Chapitre 24 : Analyse asymptotique

PCSI – LGT Baimbridge

2021-2022

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de définir des relations permettant d'accélérer grandement les calculs de limites de suites. Ces relations ont été introduites par le mathématicien Edmund Landau[1] (1877-1938) dont une large partie des travaux a porté sur la théorie analytique des nombres. Ces relations sont d'une très grande efficacité pour lever les indéterminations dans les calculs de limites.

Notations

Dans tout ce chapitre, les fonctions sont définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et a désigne un élément adhérent à I, c'est-à-dire soit un élément de a, soit une borne de a (éventuellement infinie).

Dans tout ce chapitre, on dit qu'une fonction ne s'annule pas au voisinage d'un point $a \in I$, s'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant a tel que f ne s'annule pas sur $J \setminus \{a\}$.

Toutes les suites considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 La relation de négligeabilité

La relation de négligeabilité formalise l'idée qu'une fonction peut être infiniment plus petite qu'une autre au voisinage d'un point, ce qui permettra de lever des indéterminations liées à la somme, au produit ou au quotient de telles fonctions.

1. À ne pas confondre avec Lev Landau (1908-1968), physicien théoricien soviétique, prix Nobel de physique 1962 pour ses travaux sur l'état de la matière condensée.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1: Relation de négligeabilité

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que g ne s'annule pas au voisinage de a. On dit que f est **négligeable devant** g **au voisinage de** a si :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.}$$

On note alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)).}$$

On dit aussi que f **est un «petit o» de** g **au voisinage de** a.

Remarque 1.1.2: Interprétation de la relation de négligeabilité

Comme cela a été dit plus haut, dire qu'une fonction f est négligeable devant une fonction g au voisinage de a signifie que la première prend des valeurs infiniment plus petites que la seconde au voisinage de a.
On trouvera des illustrations aux Figures 2 et 3 qui aideront à comprendre ce que l'on entend par là.

Exercice 1.1.3

Démontrer les relations suivantes :

(a) $x^2 + 5x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$

(b) $x^3 + x^2 \underset{x\to0}{=} o(x)$

(c) $\sin(x) \underset{x\to0}{=} o(\cos(x))$

(d) $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2)$

(e) $\cos(x) - 1 \underset{x\to0}{=} o(x)$

(f) $(x-1)^2 \underset{x\to1}{=} o(x-1)$

Remarque 1.1.4

On observe que l'on a l'équivalence :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} o(1) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x) = 0.}$$

Remarque 1.1.5: Notations de Landau

La notation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est à lire comme «f est négligeable devant g au voisinage de a» mais surtout pas à interpréter comme une égalité au sens strict du terme. Par exemple, on a $x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$ et $x+1 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$ mais on n'a certainement pas $x = x+1$...
C'est pour éviter ce genre de raisonnements hâtifs qu'il est indispensable de préciser le voisinage du point sous le signe «=», nous rappelant ainsi qu'il ne s'agit pas d'une égalité classique.

Proposition 1.1.6

Soient α et β deux réels. On a

$$\boxed{x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta) \quad\Leftrightarrow\quad \alpha < \beta}$$

et

$$x^{\alpha} \underset{x\to 0}{=} o(x^{\beta}) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > \beta.$$

La Figure 1 ci-dessous illustrent l'inversion des cas au voisinage de 0 et au voisinage de l'infini.

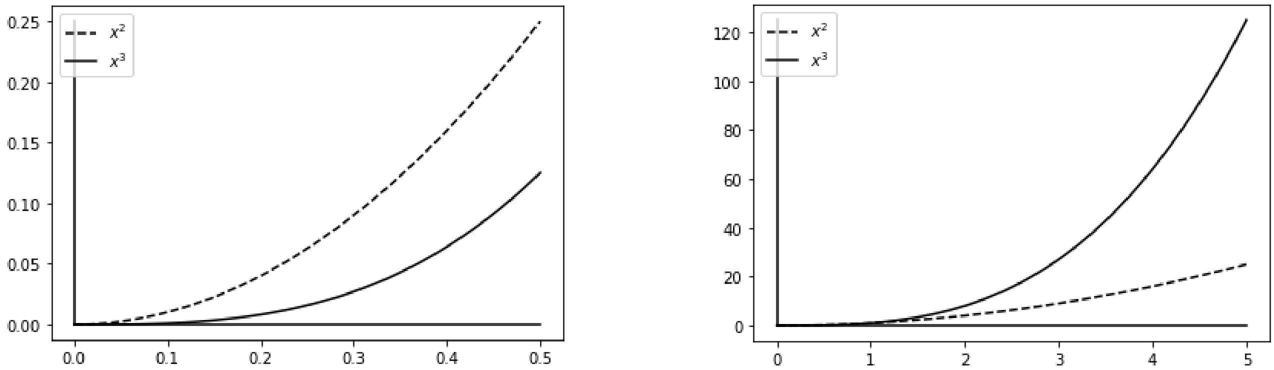

FIGURE 1 – Comparaison de x^2 et x^3 au voisinage de zéro (à gauche) et de l'infini (à droite).

1.2 Stabilité pour les opérations usuelles

Proposition 1.2.1

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g et h ne s'annulent pas au voisinage de a.

1. **Transitivité :**

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \\ g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)) \end{cases} \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

2. **Combinaisons linéaires :** Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)) \\ g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)) \end{cases} \Rightarrow \quad (\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

3. **Produit :**

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)h(x)).$$

Proposition 1.2.2

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de a.

1. **Valeur absolue :**

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \underset{x\to a}{=} o(|g(x)|)$$

2. **Puissances :** Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x)^\alpha \underset{x\to a}{=} o(g(x)^\alpha)}$$

Si en outre f et g sont à valeurs positives, alors cette relation est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque 1.2.3: Avec les notations de Landau

Avec les notations de Landau, on peut ainsi écrire des choses assez surprenantes en première approche, mais très confortables en pratique. Par exemple

$$\begin{cases} x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3) \\ x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x + x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3).$$

se traduit en une identité de la forme

$$o(x^3) + o(x^3) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^3)$$

qui ne fait que signifier que la somme de deux fonctions négligeables devant x^3 au voisinage de l'infini est une fonction négligeable devant x^3.
De la même manière, si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(x^\alpha)$, alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, la règle du produit assure que $x^\beta f(x) \underset{x\to a}{=} o(x^{\alpha+\beta})$.
Avec les notations de Landau, ceci peut se réécrire :

$$x^\alpha \times o(x^\beta) \underset{x\to a}{=} o(x^{\alpha+\beta}).$$

Enfin, on notera que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ si et seulement si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(\lambda g(x))$, ce qui se traduit en :

$$o(g(x)) \underset{x\to a}{=} o(\lambda g(x))$$

de sorte qu'il est toujours possible de «normaliser» le terme à l'intérieur du o.

1.3 Application au calcul de limites

Proposition 1.3.1

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que g ne s'annule pas au voisinage de a. Alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} g(x).}$$

Exercice 1.3.2

Montrer que $x^3 - 5\sin(x) + 3\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^4)$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} 5x^4 + x^3 - \sin(x) + 3\ln(x)$.

Il est possible de ré-énoncer le théorème des croissances comparées à l'aide de la relation de négligebilité.

Théorème 1.3.3: Croissances comparées en $+\infty$

Soit α, β et γ des réels strictement positifs. Alors

$$\boxed{\ln(x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)}$$

et

$$\boxed{x^{\beta} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x}).}$$

La Figure 2 ci-dessous illustre le résultat précédent.

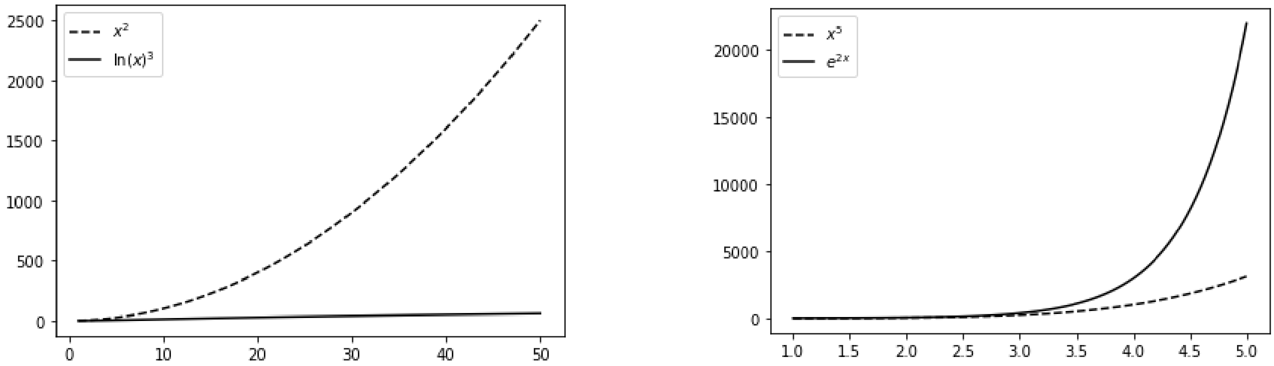

FIGURE 2 – Croissances comparées en $+\infty$.

Exercice 1.3.4

Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} -3x^4 + 5e^{3x} + 7x - \ln(x)^{37}.$$

Théorème 1.3.5: Croissances comparées en 0

Soit α et β des réels strictement positifs. Alors

$$\boxed{\ln(x)^{\alpha} \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right).}$$

La Figure 3 ci-dessous illustre le résultat précédent.

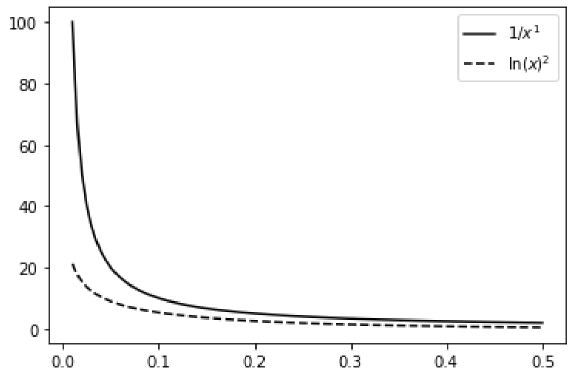

FIGURE 3 – Croissances comparées en 0.

2 La relation d'équivalence

La relation de domination précédente a surtout permis de réénoncer des résultats connus dans un nouveau formalisme. C'est la relation d'**équivalence** qui va réellement permettre de gagner en efficacité pour le calcul de limites. Intuitivement, deux fonctions sont équivalentes au voisinage d'un point si elles se comportent «de la même manière» au sens où leur différence est négligeable devant l'ordre de grandeur de la fonction elle-même.

2.1 Généralités

Définition 2.1.1: La relation d'équivalence

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. On dit que f et g sont *équivalentes* au voisinage de a si :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.}$$

On note alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).}$$

Remarque 2.1.2: Interprétation de la relation d'équivalence

Si f et g sont équivalentes en a, il y a essentiellement les cas suivants :

— Si l'une admet une limite finie non nulle en a, alors l'autre convergera vers la même limite ;

— Si l'une tend vers l'infini ou vers 0 en a, alors l'autre en fera de même et le fera «à la même vitesse» ;

— Si l'une n'admet pas de limite en a, alors l'autre non plus mais elle «divergera de la même façon».

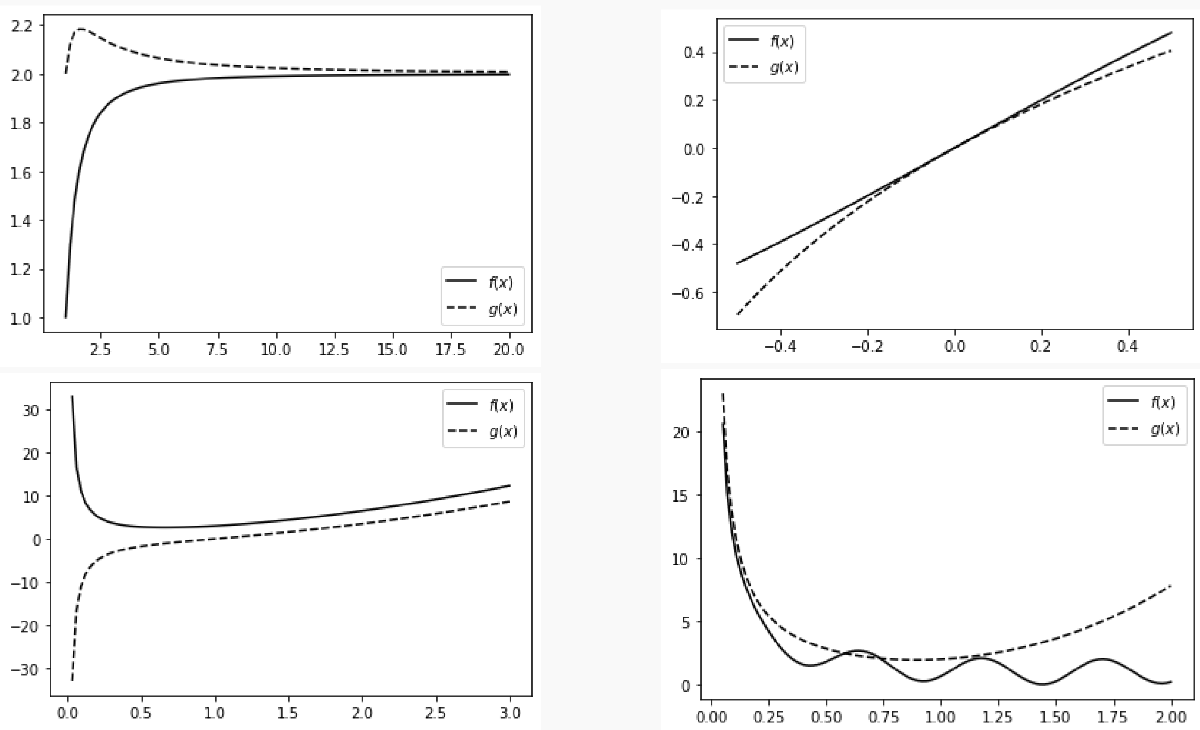

FIGURE 4 – À gauche : fonctions équivalentes en l'infini. À droite : fonctions équivalentes en 0.

Exercice 2.1.3

Démontrer les relations d'équivalence suivantes :

(a) $3x^5 - 5x^2 - x \underset{x\to+\infty}{\sim} 3x^5$ **(c)** $e^x - x^2 + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ **(e)** $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(b) $3x^5 - 5x^2 - x \underset{x\to 0}{\sim} -x$ **(d)** $\frac{1}{x} - \ln(x)^2 + 3 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$ **(f)** $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$

Proposition 2.1.4

Pour tout réel ℓ **non nul**, on a :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell.}$$

Remarque 2.1.5

Aucune fonction ne peut être équivalente à la fonction nulle.

Proposition 2.1.6

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. Alors sont équivalentes :

(i) $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$;

(ii) $f(x) = g(x) + g(x)\epsilon(x)$, avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$;

(iii) $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$.

Corollaire 2.1.7

Si f est dérivable en a est telle que $f'(a) \neq 0$, alors :

$$\boxed{f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a).}$$

Nous déduisons du corollaire précédent un certain nombre **d'équivalents classiques à connaître** :

Proposition 2.1.8: Équivalents classiques en 0

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x,}$$

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x,}$$

$$\boxed{e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x,}$$

et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$$

Théorème 2.1.9: Équivalents par encadrement

Soient f, g, h telles que, sur un voisinage de a, la fonction f ne s'annule pas et on a :

$$f \leq g \leq h.$$

Alors :

$$\boxed{h(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x).}$$

Exercice 2.1.10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\sin(x) \leq f(x) \leq e^x - 1.$$

Déterminer un équivalent de f en 0.

Proposition 2.1.11

Soient f, g deux fonctions équivalentes et qui ne s'annulent pas au voisinage de a. Alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

Exemple 2.1.12

Déterminer le signe de $x^2 - 3\ln(1 + x^3)$ au voisinage de 0.

2.2 Stabilité pour les opérations usuelles

Proposition 2.2.1

Soient $f, g, h, j : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g et h ne s'annulent pas au voisinage de a.

1. **Transitivité :**

$$\boxed{\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).}$$

2. **Produit :**

$$\boxed{\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ j(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \times j(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \times h(x).}$$

3. **Valeur absolue :**

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|}$$

4. **Puissances :** Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$$

Si en outre f et g sont à valeurs positives, alors cette relation est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque 2.2.2: Sommes d'équivalents

La relation d'équivalence n'est pas compatible avec la somme. Par exemple, si on considère

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1, \quad g(x) = \frac{2}{x} - 1,$$

alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ mais $f(x) + 1 = \frac{1}{x}$ n'est pas équivalent à $g(x) + 1 = \frac{2}{x}$ en l'infini.
En particulier, on retiendra que l'**on ne somme jamais des équivalents**. Nous verrons comment lever cette difficulté à l'aide de *développements limités* dans un chapitre ultérieur.

Méthode 2.2.3: Contourner la difficulté

Même si aucun théorème ne permet de sommer des équivalents en général, il est souvent possible de conclure en conjecturant que l'équivalent de la somme est la somme des équivalents, puis en le vérifiant à l'aide d'un quotient. Par exemple,

$$\sin(x) + \ln(1 + x) \underset{x\to0}{\sim} 2x$$

car

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(x) + \ln(1 + x)}{2x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{2x} + \frac{\ln(1 + x)}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Néanmoins, cette méthode ne fonctionne pas toujours, comme on s'en convaincra en cherchant un équivalent de $\sin(x) - \ln(1 + x)$ en 0. Pour ce genre de situation, il nous faudra recourir à des développements limités.

Proposition 2.2.4: Compatibilité avec la relation de domination

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g et h ne s'annulent pas au voisinage de a.

1.

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

2.

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x)).$$

2.3 Application au calcul de limites

Les équivalents sont particulièrement utiles pour lever des **formes indéterminées** car ils donnent des informations sur la «dynamique» d'une fonction au voisinage du point étudié. Ainsi, dans le cas où f admet une une limite nulle ou une limite infinie en a, un équivalent de f en a indique la façon dont f s'approche de cette limite.

En pratique, cela se traduit par les résultats suivants :

Proposition 2.3.1

Soient f et g deux fonctions équivalentes au voisinage de a. Supposons que f admet une limite (finie ou non) en a. Alors g admet la même limite.

Exercice 2.3.2

Déterminer des équivalents simples et les limites des fonctions suivantes au point indiqué :

(a) $3x^5 - 5x^2 - x$ en $+\infty$,

(b) $3x^5 - 5x^2 - x$ en 0,

(c) $3x^5 - 5x^2 - x$ en 1,

(d) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0,

(e) $\ln(x) - \sqrt{x}$ en $+\infty$

(f) $(x+1)\ln(x)$ en 0.

Proposition 2.3.3: Cas particulier des polynômes

— En $\pm\infty$, un polynôme est équivalent à son monôme de plus haut degré,

— En 0, un polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré.

Les équivalents passant aux produits, au quotient et aux puissances, on en déduit la méthode suivante pour déterminer des équivalents simples et lever des indéterminations :

Méthode 2.3.4: Déterminer un équivalent simple d'une expression

Pour déterminer un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage d'un point a, on procède comme suit :

1. On factorise $f(x)$ (s'il s'agit d'une fraction, on factorise numérateur et dénominateur) autant que possible.
2. On détermine un équivalent de chaque facteur comme suit :
   (a) On identifie dans le facteur le terme qui semble dominer au voisinage de a,
   (b) On vérifie que c'est un équivalent simple du facteur en s'assurant que le quotient tend bien vers 1 en a,
   (c) On a ainsi un équivalent du facteur.
3. L'équivalent final est le produit/quotient des équivalents trouvés pour chacun des facteurs.

Exercice 2.3.5

Déterminer des équivalents simples et les limites des fonctions suivantes au point indiqué :

(a) $\dfrac{5x^4 - 2x^2 + x}{x^4 - 4x^3 + x}$ en $+\infty$,

(b) $\dfrac{5x^4 - 2x^2 + x}{x^4 - 4x^3 + x}$ en 0,

(c) $\dfrac{5x^4 - 2x^2 + x}{x^4 - 4x^3 + x}$ en 1,

(d) $\dfrac{e^{3x} + 2^x + \ln(x)}{5^x - 3^{2x} + x^5}$ en $+\infty$,

(e) $\dfrac{3x^2 + e^x - 1}{x + \sin^2(x)}$ en 0,

(f) $(\sin(x) + x)(\ln(1+3x))$ en 0.

3 La relation de domination

La relation de domination est légèrement moins mobilisée que les deux précédentes en analyse théorique mais elle joue un rôle important en analyse numérique et en informatique théorique. Nous reviendrons plus longuement sur cette relation dans le cours d'informatique mais nous donnons ici quelques éléments-clés afin de se l'approprier :

Définition 3.0.1: La relation de domination

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. On dit que f est dominée par g au voisinage de a si

$$\boxed{\frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a.}$$

On note alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)).}$$

Remarque 3.0.2: Interprétation de la relation de domination

Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$, alors il existe $C > 0$ tel que, sur un voisinage de a, on a :

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|\,.$$

Intuitivement, ceci signifie que l'ordre de gradeur de f au voisinage de a est borné par celui de g.

Proposition 3.0.3

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas au voisinage de a. Si $\left(\frac{f}{g}\right)$ admet une limite finie en a, alors f est dominée par g au voisinage de a.
En particulier, on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)) \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$$

et

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$$

mais les réciproques sont fausses.

Exercice 3.0.4

Établir les relations ($\sim$, o ou O) entre les fonctions f et g au voisinage des points indiqués.

(a) $2x^3 + x^2 - x$ et x^3 au voisinage de $+\infty$,

(b) $2x^3 + x^2 - x$ et x^4 au voisinage de $+\infty$,

(c) e^x et e^{x+1} au voisinage de $+\infty$,

(d) $\ln(x)$ et $\ln(x^2)$ au voisinage de $+\infty$,

(e) x et $\sin(2x)$ au voisinage de 0,

(f) $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ et $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

4 Adaptation aux suites réelles

On adapte tous les résultats précédents au cas des suites réelles en $+\infty$ remplaçant les fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de a par des suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang. On dispose en particulier des définitions et résultats suivants :

Définition 4.0.1

Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles telles que v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

1.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.}$$

2.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.}$$

3.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0} \text{ est bornée.}}$$

Toutes les règles de calcul sur ces relations vues sur les fonctions sont encore valables pour les suites.
On peut en outre compléter le théorème des croissances comparées en l'infini à l'aide du résultat suivant :

Théorème 4.0.2

Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{e^{\gamma n} = o(n!).}$$

Exemple 4.0.3

Le tableau ci-dessous aidera à se donner des ordres de grandeur :

n	$\ln(n) \approx$	$n^2 \approx$	$e^n \approx$	$n! \approx$
1	0	1.000	2.718	1.000
2	0.693	4.000	7.389	2.000
3	1.099	9.000	2.009×10^1	6.000
4	1.386	1.600×10^1	5.460×10^1	2.400×10^1
5	1.609	2.500×10^1	1.484×10^2	1.200×10^2
6	1.792	3.600×10^1	4.034×10^2	7.200×10^2
7	1.946	4.900×10^1	1.097×10^3	5.040×10^3
8	2.079	6.400×10^1	2.981×10^3	4.032×10^4
9	2.197	8.100×10^1	8.103×10^3	3.629×10^5
10	2.303	1.000×10^2	2.203×10^4	3.629×10^6
11	2.398	1.210×10^2	5.987×10^4	3.992×10^7
12	2.485	1.440×10^2	1.628×10^5	4.790×10^8
13	2.565	1.690×10^2	4.424×10^5	6.227×10^9
14	2.639	1.960×10^2	1.203×10^6	8.718×10^{10}
15	2.708	2.250×10^2	3.269×10^6	1.308×10^{12}
16	2.773	2.560×10^2	8.886×10^6	2.092×10^{13}
17	2.833	2.890×10^2	2.415×10^7	3.557×10^{14}
18	2.890	3.240×10^2	6.566×10^7	6.402×10^{15}
19	2.944	3.610×10^2	1.785×10^8	1.216×10^{17}
20	2.996	4.000×10^2	4.852×10^8	2.433×10^{18}
50	3.912	2.500×10^3	5.185×10^{21}	3.041×10^{64}
100	4.605	1.000×10^4	2.688×10^{43}	9.333×10^{157}

Et tant qu'à parler d'ordre de grandeur, on estime que le nombre d'atomes dans l'univers connu est de l'ordre de 10^{79}, ce qui est l'ordre de grandeur de e^{182} et de 59! uniquement... On comprendra donc le mal que l'on peut avoir à se représenter concrètement les valeurs qui prennent ces suites quand n tend lui-même vers l'infini. Mais on comprend en tout cas que ces valeurs vont dominer tous les termes polynomiaux.

Exercice 4.0.4

Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \frac{(\ln n)^2 + \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}{(-1)^n + n! - n^3}$$

Remarque 4.0.5: Quelques équivalents classiques (hors-programme)

Au-delà du simple calcul de limites, les équivalents sont très utiles pour donner une idée du comportement général d'une suite au long cours. Parmi les exemples célèbres, on peut citer :

— La *formule de Stirling* vient préciser le comportement de $n!$ quand n tend vers l'infini. On peut en effet montrer (avec des outils de seconde année) que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

— La somme des inverses des nombres entiers, appelée *série harmonique*, diverge de manière logarithmique au sens où :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n),$$

résultat que nous démontrerons en TD.

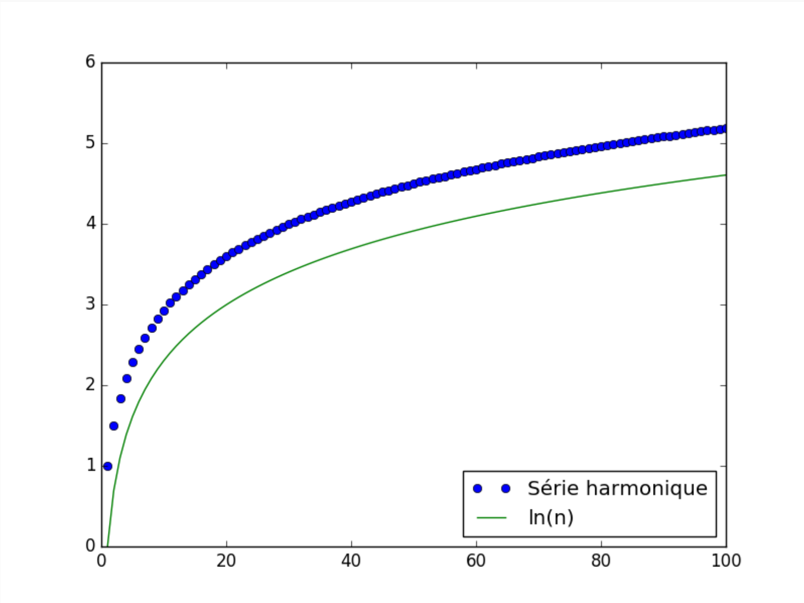

Figure 5 – 100 premiers termes de la série harmonique.

— En 1792, Gauss démontra le *théorème des nombres premiers* qui stipule que le nombre $\pi(n)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à l'entier n vérifie :

$$\pi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}.$$

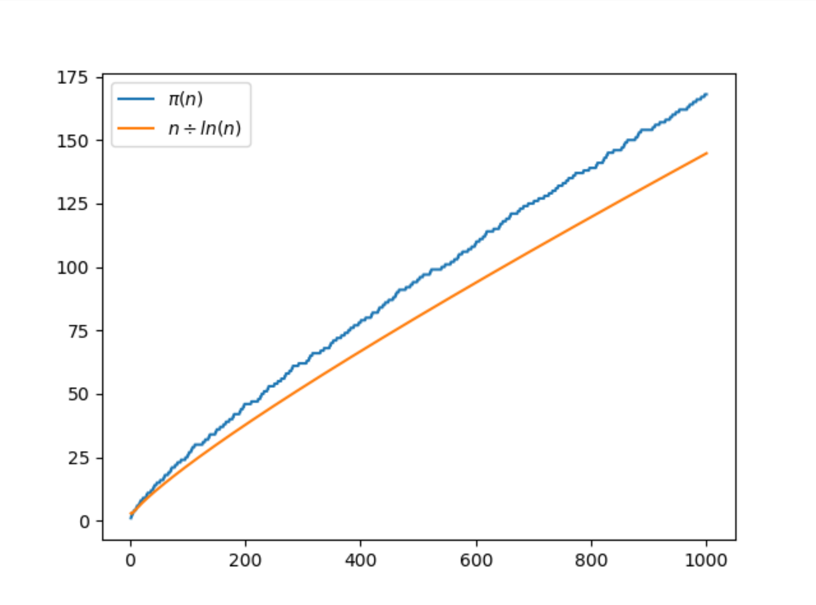

FIGURE 6 – Répartition des nombres premiers inférieurs ou égaux à 1000.