tr}(b \circ f) = 0$.

(c) En déduire que $b = 0$ puis que l'hypothèse faite sur l'irréductibilité de $\mathcal{G}$ est absurde.
D'après la question précédente, $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible.

(d) Démontrer le théorème de Kolchin énoncé ci-dessus en procédant par récurrence.

5 Autour des matrices magiques et des matrices de permutation

Dans cette partie, on exploite le théorème de Burnside afin de faire le lien entre l'espace des matrices magiques et le sous-espace engendré par les matrices de permutation.

— **Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que M est magique si la somme de ses coefficients par ligne et par colonne est constante. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. C'est clairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.**

— **Si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on note p_σ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini sur la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ par $p_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout i et P_σ la matrice de p_σ dans cette même base.**

— **On note D la droite dirigée par le vecteur $e_1 + \cdots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ dans la base $\mathcal{C}$.**

17. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note f_i (resp. g_i) la forme linéaire qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe la somme des coefficients de la ligne i (resp. colonne i).
Démontrer que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est liée mais que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_{n-1})$ est libre.

18. Déterminer la dimension du sous-espace $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ formé des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 0.
19. En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.
20. Justifier que l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ est inclus dans $\mathcal{M}$.
21. Démontrer que si m est un endomorphisme de $\mathcal{C}^n$ de matrice M dans la base $\mathcal{C}$, alors $M \in \mathcal{M}$ si et seulement si H et D sont stables par m.
22. Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ parcourt toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$ sont $\{0\}$, la droite D, l'hyperplan H et $\mathbb{C}^n$. On pourra traiter le cas d'une droite puis celui d'un sous-espace non inclus dans D.
23. Pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on note $p_{\sigma|H}$ la restriction de p_σ à H. Démontrer que tout endomorphisme f de H peut s'écrire sous la forme
$$f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i|H},$$
avec $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des éléments de $\mathbb{C}$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. On utilisera le théorème de Burnside démontré à la partie 2.
24. Soit $M \in \mathcal{M}$ et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Démontrer l'existence de N dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ dans $\mathbb{C}$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et α dans $\mathbb{C}$ tels que
$$m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u.$$
25. Établir un lien entre l'endomorphisme u et la somme des endomorphismes p_σ quand σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et en déduire que l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ formé des matrices magiques est exactement l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ.

6 Passage au quotient et co-trigonalisation

Tous les espaces vectoriels considérés dans cette partie sont de dimension finie et le corps de base est $\mathbb{C}$. On se propose d'établir un lemme de co-trigonalisation, appelé ci-dessous lemme fondamental de co-trigonalisation, grâce au passage au quotient. Ce résultat combiné au théorème de Burnside démontré à la partie 2 permet de disposer d'un moyen efficace de preuves de co-trigonalisabilité. On rappelle d'abord quelques résultats sur les espaces vectoriels quotients et on définit ce que signifie qu'une propriété est transmise par passage au quotient.

— Si E est un espace vectoriel et F est un sous-espace vectoriel de E, on note E/F l'ensemble des classes d'équivalence sur E pour la relation $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in F$.

— Pour $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, en notant $\bar{x}$ la classe de x pour la relation d'équivalence précédente, $\bar{x} + \bar{y}$ et $\lambda\bar{x}$ sont alors définis par $\overline{x+y}$ et $\overline{\lambda x}$. Ainsi, E/F est muni d'une structure d'espace vectoriel appelé espace vectoriel quotient de E par F. Dans ce contexte, $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

— Si E est un espace vectoriel et f un endomorphisme de E, si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E tous deux stables par f avec $G \subset F$, on dispose de l'endomorphisme de l'espace vectoriel quotient F/G noté $\bar{f}$ et défini, par $\forall x \in F$, $\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$. On dit que $\bar{f}$ est obtenu à partir de f par passage au quotient.

— Une propriété $\mathcal{P}$ est dite transmise par passage au quotient si, quand une famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes vérifie la propriété $\mathcal{P}$, alors toute famille d'endomorphismes obtenus par passage au quotient (comme ci-dessus) à partir de $\mathcal{F}$, hérite de la propriété $\mathcal{P}$.

— Ainsi par exemple, pour une famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes, le fait de commuter, d'être nilpotent ou d'avoir une structure d'algèbre est clairement une propriété transmise par passage au quotient.

26. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel E, vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ transmise par passage au quotient. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$. Démontrer que la famille formée des restrictions des éléments de $\mathcal{F}$ à F vérifie encore la propriété $\mathcal{P}$.
27. Démontrer que si f, endomorphisme d'un espace vectoriel E, laisse stable un sous-espace vectoriel F de E, alors l'endomorphisme $\bar{f}$ de E/F défini par $\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)}$ vérifie $\mathrm{rg}\bar{f} \leq \mathrm{rg} f$.

28. Démontrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et que L' est un sous-espace vectoriel de E/F non nul et distinct de E/F, alors $L = \{x \in E \mid \bar{x} \in L'\}$ est un sous-espace vectoriel de E distinct de F et de E.
29. **Le lemme fondamental de co-trigonalisation.**
    On se donne une propriété $\mathcal{P}$ transmise par passage au quotient et on suppose qu'elle vérifie la condition suivante : toute famille d'endomorphismes définis sur un même espace vectoriel de dimension au moins 2 et vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ est réductible.
    Démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$ est co-trigonalisable.
    Ce résultat constitue le lemme fondamental de co-trigonalisation.
    On pourra noter E l'espace vectoriel sur lequel sont définis les endomorphismes de la famille $\mathcal{F}$ et envisager une suite strictement croissante $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_m = E$ de sous-espaces de E tous stables par les éléments de $\mathcal{F}$ et de cardinal maximal.
30. Le cas commutatif.
    Soit $\mathcal{C}$ une famille d'endomorphismes qui commutent 2 à 2.
    (a) Démontrer que toute famille d'endomorphismes d'un espace de dimension au moins 2 et qui commutent 2 à 2 est réductible. On pourra considérer un sous-espace propre d'un de ces endomorphismes.
    (b) En déduire que les éléments de $\mathcal{C}$ sont co-trigonalisables.
31. Le cas nilpotent.
    On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes formée d'éléments tous nilpotents.
    (a) Démontrer que dans un espace vectoriel de dimension au moins 2, une telle algèbre est réductible. On peut utiliser le théorème de Burnside et la propriété $\mathcal{P}$ définie par : *être une algèbre d'endomorphismes formée d'éléments tous nilpotents*.
    (b) En déduire que les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.
32. Le cas des commutateurs nilpotents.
    On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes telle que pour tous f et g dans $\mathcal{A}$, $f \circ g - g \circ f$ (appelé commutateur de f et de g) est nilpotent.
    (a) Démontrer que si $n \geq 2$, il existe deux matrices B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la matrice $BC - CB$ ne soit pas nilpotente. On pourra commencer par le cas $n = 2$.
    (b) Vérifier que la propriété $\mathcal{P}$ définie par : *être une algèbre constituée d'endomorphismes telle que pour tous f et g dans cette algèbre, $f \circ g - g \circ f$ est nilpotent* est une propriété transmise par passage au quotient.
    (c) Démontrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.
33. Le cas d'une algèbre.
    Démontrer que si $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes, ses éléments sont co-trigonalisables si et seulement si, pour tous f et g dans $\mathcal{A}$, f et g sont co-trigonalisables.
34. Un théorème de Mc Coy.
    On se donne deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On désire démontrer le théorème suivant, dû à Mc Coy.
    Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :
    (1) : Les deux matrices A et B sont co-trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
    (2) : Pour tout polynôme $p(X, Y)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ en deux variables X et Y non commutatives, la matrice $p(A, B)(AB - BA)$ est nilpotente.
    (a) Démontrer l'implication (1)⇒(2).
    On suppose désormais la propriété (2) vérifiée et on désire démontrer la propriété (1).
    (b) Que dire dans le cas où $AB = BA$?
    On suppose donc désormais que $AB \neq BA$.
    (c) Démontrer l'existence d'un vecteur colonne non nul X et d'une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $C(AB - BA)X = X$.
    (d) En déduire que l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par A et B est réductible.
    (e) Conclure.
35. On désire dans cette question améliorer le théorème de Mc Coy en se limitant aux monômes, c'est-à-dire en remplaçant la condition (2) par la condition plus faible (3) suivante :

(3) : Pour tout $m \geq 0$ et tout $(M_1, \ldots, M_m) \in \{A, B\}^m$, la matrice $M_1 M_2 \cdots M_m(AB - BA)$ est nilpotente.

On suppose que la propriété (3) est vérifiée et on désire démontrer la propriété (1). On peut supposer que $AB \neq BA$, le cas $AB = BA$ ayant déjà été traité.

(a) Que dire de la trace des éléments du type $M_1 M_2 \cdots M_m(AB - BA)$ avec $m \geq 0$ et $(M_1, \ldots, M_m) \in \{A, B\}^m$?

(b) Démontrer que l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par A et B est réductible.

(c) Conclure.

36. Application 1.

Démontrer en utilisant le théorème de Mc Coy qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale, c'est-à-dire commute avec son ajointe $A^* = \bar{A}^T$, si et seulement si elle est diagonalisable via le groupe unitaire $U_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe une matrice diagonale D et une matrice unitaire P telles que $A = PDP^{-1}$. On pourra utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

37. Application 2.

Dans cette question, on se donne deux éléments A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dans les différents cas suivants, démontrer que A et B sont co-trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) $AB = 0$.

(b) A et B commutent avec $AB - BA$.

(c) $AB - BA = B$.

(d) Il existe α et β dans $\mathbb{C}$ tels que $AB - BA = \alpha A + \beta B$.

Pour le (c), on exprimera $AB^k - B^k A$ à l'aide de B^k pour tout k dans $\mathbb{N}$ et on montrera que B^k est nilpotente. Pour le (d), on se ramènera au cas (c).

*** FIN DU SUJET ***