Chapitre 27 : Développements limités

PCSI – LGT Baimbridge

2021-2022

Table des matières

Introduction

Une question récurrente en mathématiques est celle de l'approximation de fonctions très générales par des fonctions particulièrement régulières et plus faciles à manipuler. Typiquement, pour une fonction f dérivable en un point a, l'équation de la tangente en a permet d'obtenir localement une approximation de f par une fonction affine. Autrement dit, au voisinage de a, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, ce qui en posant $h = x - a$ se réécrit :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)\cdot h + o(h).$$

Cette identité est appelée *développement limité à l'ordre 1* de f en a.

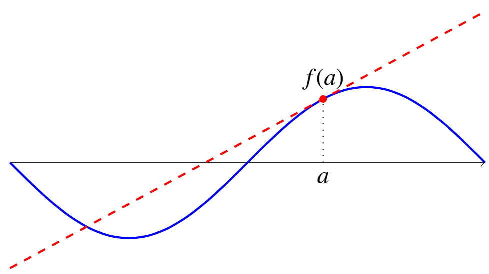


Figure 1 – Développement limité à l'ordre 1 de la fonction sinus en a.

Néanmoins, dès que l'on s'écarte de a, la courbe Γ_f s'éloigne de la tangente et cet éloignement sera d'autant plus important que les variations de la pente de Γ_f sont importantes. Une idée naturelle consiste alors à ajouter un terme de degré 2 qui apportera la courbure nécessaire pour prendre en compte les variations de f' autour de a, c'est-à-dire la valeur de $f''(a)$, pour améliorer la qualité de cette approximation. On obtient alors un *développement limité à l'ordre 2* de f en a.

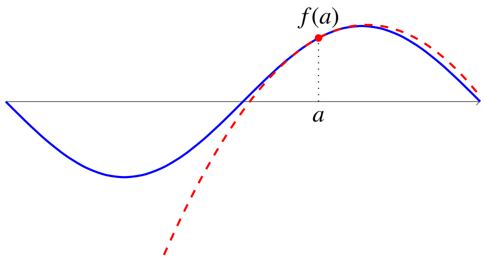


FIGURE 2 – Développement limité à l'ordre 2 de la fonction sinus en a.

La courbure variant elle-même, et ces variations étant encodées dans $f^{(3)}$, nous pouvons ensuite ajouter un terme de degré 3 pour compenser ces variations. Et en continuant ce processus avec les dérivées successives de f en a, nous allons pouvoir affiner de plus en plus notre approximation polynomiale.

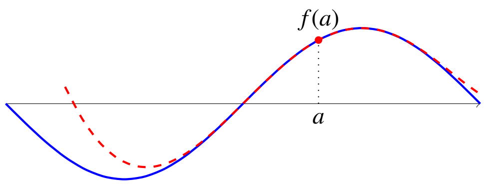


FIGURE 3 – Développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus en a.

L'un des intérêts de ces approximations polynomiales locales est qu'elles permettent de lever les indéterminations dans les calculs de limites en remplaçant les fonctions par des polynômes pour lesquels les limites sont beaucoup plus simples à calculer.

L'objectif de ce chapitre est de définir formellement ce que l'on entend par «une approximation polynomiale d'une fonction» et plus précisément par «un développement limité à l'ordre n». Nous verrons ensuite une formule générale et des méthodes de calcul pour déterminer les développements limités avant de les appliquer au calcul de limites et à l'étude locale de fonctions.

Notations

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel et les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Développements limités en 0

Notations

Dans cette section, sauf mention explicite, les fonctions sont définies sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $I \cup \{0\}$ est un **intervalle** d'intérieur non vide.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre n en 0**, noté $\mathrm{DL}_n(0)$, s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)}$$

Dans un tel développement limité, la fonction polynomiale $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelé **partie régulière** du développement limité et $o(x^n)$ est appelé **reste** du développement limité.

Exemple 1.1.2

1. Un développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable en 0 est

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Par exemple,

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x).}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un développement limité à l'ordre n de $\dfrac{1}{1-x}$ en 0 est

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).}$$

En effet, on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

et donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \times \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}.$$

Exercice 1.1.3

Déterminer un $\mathrm{DL}_1(0)$ de $f(x) = \mathrm{Arctan}(1-x)$.

Proposition 1.1.4: Unicité du $\mathrm{DL}_n(0)$

Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

Alors $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$.
Autrement dit, s'il existe un $\mathrm{DL}_n(0)$, alors il est unique.

1.2 Propriétés

Proposition 1.2.1: Lien avec la parité

Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

(i) Si f est **paire**, alors P ne possède que des termes de degrés **pairs**,

(ii) Si f est **impaire**, alors P ne possède que des termes de degrés **impairs**.

1.3 Troncature d'un développement limité

Au voisinage de 0, une fonction négligeable devant x^{n+1} est négligeable devant x^n. Ainsi, un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ d'une fonction f donne des informations plus précises qu'un $\mathrm{DL}_n(0)$. De ce fait, il est facile de former un développement limité d'ordre n si on possède un développement à un ordre supérieur. C'est ce que formalise la proposition suivante.

Proposition/Définition 1.3.1: Troncature d'un développement limité

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m > n$. Supposons que f admet un $\mathrm{DL}_m(0)$ de la forme

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + o(x^m),$$

alors

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

est un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.
La partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ est appelée **troncature à l'ordre** n de celle du $\mathrm{DL}_m(0)$.

Méthode 1.3.2: Réduire l'ordre d'un développement limité

Si $m > n$, pour passer d'un $\mathrm{DL}_m(0)$ à un $\mathrm{DL}_n(0)$, il suffit de ne conserver que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le $\mathrm{DL}_m(0)$ et de modifier l'ordre du reste.

Exercice 1.3.3

Déterminer des développements limités aux ordres 1, 2, 3 et 4 de

$$f(x) = x - x^3 + 2x^4 + x^5 \sin(x).$$

1.4 Continuité et dérivabilité

Nous avons pour l'instant étudié des propriétés des développements limités sous réserve d'existence. Nous allons maintenant établir des conditions pour l'existence de tels développements limités et donner une formule très générale permettant d'en former.

1.4.A. Continuité et dérivabilité

Proposition 1.4.1: Développement limité à l'ordre 0 en 0

Une fonction f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$ si et seulement si elle admet une limite finie en 0.
Dans ce cas, en posant $\ell = \lim\limits_{0} f$, un $\mathrm{DL}_0(0)$ de f est :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \ell + o(1).}$$

En particulier, si f est définie en 0, alors f est **continue** en 0 si et seulement si elle admet pour $\mathrm{DL}_0(0)$:

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + o(1).}$$

Proposition 1.4.2: Développement limité à l'ordre 1 en 0

Supposons que f est définie en 0. Alors f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$ si et seulement si f est dérivable en 0.
Dans ce cas, un $\mathrm{DL}_1(0)$ de f est :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).}$$

1.5 La formule de Taylor-Young en 0

Point historique: Brook Taylor (1685-1731)

Mathématicien britannique, né à Edmonton (Middlesex) en 1685 et décédé à Londres en 1731. Ses contributions se sont principalement situées en calcul différentiel. Ses travaux sur les sommes de dérivées successives donnèrent naissance à plusieurs formules fondamentales qui portent aujourd'hui son nom.

Point historique: William Henry Young (1863-1942)

Mathématicien britannique né à Londres et décédé à Lausanne. Ses études ont principalement porté sur la théorie de la mesure, les intégrales de Lebesgue, les séries de Fourier et le calcul différentiel. C'est à lui que l'on doit la version de la formule de Taylor présentée dans ce chapitre.

Si f est continue en 0, son $\mathrm{DL}_0(0)$ est simplement l'approximation de f au voisinage de 0 par une fonction constante. Cette approximation est de piètre qualité dès que les variations de f sont importantes, on obtient donc une meilleure approximation locale de f en tenant compte de la dérivée f', ce que fait le $\mathrm{DL}_1(0)$ quand f est dérivable. Alors, en reprenant l'idée développée dans l'introduction du chapitre, nous pouvons continuer à améliorer la qualité de l'approximation en allant chercher les dérivées successives. Ceci se formalise à l'aide du théorème suivant :

Théorème 1.5.1: Formule de Taylor-Young en 0

Soit I un intervalle d'intérieur non-vide contenant 0 et soit f une fonction de classe C^n sur I. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ qui s'écrit :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).}$$

Remarque 1.5.2

Très informellement, si f est de classe C^2 au voisinage de 0, le $\mathrm{DL}_2(0)$ peut se lire comme :

$$\boxed{f(x) = \text{équation de la tangente en } 0 + \text{ correction de courbure } + \text{ reste négligeable devant } x^2.}$$

Ainsi, si on trace sur un même graphique, les DL successifs, on voit la précision de l'approximation polynomiale augmenter localement autour de 0 :

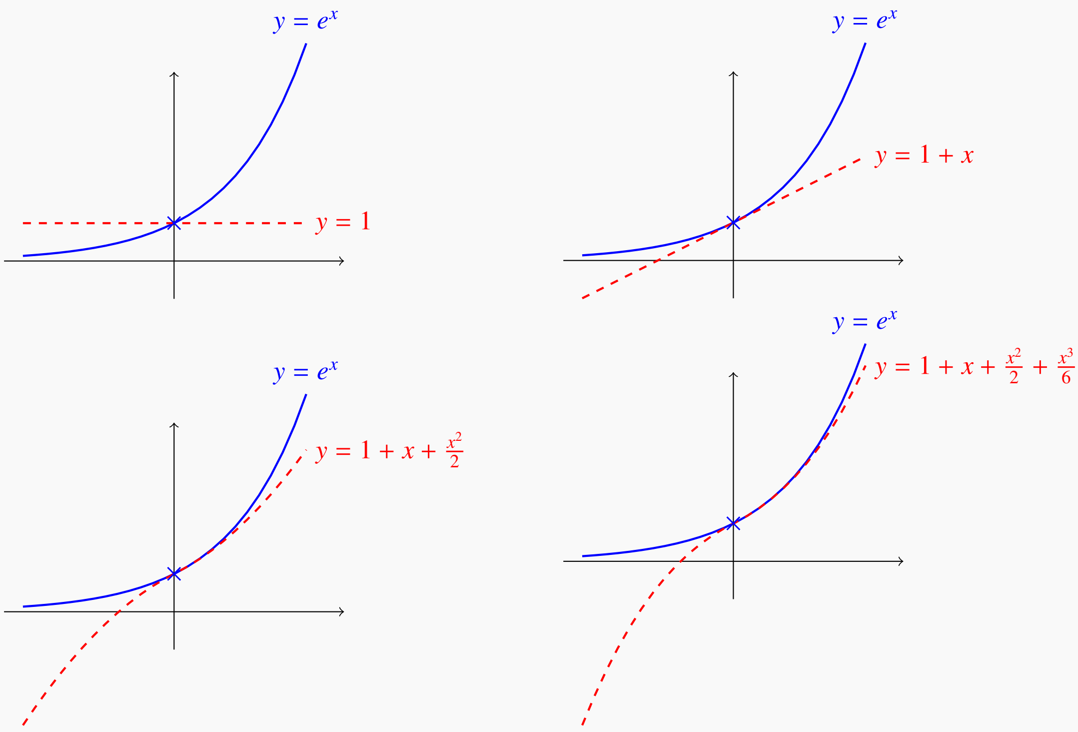


Figure 4 – Développements limités successifs de la fonction exponentielle en 0.

Exemple 1.5.3

La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ en 0 donc elle admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\exp^{(k)} = \exp$ donc $\exp^{(k)}(0) = 1$ et, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre n, on a

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Explicitement,

$$\boxed{e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).}$$

Exemple 1.5.4

La fonction cosinus est de classe C^∞ en 0 donc elle admet un développement limité à n'importe quel ordre. Par ailleurs, puisque le cosinus est pair, la partie régulière du développement limité ne contient que des termes de degrés pairs. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(2k)} = (-1)^k \cos$ donc $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$ et d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre $2n$, on a

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$$

Explicitement,

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

En outre, puisque $\cos^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1}\sin(0) = 0$, on peut utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre $2n+1$ et on obtient

$$\boxed{\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).}$$

Remarque 1.5.5

La Table 1 page 19 regroupe les développements limités en 0 des fonctions usuelles. Si la formule de Taylor-Young permet de tous les retrouver, il est indispensable de les connaître par cœur, sans quoi vous ne penserez pas à les mobiliser ou perdrez trop de temps en le faisant.

1.6 Application aux équivalents

Supposons que f admette un $\mathrm{DL}_n(0)$

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Si tous les a_k sont nuls, on ne peut pas déduire d'équivalent directement de ce développement limité, cela signifie qu'il faut aller calculer un développement limité d'ordre supérieur.

Sinon, on pose $p = \min\{k \in [\![0,n]\!] \mid a_k \neq 0\}$. On a alors $f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et, en factorisant par x^p, on peut réécrire le $\mathrm{DL}_n(0)$ sous la forme

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p\left(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + o(x^{n-p})\right),}$$

avec $a_p \neq 0$. On dit que le $\mathrm{DL}_n(0)$ est sous **forme normalisée**.

Proposition 1.6.1: Équivalents et développements limités

Soit f une fonction admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de partie régulière non nulle dont la forme normalisée est

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p\left(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + o(x^{n-p})\right).$$

Alors

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p.}$$

Méthode 1.6.2: Déterminer un équivalent en 0 à partir d'un $\mathrm{DL}_n(0)$

Pour déterminer un équivalent à partir d'un développement limité, il suffit de conserver le terme non nul de plus petit degré dans la partie régulière.

Exemple 1.6.3

Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ à l'aide d'un développement limité en 0.

Un $\mathrm{DL}_2(0)$ de e^x est $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et donc un $\mathrm{DL}_2(0)$ du numérateur est :

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x^2\left(\frac{1}{2} + o(1)\right).$$

Alors, $e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et donc

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

1.7 Opérations sur les développements limités

Un des avantages des développements limités par rapport aux équivalents est qu'il est possible de faire de très nombreuses opérations avec. En particulier, nous allons montrer que, contrairement aux équivalents, il est possible de sommer et de composer des développements limités ce qui va permettre de lever les indéterminations auxquelles nous sommes parfois confrontés dans les calculs de limites.

1.7.A. Développements limités et primitives

Proposition 1.7.1: Intégration terme à terme

Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

Alors toute primitive F de f sur I admet pour $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$:

$$\boxed{F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1}).}$$

Exemple 1.7.2

Considérons la fonction $F : x \mapsto \ln(1-x)$. Alors c'est sur $]-1,1[$ la primitive de $-f$ où $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Nous avons déjà vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f est :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

donc un DL_{n+1} de $\ln(1-x)$ est

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

et donc, en remplaçant x par $(-x)$ dans cette expression, on a

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Remarque 1.7.3: Ne pas dériver un développement limité

On ne peut pas dériver un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f pour obtenir un $\mathrm{DL}_{n-1}(0)$ de f'. Par exemple, si on considère

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ est un $\mathrm{DL}_1(0)$ de f donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Pour autant, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \underbrace{3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\text{pas de limite en } 0}$$

donc f' n'a pas de limite en 0 et ne peut donc pas admettre de $\mathrm{DL}_0(0)$.

1.7.B. Combinaisons linéaires de développements limités

Proposition 1.7.4

Soient f et g deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ des parties régulières respectives P et Q. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est $\lambda P + \mu Q$.

Méthode 1.7.5: Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une combinaison linéaire

Pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une combinaison linéaire de fonctions, on procède comme suit :

1. On détermine un $\mathrm{DL}_n(0)$ de chacune des deux fonctions (en prenant garde à faire tous les développements limités au même ordre n),
2. On additionne les parties régulières,
3. On fusionne les restes.

Exemple 1.7.6

Déterminons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\mathrm{ch}(x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$.
On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

donc

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

et

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Plus généralement, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).}$$

1.7.C. Produits de développements limités

Proposition 1.7.7

Soient f et g deux fonctions admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ des parties régulières respectives P et Q. Alors fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue par troncature du produit PQ à l'ordre n.

Méthode 1.7.8: Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ d'un produit

Si f et g admettent un $\mathrm{DL}_n(0)$, pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de fg :

1. On calcule le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et de g ;
2. On fait le produit des parties régulières de ces $\mathrm{DL}_n(0)$;
3. On ne conserve que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 1.7.9

Déterminons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin(x)\cos(x)$. On a

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Alors

$$\begin{aligned}\sin(x)\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \underbrace{\frac{x^5}{12} + o(x^3)}_{\underset{x\to 0}{=} o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).\end{aligned}$$

1.7.D. Compositions de développements limités

Principe général

Proposition 1.7.10: $\mathrm{DL}_n(0)$ d'une composition

Soient f et g admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ telles que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Posons

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$

avec P, Q les parties régulières des $\mathrm{DL}_n(0)$.
Alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est obtenue par troncature à l'ordre n de $Q \circ P$.

Démonstration. La preuve n'est pas exigible dans le cadre des programmes de PCSI. □

Exemple 1.7.11

Déterminons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $e^{\sin(x)}$.
On écrit

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

Puisque $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on peut poser $u = \sin(x)$ et alors

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 \underbrace{- \frac{2x^4}{3} + \frac{x^6}{9}}_{\underset{x\to 0}{=} o(x^3)}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 \underbrace{- x^5 + \frac{x^7}{3} - \frac{x^9}{27}}_{\underset{x\to 0}{=} o(x^3)}\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 1.7.12

Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $e^{\cos(x)}$.

Application aux quotients Il n'y a pas de théorème général pour calculer un quotient de développements limités mais une méthode consiste à se ramener à une composée à l'aide de

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n).$$

Exemple 1.7.13

Déterminons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{\cos(x)}$. Pour se ramener au $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-u}$, on écrit

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - (1 - \cos(x))}$$

et, puisque $u = 1 - \cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on peut procéder à la composition des développements limités :

$$1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$$

donc, en composant

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 1.7.14

Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\tan(x)$.

2 Développements limités en un réel a

Nous allons maintenant définir la notion de développement limité en n'importe quel réel a en nous ramenant par translation à un développement limité en 0.

Notations

Dans cette section a désigne un réel et, sauf mention explicite, les fonctions de cette section sont définies sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $I \cup \{a\}$ est un **intervalle** d'intérieur non vide.

2.1 Généralités

Définition 2.1.1: Développement limité à l'ordre n en a

On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n **en** a, noté $\mathrm{DL}_n(a)$, si $g : h \mapsto f(a+h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. Autrement dit, f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ si et seulement si il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que, pour tout h tel que $a + h \in I$,

$$\boxed{f(a+h) \underset{h \to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n).}$$

Dans un tel développement limité, la fonction polynomiale $h \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k h^k$ est appelé **partie régulière** du développement limité.

Exemple 2.1.2

Déterminons un $\mathrm{DL}_n(1)$ de $\frac{1}{x}$. On pose $h = x - 1$ de sorte que

$$f(x) = f(1+h) = \frac{1}{1+h}.$$

Mais alors, un $\mathrm{DL}_n(1)$ de f est

$$f(1+h) \underset{h \to 0}{=} \frac{1}{1+h} = \frac{1}{1-(-h)} = 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots + (-1)^n h^n + o(h^n).$$

2.2 Propriétés

Toutes les propriétés établies pour les $\mathrm{DL}_n(0)$ se généralisent aux $\mathrm{DL}_n(a)$. En particulier, on retrouve les résultats suivants :

Proposition 2.2.1: Continuité et développement limité à l'ordre 0 en a

Supposons que f est définie en a. Alors f est continue en a si et seulement si f admet pour $\mathrm{DL}_0(a)$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + o(1).}$$

Proposition 2.2.2: Dérivabilité et développement limité à l'ordre 1 en a

Supposons que f est définie en a. Alors f est dérivable en a si et seulement si f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.
Dans ce cas, un $\mathrm{DL}_1(a)$ de f est :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(h).$$

On reconnaît dans la proposition précédente l'équation de la tangente en a. On peut comme précédemment affiner cette approximation à l'aide des dérivées successives avec la formule de Taylor-Young :

Théorème 2.2.3: Formule de Taylor-Young en a

Soit I un intervalle d'intérieur non-vide contenant a et $f \in C^n(I, \mathbb{K})$. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui s'écrit :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

Exemple 2.2.4

Déterminons un $\mathrm{DL}_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \cos(x)$. La fonction cosinus est C^3 au voisinage de $\pi/4$ et

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\cos^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

de sorte que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 + o(h^3).$$

Définition 2.2.5

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ non nul, la **forme normalisée** de ce $\mathrm{DL}_n(a)$ est :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p \left(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p}) + o(h^{n-p})\right),$$

où $p \in [\![0, n]\!]$ est tel que $a_p \neq 0$.

Proposition 2.2.6: Application aux équivalents

Si f admet pour $\mathrm{DL}_n(a)$:

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p \left(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p}) + o(h^{n-p})\right),$$

avec $a_p \neq 0$, alors

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p.$$

Exemple 2.2.7

Déterminons un équivalent en $\frac{\pi}{4}$ de $\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}$. En reprenant les calculs précédents, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 + o(h^3)$$

de sorte que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{h\to 0}{=} -\frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 + o(h^3).$$

Ainsi,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\sqrt{2}}{2}h.$$

Remarque 2.2.8

Par translation, on observe que toutes les opérations possibles sur les $\mathrm{DL}_n(0)$ sont aussi possibles pour les $\mathrm{DL}_n(a)$. Nous ne détaillerons donc pas l'ensemble des résultats dans ce cas mais pourrons les utiliser librement dans la suite.

3 Applications

Nous proposons ici un certain nombre d'applications des développements limités pour calculer des limites ou mener des études locales ou asymptotiques de fonctions.

3.1 Calcul de limites

Nous avons déjà vu que les équivalents permettaient d'accélérer grandement un certain nombre de calculs de limites. Néanmoins, il reste des limites pour lesquelles l'impossibilité de sommer ou composer des équivalents empêche de conclure. C'est typiquement le cas quand on étudie la *dérivabilité de fonctions prolongées par continuité*. Dans une telle situation, les développements limités (s'ils existent) permettent de conclure.

Exemple 3.1.1: Dérivabilité en 0 du sinus cardinal

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la fonction **sinus cardinal** définie par

$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

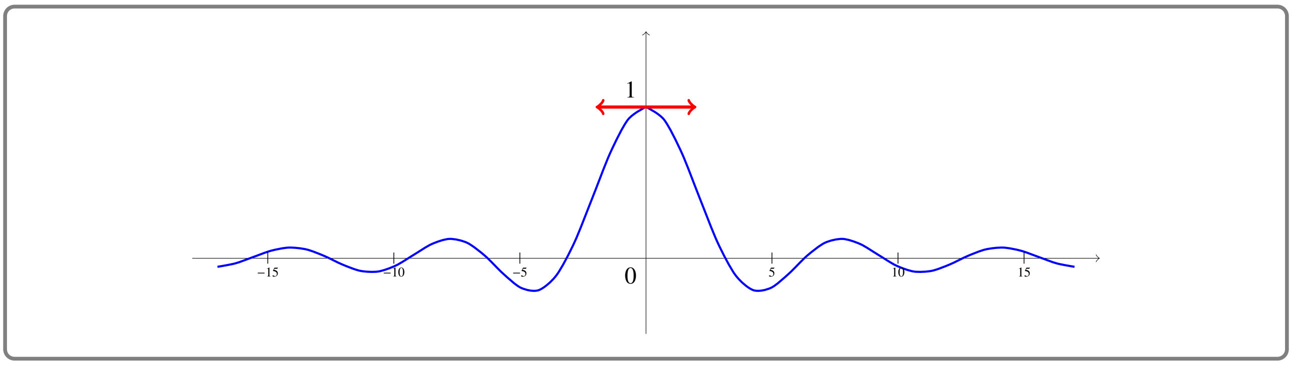
est continue en 0. Nous allons maintenant établir sa dérivabilité en 0.
Pour tout $x \neq 0$, le taux d'accroissement en 0 est

$$\tau_0(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right) = \frac{\sin(x) - x}{x^2}.$$

Un développement limité à l'ordre 2 (car on divise par x^2) de $\sin(x)$ est $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^2)$ et donc $\sin(x) - x \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$, d'où l'on tire

$$\tau_0(x) = \frac{\sin(x) - x}{x^2} \underset{x\to 0}{=} o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, sinc est dérivable en 0 et $\mathrm{sinc}'(0) = 0$.



3.2 Extremums locaux

Nous avons vu au chapitre dédié à la dérivabilité que si une fonction f admet un extremum local en un point a intérieur à I, alors nécessairement $f'(a) = 0$ (a est un **point critique** de f). Néanmoins, il ne s'agit pas là d'une condition suffisante. Nous pouvons maintenant préciser ces résultats en regardant la dérivée d'ordre 2.

Corollaire 3.2.1

Soit I un intervalle, a un point intérieur à I et $f \in C^2(I, \mathbb{R})$. Supposons que a est un **point critique** de f.

1. Si $f''(a) > 0$, alors f présente un minimum local en a ;
2. Si $f''(a) < 0$, alors f présente un maximum local en a ;
3. Si $f''(a) = 0$, alors on ne peut pas conclure.

Méthode 3.2.2: Caractériser les extremums locaux au second ordre

Si f présente un point critique en a, on a le tableau suivant :

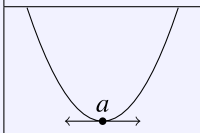
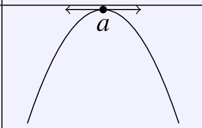
Minimum local	Maximum local	Indéterminé
		?
$f'(a) = 0$ $f''(a) > 0$	$f'(a) = 0$ $f''(a) < 0$	$f'(a) = 0$ $f''(a) = 0$

FIGURE 5 – Condition au second ordre pour les points critiques d'une fonction d'une variable réelle.

Exercice 3.2.3

Montrer, à l'aide d'un développement limité, que $x \mapsto \ln(1 + x) - x$ admet un extremum local en 0 et déterminer sa nature.

Remarque 3.2.4: Cas où les deux premières dérivées sont nulles

Le cas où les deux premières dérivées sont nulles n'est pas exigible en PCSI. Néanmoins, on voit qu'il est possible d'adapter la condition suffisante à l'ordre 2 comme suit. Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, avec $n \geq 2$, de la forme

$$f(a + h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + a_n h^n + o(h^n),$$

avec $a_n \neq 0$, alors :

(i) si n est pair et $a_n > 0$, f présente un maximum local en a ;

(ii) si n est pair et $a_n < 0$, f présente un minimum local en a ;

(iii) si n est impair, f ne présente ni minimum ni maximum local en a.

Pour s'exercer, le lecteur pourra ainsi montrer que $f : x \mapsto \cos(x)+\frac{x^2}{2}$ admet un extremum local en 0 et déterminer sa nature.

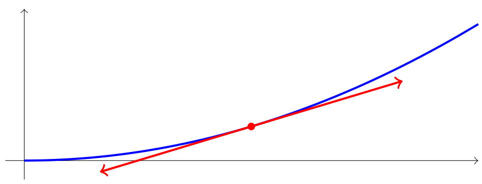
3.3 Position relative d'une courbe et de sa tangente

Si f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de a qui admet un développement limité en a de la forme

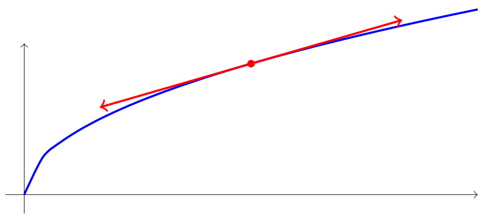
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + f'(a)h + a_n h^n + o(h^n),$$

avec $a_n \neq 0$, on peut généraliser les raisonnements précédents pour déterminer la position relative de la courbe représentative de f et de sa tangente en a comme suit.

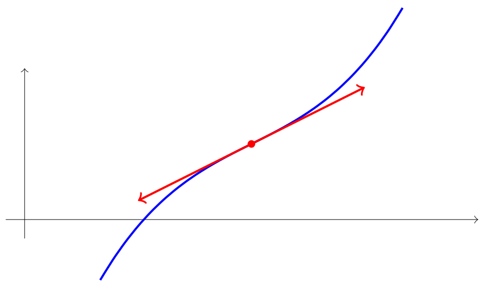
(i) si n est pair et $a_n > 0$, alors localement le graphe de f est au-dessus de la tangente en a ;



(ii) si n est pair et $a_n < 0$, alors localement le graphe de f est en-dessous de la tangente en a ;



(iii) si n est impair, alors la courbe se trouve localement de part et d'autre de la tangente en a.



La courbe présente géométriquement un **point d'inflexion** en $(a, f(a))$.

Exercice 3.3.1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la position relative au voisinage de 0 de la courbe représentative et de la tangente en 0.

1. $x \mapsto \tan(x)$, **2.** $x \mapsto \ln(\cos(x))$, **3.** $x \mapsto e^{\sin(x)}$.

3.4 Étude asymptotique de fonctions

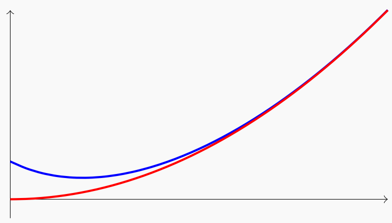
Définition 3.4.1: Courbe asymptote au voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage de a. On dit que Γ_f est **asymptote à** Γ_g au voisinage de a si

$$\lim_a (f - g) = 0.$$

Remarque 3.4.2: Interprétation géométrique

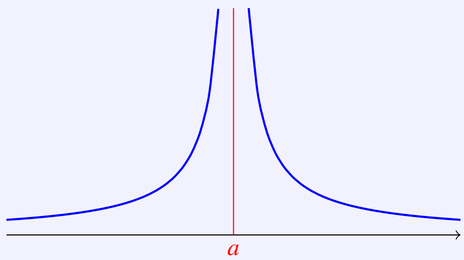
Dire que Γ_f est asymptote à Γ_g signifie que le graphe de f et celui de g se rapprochent indéfiniment au voisinage de a.



Pour déterminer les asymptotes, on procède comme suit :

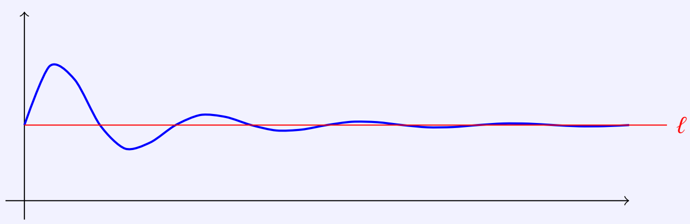
Méthode 3.4.3: Asymptotes verticales

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$. Alors Γ_f admet la droite d'équation $x = a$ pour **asymptote verticale**.



Méthode 3.4.4: Asymptotes horizontales

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Alors Γ_f admet la droite d'équation $y = \ell$ pour **asymptote horizontale** au voisinage de $+\infty$.



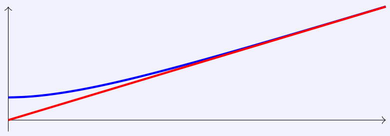
La position relative de la courbe et de l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - \ell$ au voisinage de $+\infty$. On procède de même en $-\infty$.

Exercice 3.4.5

Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x^4 + x - 1}{x^4}$. Montrer que Γ_f admet des asymptotes horizontales en $+\infty$ et en $-\infty$ puis déterminer la position relative de Γ_f et de ces asymptotes sur chacun des voisinages.

Méthode 3.4.6: Branches infinies

Si f admet une **limite infinie** en $+\infty$, on effectue un développement limité de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^+ pour déterminer une asymptote éventuelle en $+\infty$ (voir exemple ci-dessous).



On procède de la même manière en $-\infty$, à ceci près que l'on effectue un développement limité de $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0^-

Exemple 3.4.7

Étudions les asymptotes éventuelles pour la fonction

$$f(x) = \frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}.$$

— **Asymptotes verticales :** On a

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

donc Γ_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

— **Asymptotes obliques :** Pour $x \neq 0$, on pose $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. Alors

$$f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1/X}{1/X-1}\sqrt{\frac{1}{X^2}+1} = \frac{1}{|X|} \times \frac{1}{1-X}\sqrt{1+X^2}.$$

Mais

$$\frac{1}{1-X} \underset{X\to 0}{=} 1 + X + X^2 + o(X^2) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+X^2} \underset{X\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)$$

donc, par produit,

$$\frac{1}{|X|} \times \frac{1}{1-X}\sqrt{1+X^2} \underset{X\to 0}{=} \frac{1}{|X|}\left(1 + X + \frac{3}{2}X^2 + o(X^2)\right)$$

et donc

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} |x|\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

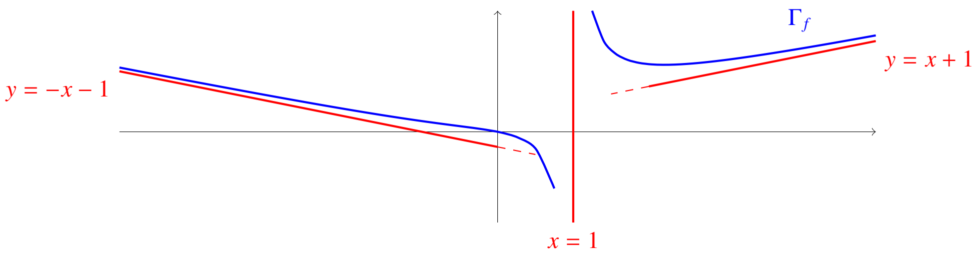
Ainsi, on a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

de sorte que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique en $+\infty$. De même,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x - 1 - \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

de sorte que la droite d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique en $-\infty$.



A Développements limités usuels en 0

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}^*) \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Table 1 – Développements limités en 0 exigibles en PCSI.