Chapitre 9 : Primitives

PCSI – LGT Baimbridge

2021-2022

Table des matières

Introduction

Nous étudions dans ce chapitre les principales techniques permettant d'effectuer l'opération inverse de la dérivation, à savoir la détermination d'une primitive pour une fonction donnée. D'un point de vue formel, calculer une primitive d'une fonction f revient à résoudre *l'équation différentielle* $y' = f$, point de vue que nous développerons dans un prochain chapitre.

Dans ce chapitre, nous nous contentons d'un point de vue essentiellement technique pour apprendre à déterminer des primitives, en s'inspirant de nos seules connaissances en *calcul différentiel*, c'est-à-dire relatives au calcul de dérivées.

Comme nous allons le voir, la notion de primitive est très directement liée à celle d'intégrale, comme l'ont établi indépendamment Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) au début du XVIIIe. Néanmoins, nous ne développerons ces liens qu'au second semestre, une fois que nous aurons défini formellement la notion d'intégrale.

Les seuls prérequis nécessaires concernant le calcul intégral du secondaire pour aborder ce chapitre sont les notations, toutes les techniques de calcul seront revues ici. Il est par contre nécessaire d'être parfaitement à l'aise avec le **calcul de dérivées** pour répondre aux questions liées à ce chapitre.

Notations

Dans tout ce chapitre, I désigne un **intervalle** de $\mathbb{R}$.

1 Primitives

1.1 Définition

Définition 1.1.1: Primitive

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **primitive de** f **sur** I toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\boxed{\forall t \in I, \quad F'(t) = f(t).}$$

Exercice 1.1.2

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$;

b. $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$;

c. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;

d. $x \mapsto e^{3x}$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 Propriétés

La proposition suivante montre que, si elles existent, toutes les primitives d'une fonction donnée diffèrent d'une simple constante additive.

Proposition 1.2.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, F une primitive de f sur I et G une fonction définie sur I. Alors

$$\boxed{G \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R}, \quad G = F + c.}$$

Remarque 1.2.2: Multiplicité des primitives

Pour une fonction donnée, il existe une infinité de primitives. On prendra donc garde à ne pas dire « F est *la* primitive de f » mais plutôt « F est *une* primitive de f », à moins que l'on spécifie une valeur initiale, auquel cas on pourra dire « F est *la* primitive de f qui prend telle valeur en tel point ».

Exercice 1.2.3

Déterminer les primitives des fonctions suivantes qui s'annulent en a :

a. $x \mapsto \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $a = \dfrac{\pi}{4}$;

b. $x \mapsto \operatorname{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$ avec $a = 1$;

c. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $a = 1$;

d. $x \mapsto e^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $a = 0$.

Le principal résultat relatif à l'existence de primitives est le *théorème fondamental de l'analyse*, qui fait le lien avec le calcul intégral.

Théorème 1.2.4: Théorème fondamental de l'analyse

Si f est une fonction continue sur I et $a \in I$, alors l'application :

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. Ce théorème ne sera démontré qu'au second semestre, une fois que la notion d'intégrale aura été définie formellement. □

Le théorème fondamental de l'analyse, dont les premières versions sont dues à Newton et à Leibniz, crée ainsi un lien spectaculaire entre une notion géométrique, l'*intégrale*, et une notion analytique, la *primitive*. Néanmoins, à ce stade de notre programme, nous n'utiliserons aucun résultat d'intégration et l'intégrale nous servira surtout à ce stade comme une notation pratique.

Notation

Si f est une fonction continue sur I, on note $x \mapsto \int^x f(t)\ dt$ une primitive générique de f sur I.

Remarque 1.2.5: Distinguer la variable d'intégration de la borne.

On prendra garde à utiliser des lettres différentes pour la borne de l'intégrale et pour la variable d'intégration. Ainsi, on peut écrire :

$$F(x) = \int^x f(t)\ dt \quad \text{ou} \quad F(t) = \int^t f(x)\ dx$$

mais on ne peut pas écrire

$$F(x) = \int^x f(x)\ dx \quad \text{ou} \quad F(t) = \int^t f(t)\ dt$$

Proposition 1.2.6: Linéarité de l'intégrale

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant pour primitives respectives F et G. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.
Autrement dit, pour tout $x \in I$, on a :

$$\boxed{\int^x \lambda f(t) + \mu g(t)\ dt = \lambda \int^x f(t)\ dt + \mu \int^x g(t)\ dt.}$$

Exercice 1.2.7

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto 2\sin(x) - 5\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$;

b. $x \mapsto \text{ch}(3x)$ sur $\mathbb{R}$;

c. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$;

d. $x \mapsto e^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.2.8: L'intégrale n'est pas multiplicative !

Attention au fait que la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées, de ce fait l'opération «inverse» ne fonctionnera pas non plus. Ainsi, en général, si F est une primitive de f sur I, alors en général :

$$\int^x f^n(t)\ dt \neq F^n(x).$$

De la même manière, si f et g admettent respectivement F et G pour primitives sur I, alors en général :

$$\int^x f(t)g(t)\ dt \neq F(x)G(x).$$

Pour les produits et les puissances, il n'y a pas de règle générale. Il convient donc de faire bien plus attention et de recourir aux formules de primitives usuelles (Section 1.3) ou à l'intégration par parties (Section 3.2).

1.3 Quelques primitives usuelles

Proposition 1.3.1: Primitive de $u'u^n$

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\int^x u'(t)u^n(t)\ dt = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + \text{ constante.}$$

Si en outre u ne s'annule pas sur I, alors cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Exercice 1.3.2

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos(x)\sin^5(x)$.
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \dfrac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^3(x)}$.

Pour $n = -1$, on dispose du résultat suivant :

Proposition 1.3.3: Primitive de $\frac{u'}{u}$

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur I. Alors

$$\int^x \frac{u'(t)}{u(t)}\ dt = \ln|u(x)| + \text{ constante.}$$

Exercice 1.3.4

Déterminer une primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \tan(x)$.

Remarque 1.3.5: Pas de primitive simple pour $\frac{1}{u}$

Attention au fait qu'en général, on a :

$$\int^x \frac{1}{u(t)}\ dt \neq \ln|u(x)| + \text{ constante.}$$

Il n'y a pas de formule générale dans ce cas, il faut donc essayer de se ramener à une autre forme connue.

Corollaire 1.3.6

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus I$. Alors

$$\int^x \frac{1}{t-a}\ dt = \ln|x-a| + \text{ constante.}$$

Exercice 1.3.7

Déterminer une primitive sur $]-1, 1[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{3x-4}$.

Proposition 1.3.8

Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors

$$\int^x u'(t)e^{u(t)}\ dt = e^{u(x)} + \text{ constante.}$$

Exercice 1.3.9

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(2x)e^{\cos(2x)}$.

2 Application au calcul d'intégrales

2.1 Généralités

Théorème 2.1.1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et F une primitive de f sur I. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a \leq b$, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a).}$$

Notation

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et F est une primitive de f sur I. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$ on note :

$$[F(t)]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a).$$

et, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variable d'intégration, on note simplement :

$$[F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

de sorte que

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).}$$

Remarque 2.1.2: Distinguer l'intégrale d'une primitive

L'analogie des notations due au théorème fondamental de l'analyse ne doit pas être une source d'erreur. On distinguera donc l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ qui désigne un *nombre* de $F(x) = \displaystyle\int^x f(t)\ dt$ qui désigne l'expression d'une primitive F de f sur I, et donc une *fonction*.
Ces notations sont néanmoins cohérentes au sens où :

$$\int_a^x f(t)\ dt = F(x) - F(a)$$

est la valeur en x de l'unique primitive de f qui s'annule en a.

2.2 Propriétés

Proposition 2.2.1: Interversion des bornes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$. On a :

$$\boxed{\int_b^a f(t)\ dt = -\int_a^b f(t)\ dt.}$$

Proposition 2.2.2: Relation de Chasles

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b, c) \in I^3$. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^c f(t)\ dt + \int_c^b f(t)\ dt.}$$

Exercice 2.2.3

Calculer les intégrales

$$I = \int_1^0 \frac{1}{1+x^2}\ dx, \quad J = \int_{-3}^1 |x|\ dx \quad \text{et} \quad K = \int_{-1}^2 |x| + 3|x-1|\ dx.$$

3 Techniques de calcul

Nous présentons ici les principales méthodes pour calculer des intégrales lorsque les fonctions à intégrer n'entrent pas dans le cadre des primitives usuelles.

3.1 Intégration d'une fraction rationnelle

Les programmes de PCSI précisent qu'il est exigible de savoir déterminer une primitive d'une fraction rationnelle de la forme $f\ : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, le dénominateur ne s'annulant pas sur I.

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du dénominateur.

3.1.A. Premier cas : Fraction de la forme $\dfrac{1}{bx + c}$, avec $b \neq 0$.

Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{bx+c} = \frac{1}{b} \times \frac{b}{bx+c}$$

donc

$$\int^x f(t)\ dt = \frac{1}{b}\int^x \frac{b}{bt+c}\ dt = \frac{1}{b}\left[\ln|bt+c|\right]^x = \frac{1}{b}\ln|bx+c| + \text{constante}.$$

Exercice 3.1.1

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x+3}$ sur $\mathbb{R}_+$.

3.1.B. Deuxième cas : Fraction de la forme $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$, avec $a \neq 0$ et $\Delta > 0$.

Si $a \neq 0$ et $\Delta > 0$, le dénominateur admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. On a donc :

$$\forall x \in I, \quad ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

donc, pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{(x - r_1)(x - r_2)}.$$

On procède alors à une **décomposition en éléments simples** de cette dernière fraction, c'est-à-dire que l'on détermine α et β réels tels que, pour tout $x \in I$, on a :

$$\frac{1}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{\alpha}{x - r_1} + \frac{\beta}{x - r_2}.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} \int^x f(t)\ dt &= \frac{1}{a} \int^x \frac{1}{(t - r_1)(t - r_2)}\ dt \\ &= \frac{1}{a} \int^x \frac{\alpha}{t - r_1} + \frac{\beta}{t - r_2}\ dt \\ &= \frac{1}{a} \left(\alpha \ln |x - r_1| + \beta \ln |x - r_2| \right) \end{aligned}$$

Exercice 3.1.2

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2 - 8}$ sur $[-1, 1]$.

3.1.C. Deuxième cas : Fraction de la forme $\frac{1}{ax^2+bx+c}$, avec $a \neq 0$ et $\Delta = 0$.

Si $a \neq 0$ et $\Delta = 0$, le dénominateur admet une racine réelle double r_0. On a donc :

$$\forall x \in I, \quad ax^2 + bx + c = a(x - r_0)^2$$

donc, pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{(x - r_0)^2}$$

et alors :

$$\int^x f(t)\ dt = \frac{1}{a} \int^x \frac{1}{(t - r_0)^2}\ dt = -\frac{1}{a} \times \frac{1}{x - r_0} = -\frac{1}{a(x - r_0)}.$$

Exercice 3.1.3

Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{3x^2 - 6x + 3}$ sur $]-1, 1[$.

3.2 Intégration par parties

Les deux techniques suivantes reposent sur l'intégration de certaines fonctions dérivées ; il faut donc s'assurer que ces fonctions dérivées soient continues avant de les intégrer, ce qui nous amène à poser la définition suivante.

Définition 3.2.1: Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I, ou **continûment dérivable** sur I si :

1. f est dérivable sur I ;
2. f' est continue sur I.

On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Comme observé à la Remarque 1.2.2, la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées et il est donc vain d'espérer que l'intégrale d'un produit soit le produit des intégrales. Néanmoins, à l'aide de la formule $(uv)' = u'v + uv'$, il est possible d'intégrer certains produits à l'aide de l'*intégration par parties* :

Théorème 3.2.2: Intégration par parties (IPP)

Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ dt.}$$

Exercice 3.2.3

Déterminer

$$I_1 = \int_{-1}^2 2xe^{3x}\ dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-1}^2 (x^2+1)e^{3x}\ dx.$$

Remarque 3.2.4: Du choix des fonctions u' et v.

L'une des particularités de l'intégration par parties tient au fait que l'on a une infinité de choix pour les fonctions u' et v que l'on considère. Si ce choix est parfois naturel, il y a de nombreuses situations où c'est un choix nettement moins évident qui amène à la solution. Seule la pratique vous amènera à développer l'intuition nécessaire à ces choix. Un bon guide est cependant la croissance ou la décroissance en complexité des calculs au fil de l'IPP.

Exercice 3.2.5: Application à un calcul de primitive

Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.3 Changement de variable

Le changement de variables repose sur la formule de dérivation des fonctions composées. Son énoncé formel est le suivant :

Théorème 3.3.1: Changement de variable

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ et f continue sur $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

On dit qu'on a effectué le **changement de variable** $u = \varphi(t)$.

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ du = \varphi'(t)\ dt. \end{cases}$$

Démonstration. La preuve repose sur la formule de dérivation des fonctions composées. Nous y reviendrons dans le chapitre dédié à l'intégration au second semestre. □

Exercice 3.3.2

On pose

$$I = \int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}-1}\, dx.$$

1. En effectuant le changement de variable $t = e^x$, montrer que

$$I = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t^2-1}.$$

2. Déterminer a et b réels tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$

3. En déduire la valeur de I.

Méthode 3.3.3: Effectuer un changement de variable dans une intégrale

Pour effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$, on procède comme suit :

1. On détermine le nouvel **élément différentiel** $du = \varphi'(t)dt$,
   (a) On fait apparaître $\varphi'(t)\, dt$ dans l'intégrande,
   (b) on remplace $\varphi'(t)dt$ par du.
2. On change les **bornes d'intégration** : a « devient » $\varphi(a)$ et b « devient » $\varphi(b)$.
3. On effectue les **simplifications** éventuelles (remettre les bornes dans l'ordre croissant en changeant de signe, simplifications de fractions, etc.).
4. On **intègre** en u.

Remarque 3.3.4: Choix du changement de variable

Comme pour l'intégration par parties, l'une des difficultés consiste à effectuer le « bon » changement de variable, c'est-à-dire celui qui va simplifier la situation. Là aussi, rien ne remplace la pratique pour développer son intuition. Néanmoins, on pourra penser à poser $u = \varphi(t)$ quand on doit intégrer une fonction de la forme $f(\varphi(t))$ avec une fonction f classique (polynôme, fraction rationnelle, etc.) ou quand on observe clairement un élément différentiel de la forme $\varphi'(t)\, dt$.

Remarque 3.3.5: Une nécessaire hypothèse de bijectivité

En pratique, on souhaite souvent calculer $\displaystyle\int_c^d f(x)\, dx$ en posant $x = \varphi(t)$, ce qui nous amène à utiliser le changement de variable « à l'envers » en écrivant :

$$\int_c^d f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Pour ce faire, il est nécessaire de vérifier au préalable que φ est une fonction **dérivable et bijective** entre les intervalles considérés dans les deux intégrales.

Exercice 3.3.6

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$ en effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$.

A Primitives usuelles

Fonction $f : x \mapsto$	Primitive $F : x \mapsto$	Intervalle(s) de définition
$e^{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x) \rvert)$	$\{x \in D_u \mid u(x) \neq 0\}$
$u'(x)u^n(x) \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\dfrac{u^{n+1}(x)}{n+1}$	$\{x \in D_u \mid u(x) \neq 0\}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	D_u
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathrm{ch}(ax+b) \quad (a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{sh}(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(ax+b) \quad (a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\mathrm{ch}(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b) \quad (a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b) \quad (a, b \in \mathbb{R},\, a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln \lvert \cos(x) \rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1, 1[$

TABLE 1 – Primitives usuelles à connaître.