E3A - MP 2023 - Mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1

Questions de cours

1. $\mathcal{E}$ est une famille de polynômes non nuls à degrés étagés donc elle est libre. En outre, elle est composée de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. D'après la formule de Taylor en α pour les polynômes, on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k.$$

3. Si r est une racine d'ordre r de P, alors $(X-\alpha)^r$ divise P donc le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^r$ est nul. D'autre part, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$ donc, en injectant dans la formule de Taylor, il vient :

$$P(X) = \sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = (X-\alpha)^r \sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{k-r}$$

donc le quotient de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^r$ est :

$$\boxed{Q(X) = \sum_{k=0}^{n-r} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!}(X-\alpha)^k.}$$

*****

4. On a $T(P_0) = T(1) = X$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$T(P_k) = T(X^k) = X^{k+1} - \frac{1}{n}(X^2-1)kX^{k-1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right)X^{k+1} + \frac{k}{n}X^{k-1}.$$

Cette expression étant encore valide pour $k = 0$, on a :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad T(P_k) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)X^{k+1} + \frac{k}{n}X^{k-1}.}$$

5. La linéarité de T suit de celle de la dérivation et de la bilinéarité de la multiplication dans $\mathbb{R}[X]$. D'autre part, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il suit de la question précédente que $T(P_k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Et, dans le cas particulier où $k = n$, le coefficient de X^{k+1} s'annule donc on a $T(P_n) = X^{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, par linéarité, on a $T(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.
En conclusion, on a bien :

$$\boxed{T \in \mathcal{L}(E_n).}$$

6. En reprenant le résultat établi en **4**, on a :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \frac{2}{n} & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

7.

7..1. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_0, \ldots, a_n$ complexes. Alors, par linéarité de T, on a :

$$\begin{aligned} T(P_a) &= \sum_{k=0}^{n} a_k T(X^k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{n-k}{n} X^{k+1} + \frac{k}{n} X^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{n-k}{n} X^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{k}{n} X^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \frac{n-k+1}{n} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{k+1}{n} X^k \\ &= \frac{a_{n-1}}{n} X^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{k-1} \frac{n-k+1}{n} a_{k+1} \frac{k+1}{n} \right) X^k + \frac{a_1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $T(P) = \lambda P$, en identifiant les coefficients, il vient :

$$\frac{a_{n-1}}{n} = \lambda a_n, \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ a_{k-1} \frac{n-k+1}{n} a_{k+1} \frac{k+1}{n} = \lambda a_k \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{n} = \lambda a_0.$$

Par l'absurde, si $\deg(P) < n$, alors $a_n = 0$, mais alors, par récurrence descendante, tous les a_k sont nuls, pour $k \in [\![0, n]\!]$ et donc $P = 0$, une contradiction.

On a donc bien :

$$\boxed{\deg(P) = n.}$$

7..2. Si z_0 est une racine d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ de P, on a $P^{(k)}(z_0) = 0$ si $k \in [\![0, r-1]\!]$ et $P^{(r)}(z_0) \neq 0$. Mais $T(P) = \lambda P$ donc $T(P)^{(r-1)} = \lambda P^{(r-1)}$ et donc $T(P)^{(r-1)}(z_0) = 0$. Or, d'après la formule de Leibniz, on a :

$$T(P)^{(r-1)} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} X^{(j)} P^{(r-1-j)} - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (X^2-1)^{(j)} P^{(r-j)}$$

donc, en évaluant en z_0, on obtient :

$$0 = (z_0^2 - 1) \underbrace{P^{(r)}(z_0)}_{\neq 0}$$

donc :

$$\boxed{z_0^2 - 1 = 0.}$$

7..3. D'après **7.2**, les seules racines possibles pour P sont -1 et 1. Puisque P est unitaire de degré n d'après **7.1** et que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on a :

$$\boxed{\exists a \in [\![0, n]\!], \quad P(X) = (X+1)^a (X-1)^{n-a}.}$$

8. Soit $a \in [\![0, n]\!]$ et $P_a(X) = (X+1)^a (X-1)^{n-a}$. Alors :

$$\begin{aligned}
T(P) &= X(X+1)^a(X-1)^{n-a} - \frac{1}{n}(X-1)(X+1)\left(a(X+1)^{a-1}(X-1)^{n-a} + (n-a)(X+1)^a(X-1)^{n-a-1}\right) \\
&= (X+1)^a(X-1)^{n-a}\left(X - \frac{a}{n}(X-1) - \frac{n-a}{n}(X+1)\right) \\
&= \frac{2a-n}{n}(X+1)^a(X-1)^{n-a} \\
&= \frac{2a-n}{n}P_a.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $a \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{2a-n}{n} \in \mathrm{Sp}(T)$ et $P_a \in E_{\frac{2a-n}{n}}(T)$.
On obtient ainsi $n+1$ valeurs propres distinctes pour $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ mais $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ donc

$$\boxed{T \text{ est diagonalisable}}$$

et les espaces propres sont les droites engendrées par les P_a, pour $a \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 2

Questions de cours

1. Par définition des fonctions puissances, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $a^b = \exp(b \ln(a))$.
2. Soient x, y tels que $x < y$. Comme $t \in]0, 1[$, $\ln(t) < 0$ donc $x \ln(t) > y \ln(t)$ et, par croissance de l'exponentielle $\exp(x \ln(t)) > \exp(y \ln(y))$. Ainsi, $t^x > t^y$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
4. $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$. Une récurrence immédiate (demandée, donc à rédiger sur une copie !) montre que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.}$$

*****

5.

5..1. Pour tout $t \in]0, 1]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$t^{t^x} = \exp(t^x \ln(t)) = \exp\left(\exp(x \ln(t)) \ln(t)\right)$$

mais $\ln(t) \leq 0$ donc $\exp(x \ln(t)) \ln(t) \leq 0$ et donc $t^{t^x} \leq 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{t^x}$ est continue et bornée sur $]0, 1]$ et donc intégrable sur cet intervalle qui est de longueur finie.

En conclusion :

$$\boxed{F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

5..2. Pour tout $t \in]0, 1]$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$, il suit de la question **2** (le raisonnement de cette question est aussi valide en 1) que :

$$x < y \;\Rightarrow\; t^x > t^y \;\Rightarrow\; t^{t^x} < t^{t^y}$$

donc, par croissance de l'intégrale et continuité des fonctions puissances, on a : $F(x) < F(y)$. Ainsi :

$$\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

5..3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, 1]$, on a :

$$x \geq 0 \;\Rightarrow\; t^x \leq t^0 = 1 \;\Rightarrow\; t^{t^x} \geq t^1 = t$$

donc, par croissance de l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) \geq \frac{1}{2}.}$$

5..4. On va utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{t^x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ comme vu à la question **5.1** ;

— Pour tout $t \in]0, 1]$, $x \mapsto t^{t^x} = \exp(\exp(x \ln(t)) \ln(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$;

— Pour tout $t \in]0, 1]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|t^{t^x}\right| = \exp(\underbrace{\exp(x \ln(t)) \ln(t)}_{\leq 0}) \leq 1$$

et $\varphi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Ainsi, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).}$$

5..5. Puisque F est croissante, pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, il suffit de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n)$. Mais

$$F(n) = \int_0^1 t^{t^n} \,\mathrm{d}t.$$

Si on pose $f_n : t \in]0, 1] \mapsto t^{t^n}$, on a :

$$\forall t \in]0, 1], \quad f_n(t) = \exp(\exp(n \ln(t)) \ln(t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} 1$ sur $]0, 1]$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\|f_n\|_\infty \leq 1$, avec $\varphi : t \mapsto 1$ qui est intégrable sur $]0, 1]$.

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} F(n) = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = 1.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ donc, par croissance de F, on a

$$F(\lfloor x \rfloor) \leq F(x) \leq F(\lceil x \rceil)$$

et, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.}$$

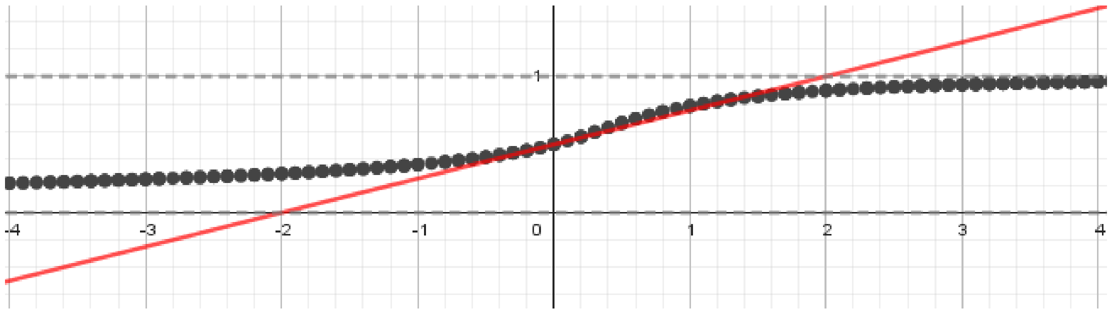
De la même manière, avec $g_n(t) = t^{t^{-n}}$, on a la convergence simple de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 sur $]0, 1]$ et la suite est toujours dominée par 1, qui est intégrable sur $]0, 1]$. Ainsi, par convergence dominée puis par encadrement, on a :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.}$$

5..6. Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$F(x)$	$0 \nearrow 1$

L'équation de la tangente en 0 est $y = F(0) + F'(0)x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4}$ donc on obtient un graphique analogue au graphique ci-dessous, obtenu avec un calcul empirique des valeurs de F sous Geogebra :



6.

6..1. Pour tout $t \in]0,1]$, on a $g_n(t) = \dfrac{t^{nx}\ln^n(t)}{n!} = \dfrac{(t^x\ln(t))^n}{n!}$ donc $\sum\limits_{n\geq 0} g_n(t)$ converge vers $\exp(t^x\ln(t)) = t^{t^x}$.

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} g_k \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} (t \mapsto t^{t^x}).}$$

6..2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\ln(t) < 0$ pour $t \in]0,1]$, on a $|\ln(t)^n| = (-1)^n \ln(t)$ et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (-1)^n t^{nx}\ln^n(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{nx+1}\ln^n(t)\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{n!}\int_0^1 \exp\left[-(nx+1)(-\ln t)\right]\times\left[(nx+1)(-\ln(t))\right]^n\times\frac{1}{(nx+1)^{n+1}}\times\left(-\frac{nx+1}{t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \exp\left[-u\right]\times\left[u\right]^n\times\frac{1}{(nx+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable C^1 et bijectif de $]0,1]$ vers $[0,+\infty[$, $u = -(nx+1)\ln(t)$.

6..3. D'après la question précédente, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$$

mais $\Gamma(n+1) = n!$ d'après **4** donc

$$\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(nx+1)^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(nx)^{n+1}}$$

mais $x > 0$ donc

$$\frac{(nx)^{n+1}}{((n+1)x)^{n+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(nx)^{n+1}}{(nx)^{n+2}} = \frac{1}{nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc, d'après le critère de d'Alembert que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(nx)^{n+1}}$ converge. Alors, le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, implique :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 |g_n(t)|\ \mathrm{d}t\right) \text{ converge.}$$

Alors, on peut appliquer le théorème d'interversion série et intégrale et on obtient :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t).$$

Mais, d'après la question **6.1**, on a :

$$\forall t \in]0,1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) = t^{t^x}$$

et, puisque $g_n = (-1)^n |g_n|$, en reprenant les calculs de **6.2** et le fait que $\Gamma(n+1) = n!$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 g_n(t)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}.$$

En reportant dans l'égalité précédente, on obtient bien :

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}.}$$

Exercice 3

1. D'après le théorème fondamental de l'analyse, puisque f est continue sur $\mathbb{R}_+$, F est l'unique primitive de f qui s'annule en 0. En particulier, $F' = f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ donc F est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F'(x) = f(x).}$$

2. Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable affine $u = xt$, on a :

$$\begin{aligned}\Psi(f)(x) &= \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\cdot x\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{F(x)}{x}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a établi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Psi(f)(x) = \frac{F(x)}{x}.}$$

3. Nous allons utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

— Pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto f(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(xt)$ est intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur ce segment;

— Soit $b > 0$. Alors pour tout $x \in [0, b]$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a $xt \in [0, b]$ et f est continue donc bornée sur le segment $[0, b]$. Il existe donc $M_b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, t) \in [0, b] \times [0, 1], \quad |f(xt)| \leq M_b$$

mais $\varphi : t \mapsto M_b \in \mathcal{L}^1([0, 1])$, donc l'hypothèse de domination sur $[0, b]$ est vérifiée.

Ainsi, $\Psi(f)$ est continue sur $[0, b]$. Ceci étant vrai pour tout $b > 0$, on a :

$$\boxed{\Psi(f) \in C^0(\mathbb{R}_+).}$$

Par continuité, on a donc :

$$\Psi(f)(0) = \lim_{x\to 0^+} \Psi(f)(x) \underset{\mathbf{(2)}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) \underset{\mathbf{(1)}}{=} f(0).$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\Psi(f)(0) = f(0).}$$

4. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et, pour tout $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\Psi(\lambda f + g)(x) = \int_0^1 (\lambda f + g)(xt)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(xt)\,\mathrm{d}t = \lambda\Psi(f)(x) + \Psi(g)(x)$$

donc Ψ est linéaire.
En outre, il suit de **3** que $\Psi(E) \subset E$. Ainsi, on a :

$$\boxed{\Psi \in \mathcal{L}(E).}$$

5. Surjectivité de Ψ

5..1. h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition et produit de fonctions continues. Pour tout $x > 0$, on a :

$$|h(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = h(0).$$

Ainsi, h est continue en 0 et donc :

$$\boxed{h \in C^0(\mathbb{R}_+).}$$

5..2. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

mais $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0^+ (prendre les suites $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ et $y_n = \dfrac{2}{n\pi}$ pour s'en convaincre). Ainsi, h n'est pas dérivable en 0 et donc :

$$\boxed{h \notin C^1(\mathbb{R}_+).}$$

5..3. Soit $g \in \operatorname{im}(\Psi)$. Alors il existe $f \in E$ telle que $g = \Psi(f)$ et donc, d'après **2** :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{F(x)}{x}$$

de sorte que

$$\forall x > 0, \quad xg(x) = F(x)$$

et, puisque F et g sont continues, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad xg(x) = F(x).$$

La fonction F étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ d'après **1**, on a :

$$\boxed{x \mapsto xg(x) \in C^1(\mathbb{R}_+).}$$

5..4. Par l'absurde, si $h \in \operatorname{im}(\Psi)$, alors $h \in C^1(\mathbb{R}_+)$ d'après **5.3**. Posons $j : x \mapsto xh(x)$. On a $j(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $j(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Mais, pour tout $x > 0$, on a :

$$j'(x) = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{pas de limite en } 0}.$$

Ainsi, j n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donc :

$$\boxed{h \notin \mathrm{im}(\Psi).}$$

5..5. On a $h \in E$ d'après **5.1** et $h \notin \mathrm{im}(\Psi)$ d'après **5.4** donc $\mathrm{im}(\Psi) \neq E$. Ainsi :

$$\boxed{\Psi \text{ n'est pas surjective.}}$$

6. Soit $f \in \ker(\Psi)$. Alors, d'après **2** (avec les notations de cette question) :

$$\forall x > 0, \quad 0 = \Psi(f)(x) = \frac{F(x)}{x}$$

donc $F(x) = 0$ pour tout $x > 0$ et, puisque $F(0) = 0$, on a $F = 0$. En dérivant, on obtient $f = 0$ et donc $\ker(\Psi) = \{0\}$. On a donc démontré :

$$\boxed{\Psi \text{ est injective.}}$$

7. Recherche des éléments propres de Ψ.

7..1. Puisque Ψ est injective, $\ker(\Psi - 0\mathrm{id}_E) = \{0\}$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}(\Psi)$.

7..2. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. L'équation différentielle (L) est linéaire d'ordre 1 homogène. Ainsi, la forme générale des solutions de (L) est :

$$y : x \mapsto c e^{-\mu \ln(x)} = c x^{-\mu},$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

7..3. — Si $\mu = 0$, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $x \mapsto cx^{-\mu} = c$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

— Si $\mu < 0$, alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $x \mapsto cx^{-\mu}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

— Si $\mu > 0$, alors $x \mapsto cx^{-\mu}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $c = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{(L) \text{ admet des solutions non nulles prolongeables par continuité sur } \mathbb{R}_+ \text{ si, et seulement si } \mu \leq 0.}$$

7..4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in E$ dont on note F l'unique primitive qui s'annule en 0. On a :

$$\Psi(f) = \lambda f \iff \forall x > 0, \frac{F(x)}{x} = \lambda f(x) \iff \forall x > 0, f(x) - \frac{F(x)}{\lambda x} = 0 \iff \forall x > 0, F'(x) + \frac{\mu}{x} F(x) = 0,$$

avec $\mu = -\dfrac{1}{\lambda}$.

Ainsi, si f est un vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre λ, alors F est une solution non nulle de (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\mu = -\dfrac{1}{\lambda}$. Mais (L) admet des solutions continues non nulles si, et seulement si, $\mu < 0$, c'est-à-dire que si, et seulement si $\lambda > 0$.

Puisque F est C^1, il nous faut en fait chercher les solutions de (L) qui admettent un prolongement C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Pour que (L) admette de telles solutions non nulles, on vérifie comme à la question précédente que la condition est $\mu \leq -1$, c'est-à-dire $\lambda \leq 1$.

On a donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Psi) =]0, 1].}$$

En outre, on a :

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \quad E_\lambda(\Psi) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1}\right).}$$

8.

8..1. Afin de gagner un peu de temps, nous allons traiter directement la question sans passer par les sous-questions proposées par l'énoncé. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ réels tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i = 0.$$

On pose

$$A = \{i \in [\![1, n]\!] \mid \alpha_i \neq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{i \in [\![1, n]\!] \mid \beta_i \neq 0\}.$$

— Si $A \neq \emptyset$, on pose $i_0 = \sup(A)$ et, par croissances comparées, on a :

$$|\varphi(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |\alpha_{i_0}|\, x^{i_0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

une contradiction.

— Si $A = \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, on pose $i_0 = \sup(B)$ et, par croissances comparées, on a :

$$|\varphi(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} |\beta_{i_0}|\, x^{i_0} \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

une contradiction.

Ainsi, $A = B = \emptyset$ et donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$.

La famille $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est donc une famille libre de F_n ; elle est génératrice par définition de F_n donc :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F_n \text{ et } \dim F_n = 2n.}$$

8..2.

8.2.1 Soit $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto t^p \ln(t)$ est continue sur $]0, x]$ et admet une limite nulle en 0 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\, \mathrm{d}t$ est ainsi faussement impropre et donc convergente.

Alors, par intégration par parties généralisée, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^p \ln(t)\, \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \ln(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^p}{p+1}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{p+1} x^{p+1} \ln(x) - \frac{1}{(p+1)^2} x^{p+1}.\end{aligned}$$

8.2.2 Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, si on note G_p la primitive de g_p qui s'annule en 0, les questions **2** et **8.2.1** donnent :

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x t^p \ln(t)\, \mathrm{d}t = G_p(x) = x\Psi(g_p)(x)$$

donc

$$\Psi(g_p)(x) = \frac{1}{p+1} x^p \ln(x) - \frac{1}{(p+1)^2} x^p = \frac{1}{p+1} g_p(x) - \frac{1}{(p+1)^2} f_p(x).$$

Ainsi,

$$\Psi(g_p) = \frac{1}{p+1} g_p - \frac{1}{(p+1)^2} f_p \in F_n.$$

De manière analogue, on a :

$$\forall x > 0, \quad \Psi(f_p)(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^{p+1}}{p+1} = \frac{1}{p+1} f_p(x)$$

donc $\Psi(f_p) = \dfrac{1}{p+1} f_p$.
Ainsi, $\Psi(\mathcal{B}) \subset F_n$ et donc, par linéarité, $\Psi(F_n) \subset F_n$.
En conclusion :

$$\boxed{\Psi_n = \Psi_{|F_n} \in \mathcal{L}(F_n).}$$

8..3. D'après les calculs effectués en **8.2.2**, la matrice de Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Psi_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots & 0 & -\frac{1}{9} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{(n+1)^2} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{array}\right)}$$

8..4. La matrice de Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$ étant triangulaire supérieure, son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux. On a donc

$$\det(\Psi_n) = \left(\prod_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{((n+1)!)^2} \neq 0$$

donc

$$\boxed{\Psi_n \in \mathrm{GL}(F_n).}$$

8..5. On observe que $z = g_1 + g_2 \in F_n$. En lisant dans la matrice trouvée à la question **8.3**, on voit que :

$$\Psi(2g_1 + 3g_2) = g_1 + g_2 - \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{3} f_2$$

mais

$$\Psi(f_1 + f_2) = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{3} f_2$$

donc

$$\Psi(2g_1 + 3g_2 + f_1 + f_2) = g_1 + g_2 = z.$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\Psi^{-1}(z) = 2g_1 + 3g_2 + f_1 + f_2.}$$

Exercice 4

Questions de cours

1.

1..1. Si on note $E_0(p) = \ker(p)$ et $E_1(p) = \ker(p - \mathrm{id}_E)$, puisque p est un projecteur, on a $E = E_1(p) \oplus E_0(p)$ et d'après le théorème du rang $\dim E_1(p) = n - \dim E_0(p) = n - \ker(p) = \mathrm{rg}(p)$ donc, dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de p est :

$$\boxed{W = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array}\right).}$$

En particulier, si $r = 0$, on a $W = 0_n$ et si $r = n$, on a $W = I_n$.

1..2. Puisque W est diagonale, ses valeurs propres sont sur la diagonale. Ainsi, on a :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(W) = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad r = 0 \\ \{0, 1\} & \text{si} \quad r \in [\![1, n-1]\!] \\ \{1\} & \text{si} \quad r = n \end{cases}}$$

1..3. On a

$$\boxed{\mathrm{tr}(W) = \mathrm{tr}(I_r) = r = \mathrm{rg}(W).}$$

1..4. W étant diagonale, on a :

$$\boxed{\det(W) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \in [\![0, n-1]\!] \\ 1 & \text{si} \quad r = n \end{cases}}$$

*****

Dans la suite, on allègera la terminologie de manière légèrement abusive en identifiant une variable aléatoire matricielle avec sa réalisation. Autrement dit, on dira que M est semblable à Δ pour signifier que $M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$, que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est une valeur propre de M pour signifier que $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ est une valeur propre de $M(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$, etc.

On notera aussi $q = 1 - p$.

2.

2..1. On a $T = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ donc

$$\boxed{T(\Omega) = [\![0, n]\!]}$$

2..2. Comme observé en **2.1**, on a $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mais les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ donc :

$$\boxed{T \sim \mathcal{B}(n,p) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[T] = np.}$$

3. Chaque X_i étant de loi $\mathcal{B}(p)$, on a $X_i^2 = X_i$ et donc $\Delta^2 = \operatorname{diag}(X_1,\dots,X_n)^2 = \operatorname{diag}(X_1^2,\dots,X_n^2) = \operatorname{diag}(X_1,\dots,X_n) = \Delta$. Il s'ensuit que $M^2 = M$ et donc que M est une matrice de projecteur. D'après **1.3**, on a donc $R = \operatorname{rg}(M) = \operatorname{tr}(M) = T$. Il suit alors de **2.2** que :

$$\boxed{R \sim \mathcal{B}(n,p).}$$

4.

4..1. Puisque M est une matrice de projecteur, il suit de **1.4** que

$$\boxed{D(\Omega) \subset \{0,1\}.}$$

4..2. Puisque D est semblable à $\Delta = \operatorname{diag}(X_1,\dots,X_n)$, on a

$$D = \prod_{i=1}^n X_i$$

mais chaque X_i étant à valeurs dans $\{0,1\}$, on a :

$$(D=1) = \bigcap_{i=1}^n (X_i = 1)$$

et, par indépendance :

$$\mathbf{P}(D=1) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 1) = p^n.$$

En conclusion :

$$\boxed{D \sim \mathcal{B}(p^n) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[D] = p^n.}$$

5.

5..1. Puisque M est une matrice de projecteur, M, il suit de **1.2** que :

$$V = (\operatorname{Sp}(M) = \{0\}) \sqcup (\operatorname{Sp}(M) = \{1\})$$

mais M étant semblable à $\Delta = \operatorname{diag}(X_1,\dots,X_n)$, on a :

$$(\operatorname{Sp}(M) = \{0\}) = \bigcap_{i=1}^n (X_i = 0) \quad \text{et} \quad (\operatorname{Sp}(M) = \{1\}) = \bigcap_{i=1}^n (X_i = 1)$$

donc

$$\mathbf{P}(V) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 0) + \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = 1) = q^n + p^n.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(V) = p^n + q^n.}$$

5..2. Si M n'admet qu'une valeur propre, Z est réalisé.

Sinon, comme M est une matrice de projecteur, on a $E_0(M) \oplus E_1(M) = E$ donc, si Z est réalisé, on a nécessairement $\dim E = 2 \dim E_1(M) \in 2\mathbb{N}$.

Ainsi, si n est impair, on a $Z = V$ et donc

$$\boxed{\forall n \in 2\mathbb{N}+1, \quad \mathbf{P}(Z) = p^n + q^n.}$$

5..3. Si n est pair, Z est réalisé si, et seulement si V est réalisé ou bien si $\dim E_1(M) = \dfrac{n}{2} = r$ mais $\dim E_1(M) = \operatorname{tr}(M) = T$ et $T \sim \mathcal{B}(n,p)$ donc $\mathbf{P}(T = r) = \binom{n}{r}(pq)^r$ et

$$\mathbf{P}(Z) = \mathbf{P}(V) + \mathbf{P}(T = r) = p^n + q^n + \binom{n}{r}(pq)^r.$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Pour } n = 2r, \quad \mathbf{P}(Z) = p^n + q^n + \binom{n}{r}(pq)^r.}$$

6.

6..1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$[UU^\top]_{i,j} = [U]_{i,1}[U^\top]_{1,j} = [U]_{i,1}[U]_{j,1} = X_iX_j.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = X_iX_j.}$$

6..2. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $(X_iX_j)(\Omega) \subset \{0,1\}$.

— Si $i \neq j$, on a $\mathbf{P}\left(X_iX_j = 1\right) = \mathbf{P}\left(X_i = 1, X_j = 1\right) = \mathbf{P}(X_i = 1)\,\mathbf{P}\left(X_j = 1\right) = p^2$;

— Si $i = j$, on a $X_iX_j = X_i^2 = X_i$ car $X_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \sim \begin{cases} \mathcal{B}(p) & \text{si} \quad i = j \\ \mathcal{B}(p^2) & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}}$$

6..3. D'après **6.2**, on a $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

6..4. On a $A = UU^\top$ donc $\operatorname{rg}(A) \leq \min(\operatorname{rg}(U), \operatorname{rg}(U^\top)) = 1$. Et A n'étant pas nécessairement nulle, on a :

$$\boxed{\operatorname{rg}(A)(\Omega) = \{0,1\}.}$$

6..5. Si A est nulle, on a $\operatorname{Sp}(A) = \{0\}$. Sinon, $\operatorname{rg}(A) = 1$ donc 0 est valeur propre de A de multiplicité $n-1$. Puisque A est symétrique réelle ($a_{i,j} = X_iX_j = X_jX_i = a_{j,i}$), elle est diagonalisable donc admet une deuxième valeur propre réelle, qui est égale à $\operatorname{tr}(A)$, trace qui est elle-même égale à $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ d'après **6.3**.

On observe en outre que A est nulle si tous les X_i sont nuls, de sorte que, dans tous les cas, on a :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \left\{0, \sum_{i=1}^{n} X_i\right\}.}$$

6..6. Puisque $\mathrm{rg}(A)$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a

$$(\mathrm{rg}(A) = 0) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i = 0)$$

donc

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{rg}(A) = 0\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i = 0\right) = q^n$$

et

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{rg}(A) = 1\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\mathrm{rg}(A) = 0\right) = 1 - q^n.$$

En conclusion, on a :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) \sim \mathcal{B}(1 - q^n).}$$

*** Fin du sujet ***