CCINP - PSI 2023 - Mathématiques

Éléments de correction

Exercice : Fonction de Bessel

Q1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(x\sin(t)) \in \mathcal{C}^0([0,\pi])$ mais $\mathcal{C}^0([0,\pi]) \subset \mathcal{L}^1([0,\pi])$ car $[0,\pi]$ est un segment donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètres. On pose $g : (x,t) \mapsto \cos(x\sin(t))$.

— Pour tout $t \in [0,\pi]$, $x \mapsto g(x,t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,\pi]$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2(t)\cos(x\sin(t))$$

donc $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur le segment $[0,\pi]$ et donc intégrables sur ce segment.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,\pi]$, on a :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 1$$

et $t \mapsto 1$ est intégrable sur le segment $[0,\pi]$.

Alors, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t}$$

Q3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t)) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc h admet une dérivée partielle par rapport à t et :

$$\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t)).}$$

Q4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales considérées étant convergentes, il suit de **Q2** que :

$$\begin{aligned}
xf''(x) + f'(x) + xf(x) &= \int_0^\pi -x\sin^2(t)\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (1-\sin^2(t))x\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \cos^2(t)x\cos(x\sin(t)) - \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&= [h(x,t)]_{t=0}^{t=\pi} \quad \text{(d'après } \textbf{Q3}\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Q5. C'est parfaitement classique : on injecte, on dérive terme à terme, on fait des changements d'indice et on utilise l'unité du développement en série entière de la fonction nulle pour en déduire les relations demandées. Je ne le rédige pas car c'est du simple calcul.

Q6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t.$$

Mais, pour tout $t \in [0,\pi]$, on a

$$\left|(-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$$

et la série $\sum_{n\geq 0} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ converge vers $\mathrm{ch}(|x|)$. Ainsi, on a convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}$ sur le segment $[0,\pi]$. On peut donc intervertir série et intégrale et on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi (-1)^n \frac{(x\sin(t))^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} x^{2n}.}$$

Q7. Si $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est solution de (E), alors **Q5** assure que $a_1 = 0$ et pour $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on impose à y la condition initiale $y(0) = \pi$, on a $a_0 = \pi$ de sorte que les $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont entièrement déterminés. Il existe donc une unique solution y de (E) développable en série entière, telle que $y(0) = \pi$.
D'autre part, f est solution de (E) d'après **Q4** et développable en série entière d'après **Q6**. Il ne reste plus qu'à observer que

$$f(0) = \int_0^\pi \cos(0)\,\mathrm{d}t = \pi$$

pour conclure.

Q8. D'après **Q5**, si on note $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ le développement en série entière de f, on a $a_1 = 0$ et pour tout $n \geq 2$, $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$. Par une récurrence immédiate, on trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{\pi}{4^n (n!)^2}.$$

Mais, par unicité obtenue en **Q7** et développement obtenu en **Q6**, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} = (-1)^n \frac{\pi}{4^n (n!)^2}$$

et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\pi.}$$

Problème 1 : Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

Partie I - Un développement en série entière

Q9. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On a

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k}$$

et le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1.

Q10. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x \in]-1,1[$ donc, d'après **Q9**, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+(-x))^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k x^k.$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\times(-1)^k \\
&= \frac{1}{k!}\times\frac{1}{2^k}\times(1\times 3\times\cdots\times(2k-1)) \\
&= \frac{1}{k!}\times\frac{1}{2^k}\times\frac{(2k)!}{2^k k!} \\
&= \frac{1}{2^{2k}}\times\frac{(2k)!}{(k!)^2} \\
&= \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}.
\end{aligned}$$

Puisque cette expression vaut 1 quand $k = 0$, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}x^k.}$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

Dans ce corrigé, on pose $q = 1 - p$.

Q11. Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, on a $X_t(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc $\frac{X_t+1}{2}(\Omega) = \{0, 1\}$ de sorte que $\frac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli. En outre,

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = \mathbf{P}(X_t = 1) = p$$

donc

$$\boxed{\frac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}(p).}$$

Les X_t, avec $t \in \mathbb{N}^*$ étant indépendantes, il suit du lemme des coalitions que les $\frac{X_t+1}{2}$ le sont aussi. Puisqu'elles suivent toutes une loi de Bernoulli de même paramètre, la somme de n telles variables suit une loi binomiale. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2} \sim \mathcal{B}(n, p).}$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$ mais

$$(S_n = 0) = \left(\sum_{t=1}^{n} X_t = 0 \right) = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2} = \frac{n}{2} \right).$$

La variable aléatoire S_n étant à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ d'après **Q11**, cet événement est vide si $\frac{n}{2}$ n'est pas entier, c'est-à-dire si n est impair. Et si n est pair, toujours d'après **Q11**, on a :

$$\mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t + 1}{2} = \frac{n}{2} \right) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{n/2} q^{n/2}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (pq)^{\frac{n}{2}} & \text{si} \quad n \in 2\mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Q13. D'après **Q12** et la formule de Stirling, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \binom{2n}{n} (pq)^n \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} (pq)^n \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \left(\frac{e}{n} \right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} (pq)^n \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}. \end{aligned}$$

Mais, pour tout $p \in]0, 1[$, $pq = p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$ avec égalité si, et seulement si $p = \frac{1}{2}$. Ainsi, $|4pq| \leq 1$ et donc :

$$\boxed{u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.}$$

Puisque $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, c'est-à-dire qu'au bout d'un très grand nombre de pas, il devient très improbable que la marche repasse par 0.
On notera aussi la différence de dynamique de convergence vers 0 entre le cas où $p = \frac{1}{2}$ (marche isotrope), où la convergence vers 0 est en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et le cas où $p \neq \frac{1}{2}$ où elle est plus que géométrique.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Q14. La variable aléatoire T_n modélise le nombre de passages par l'origine entre les instants $t = 0$ et $t = 2n$.

Q15. Soit $j \in \mathbb{N}$. On a :

$$O_{2j} = \mathbb{1}_{(S_{2j=0})} \sim \mathcal{B}\left(\mathbf{P}\left(S_{2j} = 0\right)\right)$$

mais pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\left(S_{2j} = 0\right) = u_{2j}$ donc, en posant $u_0 = 1$ (qui est cohérent avec la formule trouvée en **Q12**), on a :

$$\boxed{O_{2j} \sim \mathcal{B}(u_{2j}).}$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[T_n] &= \mathbf{E}\left[\sum_{j=0}^{n} O_{2j}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}\left[O_{2j}\right] \quad \text{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} u_{2j} \quad (\text{car } O_{2j} \sim \mathcal{B}(u_{2j})) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(pq)^j \quad (\text{d'après } \mathbf{Q11}).
\end{aligned}
$$

On a donc bien :

$$
\boxed{\mathbf{E}[T_n] = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(pq)^j.}
$$

Q16. Si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $pq < \frac{1}{4}$ donc $4pq < 1$ de sorte que, d'après **Q10**, on a :

$$
\sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(pq)^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}(4pq)^j \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{1-4pq}}.
$$

Ainsi :

$$
\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}[T_n] = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}}.}
$$

Q17. Si $p = \frac{1}{2}$, on démontre le résultat par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 0$, le résultat est trivial.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n. Alors, d'après **Q15**, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[T_{n+1}] &= \mathbf{E}[T_n] + \binom{2(n+1)}{n+1}(pq)^{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}} \\
&= \frac{2n+1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} + \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{1}{4^{n+1}} \\
&= \frac{2n+3}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a bien :

$$
\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}[T_n] = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.}
$$

En explicitant le coefficient binomial et en appliquant la formule de Stirling, on a donc :

$$
\mathbf{E}[T_n] = \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{4^n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \frac{1}{2\pi n}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt{\pi n}}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.
\end{aligned}
$$

Autrement dit, dans le cas d'une marche isotrope infinie sur $\mathbb{Z}$, la marche repassera une infinité de fois par l'origine.

Problème 2 : Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Dans ce corrigé, pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, on note $E_\lambda(M)$ le sous-espace propre associé.

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Q18. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b)$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

Q19. On a

$$M(a,b)V = \begin{pmatrix} a+(n-1)b \\ \vdots \\ a+(n-1)b \end{pmatrix} = (a+(n-1)b)V$$

donc

$$\boxed{a+(n-1)b \in \mathrm{Sp}(M(a,b)) \quad \text{et} \quad V \in E_{a+(n-1)b}(M(a,b)).}$$

Q20. On a

$$\begin{aligned}
P_{1,0}(X) &= \begin{vmatrix} X & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\underset{(C_1 \leftarrow \sum_i C_i)}{=} \begin{vmatrix} X-(n-1) & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ X-(n-1) & X & -1 & \cdots & -1 \\ X-(n-1) & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ X-(n-1) & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ X-(n-1) & -1 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= (X-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & X & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} \\
&\underset{(\forall i \geq 2,\ C_i \leftarrow C_i + C_1)}{=} (X-(n-1)) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & X+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= (X-(n-1)) \begin{vmatrix} X+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X+1 \end{vmatrix} \\
&= (X-(n-1))(X+1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}.}$$

Q21. Puisque a est non nul, on a

$$P_{a,b}(X) = \begin{vmatrix} X-b & -a & \cdots & -a \\ -a & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a \\ -a & \cdots & -a & X-b \end{vmatrix} = a^n \begin{vmatrix} \frac{X-b}{a} & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \frac{X-b}{a} \end{vmatrix} = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right).$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$P_{a,b}(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; P_{1,0}\left(\frac{\lambda-b}{a}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\lambda-b}{a} \in \{-1, n-1\} \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \{b-a, b+(n-1)a\}.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M(a,b)) = \{b-a, b+(n-1)a\}.}$$

Pour les multiplicités (géométriques), on observe que :

$$\dim E_{b-a}(M(a,b)) = n - \mathrm{rg}(M(a,b)-(b-a)I_n) = n - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix} = n-1$$

et donc, la somme des multiplicités géométriques ne pouvant excéder n, on a :

$$\dim E_{b+(n-1)a}(M(a,b)) \leq 1$$

mais comme $b+(n-1)a$ est une valeur propre de $M(a,b)$, on a égalité. Ainsi :

$$\boxed{\dim E_{b-a}(M(a,b)) = n-1 \quad \text{et} \quad \dim E_{b+(n-1)a}(M(a,b)) = 1.}$$

Q22. Si $a = 0$, $M(a,b) = bI_n$ donc $X-b$ annule $M(a,b)$ et, comme $X-b$ divise $Q_{a,b}$, $Q_{a,b}$ est bien annulateur de $M(a,b)$.
Si $a \neq 0$, on a

$$M-(b-a)I_n = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

et

$$M-(b+(n-1)a)I_n = \begin{vmatrix} -(n-1)a & a & \cdots & a \\ a & -(n-1)a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & -(n-1)a \end{vmatrix}$$

donc, en effectuant le produit matriciel, chaque coefficient du produit est égal à $(n-1)a^2 - (n-1)a^2 = 0$ et on a bien $Q_{a,b}(M(a,b)) = 0_n$.
Ainsi, on a bien :

$$\boxed{Q_{a,b} \text{ est annulateur de } M(a,b).}$$

Q23. D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $(B_k, R_k) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $X^k = Q_{a,b}(X)B_k(X) + R_k(X)$ avec $\deg R_k \leq \deg Q_{a,b}(X) - 1 = 1$. Ainsi, on peut écrire $R_k = \alpha_k X + \beta_k$, avec $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{C}^2$ et on a :

$$X^k = Q_{a,b}(X)B_k(X) + \alpha_k X + \beta_k.$$

En évaluant dans les racines de $Q_{a,b}$, qui sont distinctes puisque $a \neq 0$, on a :

$$\begin{cases} (b-a)^k & = \alpha_k(b-a) + \beta_k \\ (b+(n-1)a)^k & = \alpha_k(b+(n-1)a) + \beta_k \end{cases}$$

On résout ce système en (α_k, β_k) et on trouve :

$$\boxed{\alpha_k = \frac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{ka} \quad \text{et} \quad \beta_k = (b-a)^k - (b-a)\alpha_k.}$$

En évaluant l'identité de la division euclidienne en $M(a,b)$, puisque $Q_{a,b}$ annule $M(a,b)$ d'après **Q22**, on a :

$$\boxed{M(a,b)^k = \alpha_k M(a,b) + \beta_k I_n.}$$

Q24. Si $|b+(n-1)a| < 1$ et $|b-a| < 1$, alors $(b+(n-1)a)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ et $(b-a)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc

$$\alpha_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \beta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

de sorte que,

$$\boxed{M(a,b)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.}$$

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Q25. On a $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$ et donc

$$\left\|u^k(e_1)\right\| = \left\|\lambda_1^k e_1\right\| = |\lambda_1|^k \, \|e_1\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

car $|\lambda_1| < 1$.
On a donc bien :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0.}$$

Q26. Si on note $t_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice T, on a :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{i} t_{i,j} e_i}_{=x}$$

donc on a bien

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x$$

avec $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$.
Alors, on par récurrence sur k (à rédiger sur une copie), on obtient la relation :

$$\boxed{u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).}$$

Q27. D'après l'hypothèse, pour tout $k \in [\![1, i]\!]$, $u^k(e_j)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini donc $u^k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\left\|u^k(x)\right\| \leq \epsilon$ et donc :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k_0-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| + \epsilon \sum_{m=k_0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1}$$

mais $\lambda_{i+1} < 1$ donc la seconde somme admet une limite finie quand k tend vers l'infini. En particulier, il existe un réel $M > 0$ et un entier k_1 tel que pour $k \geq k_1$, cette somme est majorée par M. Alors pour $k \geq \max(k_0, k_1)$, on a :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k_0-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| + M\epsilon.$$

D'autre part,

$$\sum_{m=0}^{k_0-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \leq k_0 \, |\lambda_{i+1}|^{k-k_0} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

donc on a bien :

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = 0.$$

D'autre part, $\left\|\lambda_{i+1}^k e_{i+1}\right\| = |\lambda_{i+1}|^k \, \|e_{i+1}\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ car $|\lambda_{i+1}| < 1$ donc

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} u^k(e_{i+1}) = 0.}$$

Q28. Par récurrence si $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_i) = 0$, la propriété ayant été initialisée en **Q25** et son hérédité ayant été prouvée en **Q26**. Il s'ensuit que chaque colonne de T^k tend vers $0_{n,1}$ donc T^k tend vers la matrice nulle.
On a bien :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} T^k = 0_n.}$$

Q29. A étant à coefficients complexes, elle est trigonalisable. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure. En outre, A et T étant semblables, elles ont le même spectre. Alors, $T^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ d'après **Q28** mais $A^k = (PTP^{-1})^k = PT^kP^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ par continuité du produit matriciel. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} A^k = 0_n.}$$

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Q30. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\left|a_{i,i}\right| > 0$ car A est à diagonale strictement dominante. Puisque M est triangulaire inférieure avec les $a_{i,i}$ sur sa diagonale, on a :

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i} \neq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).}$$

Q31. On a :

$$\begin{aligned} BX + M^{-1}Y &= M^{-1}FX + M^{-1}AX \\ &= M^{-1}(F+A)X \\ &= M^{-1}MX \\ &= X. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{BX + M^{-1}Y = X.}$$

Q32. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $V \in E_\lambda(B)$. On a

$$FV = MBV = M\lambda V = \lambda MV$$

mais

$$FV = \begin{pmatrix} 0 & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et

$$MV = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

donc, en identifiant les coefficients de la i-ième ligne dans FV et dans λMV, on obtient :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda a_{i,i} v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right).}$$

Q33. Puisque V est un vecteur propre, il est non nul et donc il a une composante non nulle de module maximal. Ainsi, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\left|v_{i_0}\right|$ est non nul et maximal.
En écrivant l'identité de **Q32** pour $i = i_0$, on a :

$$\begin{aligned} \left|\lambda a_{i_0,i_0} v_{i_0}\right| &= \left| -\left(\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j} v_j \right) \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right| \left|v_j\right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} \left|a_{i_0,j}\right| \left|v_j\right| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right| \left|v_{i_0}\right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} \left|a_{i_0,j}\right| \left|v_{i_0}\right| \right) \end{aligned}$$

et en divisant par $\left|v_{i_0}\right|$, on obtient bien :

$$\boxed{\left|\lambda a_{i_0,i_0}\right| \leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} \left|a_{i_0,j}\right| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} \left|a_{i_0,j}\right| \right).}$$

Q34. Par l'absurde, si $|\lambda| \geq 1$, on divise l'inégalité de **Q33** par $|\lambda|$ et on obtient une contradiction avec le fait que A est à diagonale strictement dominante. Ainsi, $|\lambda| < 1$. Mais alors, il suit de **Q29** que :

$$\boxed{B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.}$$

Q35. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y$$

mais, d'après **Q31**, on a

$$X = BX + M^{-1}Y$$

donc, en soustrayant, il vient :

$$X_{k+1} - X = B(X_k - X)$$

d'où l'on obtient par récurrence immédiate :

$$\boxed{X_k - X = B^k(X_0 - X).}$$

Puisque $B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ d'après **Q34**, on obtient

$$\boxed{X_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} X.}$$

Ainsi, on a construit une suite approchant la solution du système $AX = Y$ à partir d'un vecteur X_0 quelconque de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, sous réserve que A est à diagonale dominante. C'est la méthode itérative de Gauss-Seidel en calcul numérique.

*** Fin du sujet ***