

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, \dots, (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n .
2. Soit P un polynôme de E_n .
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P .
3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ de P .
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

À tout polynôme P de E_n , on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = XP(X) - \frac{1}{n}(X^2 - 1)P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q .

4. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer $T(P_k)$.
5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n .
6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E_n .
7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ .
 - 7.1. Montrer que P est de degré n .
 - 7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.
 - 7.3. En déduire une expression de P .
8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T .
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

Exercice 2

Questions de cours

1. Soient a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A) : e^{b \ln(a)} \quad (B) : e^{a \ln(b)} \quad (C) : e^{\ln(a) \ln(b)}.$$

2. Soient x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$.

Comparer t^x et t^y .

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x} dt$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

- 5.1. Déterminer l'ensemble de définition de F .

- 5.2. Déterminer le sens de variation de F .

- 5.3. Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geq \frac{1}{2}$.

- 5.4. Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

- 5.5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

- 5.6. Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \frac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n , on note g_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g_n(t) = \frac{t^{nx} \ln^n(t)}{n!}$.

- 6.1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ et donner sa somme.

- 6.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $\int_0^1 |g_n(t)| dt = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

- 6.3. Établir enfin que l'on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}.$$

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^x f(u) du$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \Psi(f)(x) = \int_0^1 f(xt) dt$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.
3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.
4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E .
5. **Surjectivité de Ψ .**

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$

- 5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- 5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

- 5.3. Soit $g \in \text{im}(\Psi)$.

Montrer que la fonction $x \mapsto xg(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

- 5.4. A-t-on $h \in \text{im}(\Psi)$?

- 5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. **Recherche des éléments propres de Ψ .**

- 7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ .

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}y = 0.$$

- 7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

- 7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

- 7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto f_i(x) = x^i \quad \text{et} \quad g_i : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

- 8.1. **On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est une base de F_n .**

Soit $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(\beta_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^n \beta_i g_i = 0$ (*).

- 8.1.1 Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

On pourra simplifier l'expression (*) par x lorsque x est non nul.

- 8.1.2 Soit $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose que $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$.

Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3 Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n .

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n .

8.2.1 Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\int_0^x t^p \ln(t) dt$ est convergente et la calculer.

8.2.2 En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n de F_n .

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n .

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto z(x) = \begin{cases} (x + x^2) \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul.

Questions de cours

1. Soit p une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.
 - 1.1. Donner, en fonction de r , une matrice W de p dans une base adaptée.
 - 1.2. Donner les spectres possibles de W .
 - 1.3. Comparer $\text{rg}(W)$ et $\text{tr}(W)$.
 - 1.4. Calculer $\det(W)$.

On considère la famille $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \text{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$.

2. On note T la variable aléatoire $\text{tr}(M)$.
 - 2.1. Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire T .
 - 2.2. Donner la loi de probabilité de T et l'espérance de la variable aléatoire T .
3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \text{rg}(M)$.
4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.
 - 4.1. Déterminer $D(\Omega)$.
 - 4.2. Donner la loi de probabilité de D et calculer l'espérance de la variable aléatoire D .
5. On se propose de déterminer la probabilité de l'événement Z :

«les sous-espaces de la matrice M ont tous la même dimension».

- 5.1. On note V l'événement : « M ne possède qu'une seule valeur propre». Calculer $\mathbf{P}(V)$.
- 5.2. On suppose n impair. Déterminer $\mathbf{P}(Z)$.

5.3. On suppose n pair et on pose $n = 2r$. Calculer $\mathbf{P}(T = r)$. En déduire $\mathbf{P}(Z)$.

6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times U(\omega)^\top = (a_{i,j}(\omega))_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$.

6.1. Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j}(\omega)$.

6.2. Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $a_{i,j}$.

6.3. Montrer que $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n X_i$.

6.4. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\text{rg}(A)$.

6.5. Pour tout $\omega \in \Omega$, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.

6.6. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\text{rg}(A)$.

*** Fin du sujet ***