Chapitre 12 : Intégrales généralisées

MP – LGT Baimbridge

2023-2024

Table des matières

1 Intégrales impropres convergentes **2**

2 Intégrales impropres absolument convergentes et intégrabilité **9**

Introduction

La théorie de l'intégration vue en première année permet d'intégrer des fonctions continues par morceaux sur des *segments*. Dans le cas de fonctions positives, l'intégrale d'une fonction f sur $[a, b]$ s'interprète alors comme l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.

Dans ce chapitre, nous allons élargir cette construction afin d'intégrer sous certaines conditions des fonctions sur des intervalles quelconques (ouverts, semi-ouverts, non bornés...). Géométriquement, l'intégrale d'une fonction positive f sur un intervalle ouvert I sera convergente lorsque l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses sur cet intervalle sera finie, malgré une divergence éventuelle de la fonction en une borne.

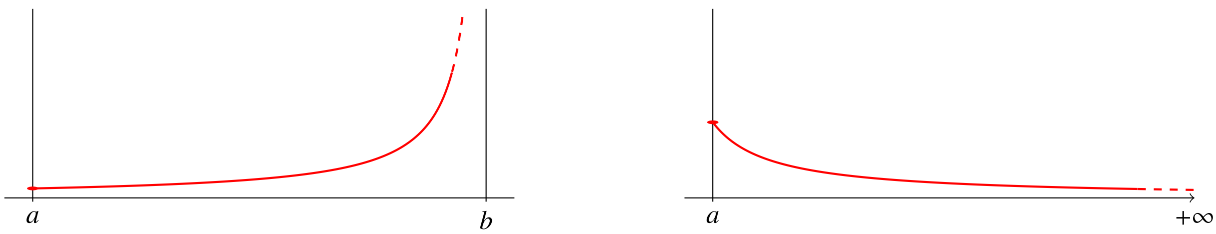


Figure 1 – Intégrales généralisées de fonctions continues sur des intervalles de la forme $[a, b[$, avec $b \leq +\infty$.

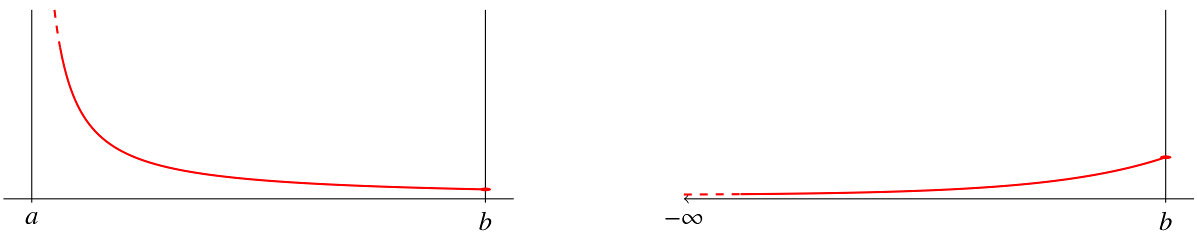


Figure 2 – Intégrales généralisées de fonctions continues sur des intervalles de la forme $]a, b]$, avec $-\infty \leq a$.

En pratique, l'étude de la convergence d'une intégrale de fonction continue f sur un intervalle de la forme $[a, b[$ consiste à déterminer l'existence de la limite de $\displaystyle\int_{[a,B]} f$ quand B tend vers b par valeurs inférieures. S'il ne s'agit fondamentalement que de calculer des intégrales sur des segments puis de passer à la limite, le cœur du chapitre consiste à mettre en place des théorèmes, analogues à ceux existant pour les séries, qui permettent de conclure rapidement quant à la convergence et au comportement asymptotique d'une intégrale.

Prérequis

- Intégration sur un segment (MPSI),
- Analyse asymptotique (MPSI),
- Séries numériques (MP).

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.
- On note $C^0_{\mathrm{m}}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- On note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ la droite numérique achevée, munie de la relation d'ordre habituelle.

1 Intégrales impropres convergentes

Dans toute cette section on considère a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1: Intégrale impropre, convergente, divergente.

Soit $f \in C^0_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{K})$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **impropre en** b. On dit qu'elle **converge** lorsque $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand x tend vers b^-.
Dans ce cas, on pose :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

On dit que l'intégrale **diverge** si elle ne converge pas.
On généralise naturellement la définition aux intégrales de fonctions $f \in C^0_{\mathrm{m}}(]a, b], \mathbb{K})$, impropres en a.

Remarque 1.1.2: Interprétation géométrique

Comme expliqué en introduction, pour une fonction f continue et positive sur $[a, b[$, la convergence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ signifie que l'aire comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses au-dessus de l'intervalle $[a, b[$ est finie.
Dans le cas d'intervalles non bornés, cela signifie que la courbe représentative de f se rapproche «suffisamment vite» de l'axe des abscisses (en dehors éventuellement de «sursauts» sommables, voir 1.2).
Dans le cas d'intervalles bornés, cela signifie que la courbe représentative de f ne «part pas trop vite à l'infini» quand on se rapproche de la borne ouverte.

Exemple 1.1.3

Considérons la fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ qui est continue sur $[0, +\infty[$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_0^x e^{-t}\, \mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1 - e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

donc l'intégrale converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, \mathrm{d}t = 1.$$

Exemple 1.1.4

Considérons la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ qui est continue sur $]0, 1]$. Alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$ est impropre en 0.
Pour tout $x \in]0, 1]$, on a :

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln |t|]_x^1 = -\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

donc l'intégrale diverge.

Exercice 1.1.5

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ **c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ **d)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

Dans la suite, tous les résultats pour les intégrales impropres à droite se généralisent naturellement aux intégrales impropres à gauche. Nous laissons le soin au lecteur d'écrire les énoncés correspondants.

Proposition 1.1.6: Indifférence de la borne inférieure

Soit $f \in C^0_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{K})$ et $c \in [a, b[$. Alors sont équivalentes :

(i) $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ converge,

(ii) $\int_c^b f(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\, \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\, \mathrm{d}t.}$$

Remarque 1.1.7: Un problème local

La proposition ci-dessus montre que la question de la convergence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ peut se restreindre à celle de la convergence de n'importe quelle intégrale de la forme $[b - \epsilon, b[$, avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi, c'est un **problème local** en b et une étude asymptotique de f en b est en général d'un grand secours pour déterminer la nature de l'intégrale, comme nous le verrons aux Sections 1.3 et 2.6.

Définition 1.1.8: Reste d'une intégrale convergente

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On appelle **reste** de l'intégrale l'application :

$$R : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t. \end{array} \right.$$

Exercice 1.1.9

Déterminer le reste en $x \geq 0$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$.

Corollaire 1.1.10

Si f est continue sur $[a, b[$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors le reste

$$R : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $[a, b[$ et a pour dérivée $-f$.

Proposition/Définition 1.1.11: Intégrale doublement impropre

Si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(]a, b[, \mathbb{K})$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **doublement impropre**. On dit qu'elle **converge** lorsqu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Dans ce cas, on pose :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

et cette égalité est vraie pour tout $c \in]a, b[$.
Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Exemple 1.1.12

Considérons la fonction $f : x \mapsto e^{-|x|}$. On a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 e^{x}\,\mathrm{d}x = 1$$

donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$$

Exercice 1.1.13

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et calculer sa valeur.

Proposition 1.1.14: Intégrale généralisée d'une fonction paire ou impaire

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \sqcup \{+\infty\}$ et $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{m}}^0(]-a,a[,\mathbb{K})$.

(i) Si f est **paire**, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

(ii) Si f est **impaire**, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

Mise en garde 1.1.15: Intégrale divergente d'une fonction impaire

Une fonction impaire peut avoir une intégrale divergente sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. C'est par exemple le cas de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Il convient donc de bien vérifier la convergence avant d'utiliser des arguments de parité/imparité.

Proposition 1.1.16: Linéarité de l'intégrale généralisée

L'ensemble $\mathcal{F}$ des applications continues par morceaux sur I dont l'intégrale sur I converge est un espace vectoriel. En outre, l'application $f \mapsto \displaystyle\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{F}$. Autrement dit,

$$\boxed{\forall (f,g) \in \mathcal{F}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \int_{\inf I}^{\sup I} (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\inf I}^{\sup I} g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

1.2 Intégrales impropres de référence

Comme pour les séries numériques, nous disposons d'intégrales de référence.

Théorème 1.2.1: Intégrales de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1}$$

et

$$\boxed{\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1.}$$

Corollaire 1.2.2

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est divergente pour toute valeur de α.

Remarque 1.2.3

En repartant de l'interprétation géométrique faite à la Remarque 1.1.2, ce résultat est très intuitif :

— sur $[1, +\infty[$, plus α est grand, plus $t \mapsto t^\alpha$ décroit vite quand t tend vers l'infini, ce qui a tendance à réduire l'aire sous la courbe ;

— à l'inverse, sur $]0, 1]$, plus α est grand, plus $t \mapsto t^\alpha$ diverge rapidement quand t tend vers 0, ce qui a tendance à faire diverger l'aire sous la courbe ;

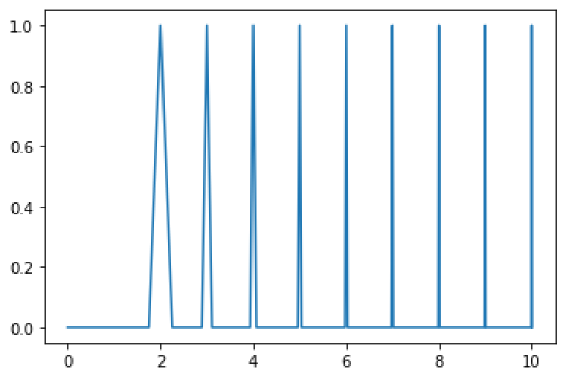
Mise en garde: Divergence grossière pour les intégrales ?

Contrairement aux séries, si $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux positive, il n'est pas nécessaire que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ pour que l'intégrale de f converge sur $\mathbb{R}_+$.

On peut par exemple considérer la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2} + \mathbb{1}_{\mathbb{Z}}(t)$ qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, dont l'intégrale converge sur $\mathbb{R}$ mais qui n'admet pas de limite en l'infini.

Si l'on souhaite un contre-exemple continu sur, on peut considérer la fonction qui est nulle en dehors de chaque intervalle de la forme $\left[k - \dfrac{1}{k^2}, k + \dfrac{1}{k^2}\right]$ avec k entier supérieur ou égal à 2, affine sur chaque $\left[k - \dfrac{1}{k^2}, k\right]$ et $\left[k, k + \dfrac{1}{k^2}\right]$ vérifiant

$$f(k) = 1, \quad f\left(k - \frac{1}{k^2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(k + \frac{1}{k^2}\right) = 0.$$



Alors, pour tout $x \geq 2$, on a :

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

L'exercice 1.2.4 montre néanmoins que l'on retrouve un résultat analogue à la divergence grossière dans le cas où f admet une limite en $+\infty$.

Exercice 1.2.4

Soit $f \in C_m^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que f admet une limite ℓ en $+\infty$.
Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\ell = 0$.

Remarque: Une analogie avec les séries ?

Nous étudierons à la Section 2.7 les raisons de l'analogie entre séries numériques et intégrales sur des intervalles non bornés.

Proposition 1.2.5: Intégrales usuelles avec le logarithme

$$\boxed{\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1 \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}}$$

Proposition 1.2.6: Intégrales usuelles avec l'exponentielle

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 0.}$$

Dans ce cas, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}.$$

1.3 Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives

Pour les fonctions positives, nous retrouvons une théorie parfaitement analogue à celle développée pour les séries numériques à termes positifs.

Lemme 1.3.1: Intégrales partielles des fonctions positives

Soit $f \in C_\mathrm{m}^0([a,b[,\mathbb{R})$, à valeurs **positives**. Alors sont équivalentes :

(i) l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;

(ii) la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Théorème 1.3.2: Comparaison pour les fonctions positives

Soient $f, g \in C^0_m([a,b[,\mathbb{R})$ telles que
$$0 \leq f \leq g.$$

Alors :

(i) Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii) Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Remarque 1.3.3: Interprétation géométrique

L'interprétation géométrique du résultat précédent est claire : si le graphe de f est sous le graphe de g et que l'aire sous la courbe représentative de g est finie, alors il en sera de même pour celle sous la courbe représentative de f.

Exercice 1.3.4

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$ **b)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+t^2}}$ **c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Corollaire 1.3.5

Soient $f, g \in C^0_m([a,b[,\mathbb{R})$ positives telles que :
$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t)) \quad \text{ou} \quad f(t) \underset{t\to b^-}{=} o(g(t)).$$

Alors :

(i) Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

(ii) Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

Exercice 1.3.6

Déterminer la nature de l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)+\cos^2(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 1.3.7

Soient $f, g \in C^0_m([a,b[,\mathbb{R})$ positives telles que :
$$f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t).$$

Alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ sont de même nature.

Exercice 1.3.8

Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{5t^2 + t + \ln(t) - \cos^2(t)}{t^3 + t^2 + 1}\,\mathrm{d}t.$$

Mise en garde 1.3.9

Comme pour les séries, l'équivalence de l'intégrande au voisinage d'une borne ouverte n'implique qu'un résultat concernant la nature de l'intégrale, et rien sur sa valeur. En effet, l'information fournie par l'analyse asymptotique est *locale* et ne dit rien du comportement de la fonction (et donc de l'aire sous la courbe correspondante) ailleurs qu'au voisinage de ce point.
Nous verrons néanmoins à la Section 2.6 qu'il est possible d'intégrer les relations de comparaison pour décrire le comportement asymptotique du reste d'une intégrale convergente, ou des intégrales partielles d'une intégrale divergente.

2 Intégrales impropres absolument convergentes et intégrabilité

2.1 Généralités

Définition 2.1.1: Intégrale absolument convergente. Fonction intégrable.

Soit $f \in C^0_{\mathrm{m}}(I, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si $\int_{\inf I}^{\sup I} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Dans ce cas, on dit que f est **intégrable** sur I et on note :

$$\boxed{f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}).}$$

Exemple 2.1.2

(i) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente,

(ii) $\int_0^1 \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Théorème 2.1.3

Soit $f \in C^0_{\mathrm{m}}(I, \mathbb{K})$. Alors f est intégrable sur I si, et seulement s'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout **segment** $J \subset I$, on ait :

$$\int_J |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M.$$

Théorème 2.1.4

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Mise en garde 2.1.5: Intégrales semi-convergentes

La réciproque du précédent théorème est fausse : il existe des intégrales qui convergent sans converger absolument. On parle d'intégrales **semi-convergentes**.

Exercice 2.1.6

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est semi-convergente.

Théorème 2.1.7: Théorème de domination

Soit $f \in C^0_m(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in C^0_m(I, \mathbb{R})$ positive telle que :

$$|f| \leq \varphi.$$

Alors :

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}).}$$

Corollaire 2.1.8

Une fonction bornée sur un **intervalle borné** est intégrable.

Exercice 2.1.9

Montrer que $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

On peut aussi généraliser le théorèmes de comparaison obtenu à la Section 1.3 :

Corollaire 2.1.10: Intégrabilité par comparaison

Soit $f \in C^0_m([a, b[, \mathbb{K})$ et $\varphi \in C^0_m([a, b[, \mathbb{R})$ positive telle que :

$$f(x) \underset{x \to b^-}{=} O(\varphi(x)) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to b^-}{=} o(\varphi(x)).$$

Alors :

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{L}^1([a, b[, \mathbb{K}).}$$

Exercice 2.1.11

Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}\ln(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

2.2 Intégrales faussement impropres

Corollaire 2.2.1: Intégrale faussement impropre

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Si $f \in C^0_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{K})$ est prolongeable par continuité en b, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

On dit alors que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **faussement impropre** en b.

Exercice 2.2.2: Intégrale de Dirichlet

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2.3 Intégrale sur un intervalle quelconque

Nous sommes maintenant en mesure de poser une définition générale :

Définition 2.3.1: Intégrale sur un intervalle

Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$. On appelle **intégrale de f sur I** :

- l'intégrale de f sur I, si I est un segment ;
- l'intégrale impropre absolument convergente $\displaystyle\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,\mathrm{d}t$ si I n'est pas un segment.

Dans tous les cas, on note ce nombre $\displaystyle\int_I f$.

Nous généralisons alors au cas d'un intervalle quelconque les propriétés connues pour les intégrales sur un segment :

Proposition 2.3.2: Linéarité de l'intégrale

$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0_{\mathrm{m}}(I, \mathbb{K})$ et l'application

$$\begin{cases} \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_I f \end{cases}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.

Proposition 2.3.3: Croissance de l'intégrale

Soient f et g des fonctions intégrales sur I. On a :

$$\boxed{f \leq g \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g.}$$

Proposition 2.3.4: Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction **positive** et intégrable sur I.

Alors
$$\int_I f \geq 0,$$
En outre, si f est **continue**, on a égalité si, et seulement si f est nulle sur I.

Proposition 2.3.5: Inégalité triangulaire

Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, alors :
$$\boxed{\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|.}$$

2.4 Intégration par parties

Théorème 2.4.1: Intégration par parties (IPP)

Soient u et v des fonctions de classe C^1 sur $]a,b[$. L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule suivante implique l'existence du troisième et l'égalité :
$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{dt} = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{dt},}$$
où
$$[u(t)v(t)]_a^b = \lim_{t\to b} u(t)v(t) - \lim_{t\to a} u(t)v(t).$$

Exercice 2.4.2

Justifier la convergence et calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Méthode 2.4.3: Pratique de l'IPP sur un intervalle quelconque

Pour effectuer une IPP sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ quelconque :

1. **Méthode prudente :** on se place sur un segment $[\alpha, \beta] \subset I$, on effectue l'IPP sur $[\alpha, \beta]$ puis on fait tendre α vers $\inf I$ et β vers $\sup I$.
2. **Méthode rapide :** on effectue directement l'IPP avec des bornes ouvertes, en prenant soin de vérifier la convergence de deux des trois termes impliqués dans le calcul.

2.5 Changement de variable

Théorème 2.5.1: Changement de variable

Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et soit $\varphi : J \longrightarrow I$ une bijection de classe C^1 sur un intervalle J. Alors $(f \circ \varphi) \times |\varphi'|$ est intégrable sur I et :

$$\boxed{\int_I f = \int_J (f\circ\varphi)\times|\varphi'|.}$$

Exercice 2.5.2

En effectuant le changement de variable $\varphi(t) = \frac{1}{t}$, montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode 2.5.3: Pratique du changement de variable sur un intervalle quelconque

Pour effectuer un changement de variable sur un intervalle quelconque :

1. on vérifie l'intégrabilité de la fonction considérée,
2. on applique la même méthode que sur un segment, en prenant soin de vérifier l'hypothèse de bijectivité.

2.6 Intégration des relations de comparaison

Nous établissons maintenant des résultats d'intégration des relations de comparaison, parfaitement analogues à ceux que nous avons obtenus pour les séries.

Théorème 2.6.1: Domination et prépondérance dans le cas divergent

Soient $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues par morceaux.

Supposons que $\int_a^b f(t)\,dt$ **diverge**. Alors :

(i) Si $f(x) \underset{x\to b^-}{=} O(g(x))$, on a : $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

(ii) Si $f(x) \underset{x\to b^-}{=} o(g(x))$, on a : $\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Corollaire 2.6.2: Intégration des équivalents dans le cas divergent

Soient $f, g \in C^0_{\mathrm{m}}([a,b[,\mathbb{R})$ des fonctions **positives** telles que

$$f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x).$$

Supposons que $\int_a^b f(t)\,dt$ **diverge**. Alors

$$\boxed{\int_a^x f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Théorème 2.6.3: Domination et prépondérance dans le cas convergent

Soient $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions continues par morceaux.

Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **converge**. Alors :

(i) Si $f(x) \underset{x\to b^-}{=} O(g(x))$, on a : $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

(ii) Si $f(x) \underset{x\to b^-}{=} o(g(x))$, on a : $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{=} o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Corollaire 2.6.4: Intégration des équivalents dans le cas convergent

Soient $f, g \in C^0_{\mathrm{m}}([a, b[, \mathbb{R})$ des fonctions **positives** telles que

$$f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x).$$

Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ **converge**. Alors

$$\boxed{\int_x^b f(t)\,dt \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Exercice 2.6.5

Déterminer un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

Remarque 2.6.6

Comme pour le séries numériques, on pourra retenir que, pour des fonctions positives :

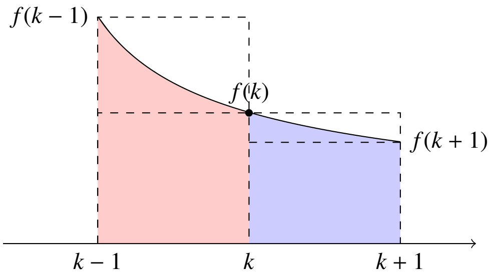
— en cas de divergence, les relations de comparaison se transmettent aux «intégrales partielles» ;

— en cas de convergence, les relations de comparaison se transmettent aux restes.

2.7 Technique de comparaison séries-intégrales

Aucun résultat de comparaison série-intégrales n'est explicitement au programme mais les techniques pour les établir doivent être connus.

Considérons une fonction f continue par morceaux et **monotone** sur $[n_0, +\infty[$, avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère la série $\sum\limits_{k\geq n_0} f(k)$ dont on note $(S_n)_{n\geq n_0}$ la suite de ses sommes partielles. La technique de comparaison série-intégrale repose sur le schéma suivant :



d'où l'on déduit la chaîne d'inégalités, pour tout $k \geq n_0 + 1$:

$$f(k-1) \geq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(k) \geq \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(k+1).$$

En sommant ces inégalités sur $k \geq n_0 + 1$:

$$\boxed{\sum_{k \geq n_0} f(k) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}}$$

C'est de ce fait que proviennent de nombreux résultats analogues pour les séries numériques et pour les intégrales généralisées sur des intervalles de la forme $[n_0, +\infty[$, comme par exemple les intégrales de Riemann (ou, plus généralement, de Bertrand).

Annexe : Attendus de fin de chapitre

Compétences et savoir-faire fondamentaux

À l'issue de ce chapitre, vous devez être capables de :

C12.1. Étudier la **convergence** de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque.

- à l'aide d'un prolongement éventuel,
- par une analyse locale ($\sim$, o, O),
- par domination par une une fonction intégrable,
- par une comparaison série-intégrale.

C12.2. Étudier l'**intégrabilité** d'une fonction sur un intervalle quelconque.

C12.3. **Calculer** la valeur d'une intégrale généralisée.

- par intégration sur un segment puis passage à la limite,
- par intégration par parties généralisée,
- par changement de variable généralisé.

C12.4. Intégrer des **relations de comparaison**.

- dans le cas d'une intégrale convergente («restes»),
- dans le cas d'une intégrale divergente («intégrales partielles»).

Résultats-clés du chapitre

R12.1. Théorèmes de comparaison.

R12.2. Intégrales faussement impropres.

R12.3. Intégrales de Riemann (en 0 et en $+\infty$)

R12.4. Intégration par parties généralisée.

R12.5. Changement de variable généralisé.

R12.6. Intégration des relations de comparaison.