Chapitre 13 : Intégrales à paramètres

MP – LGT Baimbridge

2023-2024

Table des matières

1 Interversion limite et intégrale **2**

2 Interversion série et intégrale **5**

3 Continuité sous le signe somme **7**

4 Dérivation sous le signe somme **9**

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à quatre problématiques similaires, qui se ramènent à intervertir une limite et un signe intégral.

Dans le cas d'intégrales sur un segment, certain de ces résultats ont déjà été vus dans le chapitre sur les suites et séries de fonctions. Mais dans le cas d'intégrales généralisées, il est nécessaire d'introduire de nouveaux outils reposant pour l'essentiel sur le théorème de *convergence dominée de Lebesgue*.

Point historique: Henri Lebesgue (1875-1941)

Henri Lebesgue, mathématicien français né à Beauvais en 1875 et décédé à Paris en 1941. L'héritage principal qu'il a laissé aux mathématiques est la théorie de l'intégration qui porte aujourd'hui son nom, laquelle généralise celle de Riemann et compléta les travaux de théorie de la mesure déjà effectués par Émile Borel (1871-1956).
Cette théorie de l'intégration s'est avérée fondamentale pour unifier les théories discrètes et continues des probabilités ; elle est généralement étudiée à partir de la troisième année d'études post-bac.

Prérequis

- Suites et séries de fonctions (MP),
- Intégration classique (MPSI) et généralisée (MP).

Notations

Dans ce chapitre, on adopte les notations suivantes :

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Interversion limite et intégrale

L'objectif de cette section est d'établir une condition suffisante sur une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intégrables sur un intervalle I qui converge (simplement ou uniformément) vérifie :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n.}$$

1.1 Le cas d'un intervalle borné

Commençons par observer que le résultat n'est pas valable sous une hypothèse de convergence simple :

Exercice 1.1.1: Contre-exemple sous convergence simple sur un segment

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur le **segment** $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = n^2 x e^{-nx}.$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.
2. Montrer que, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
3. Conclure.

Sous hypothèse de convergence uniforme sur un intervalle borné, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.2: Convergence uniforme sur un segment

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle **borné** I et qui converge **uniformément** sur I vers une fonction f. Alors f est continue sur I et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.2 Le cas d'un intervalle quelconque

L'exercice ci-dessous montre que la convergence uniforme ne suffit pas pour intervertir limite et intégrale dans le cas d'un intervalle quelconque.

Exercice 1.2.1: Contre-exemple sous convergence uniforme sur un intervalle quelconque

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \frac{t^n e^{-t}}{n!}.$$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
3. Conclure.

Sur un intervalle quelconque, le théorème le plus puissant dont on dispose est le suivant :

Théorème 1.2.2: Théorème de convergence dominée (Lebesgue, 1901)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Supposons que :

i) chaque f_n est intégrable sur I ;

ii) (f_n) converge **simplement** vers une fonction f continue par morceaux sur I ;

iii) *Domination :* il existe φ continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq \varphi.$$

Alors f est intégrable sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

Démonstration. La démonstration est explicitement hors-programme. La raison principale n'est pas tant sa technicité mais le fait que sa logique relève davantage d'une autre façon de définir l'intégrale, à savoir la *théorie de la mesure* de Lebesgue. □

Remarque 1.2.3

En pratique, si on trouve une telle fonction φ en ayant uniquement vérifié la continuité par morceaux des f_n, l'hypothèse de domination assure l'intégrabilité de chaque f_n, ce qui permet d'alléger la vérification du premier point.

Remarque 1.2.4

Le Théorème 1.1.2 se retrouve à partir du théorème de convergence dominée (TCD). En effet, dans le cas où I est un segment et où la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, puisque $|f|$ est majorée par un réel M sur ce segment, alors à partir d'un certain rang chaque f_n est majorée en valeur absolue par la constante $M+1$ qui est intégrable sur I, et le TCD s'applique.

Exercice 1.2.5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+nx+x^2}.$$

Calculer $\lim\limits_{n} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

Remarque 1.2.6: À propos de la continuité par morceaux

L'étudiant attentif prendra garde au fait qu'une limite simple de fonctions continues par morceaux n'est pas nécessairement continue par morceaux. Il convient donc en toute rigueur de vérifier cette propriété de f *avant* d'appliquer le théorème de convergence dominée. Néanmoins, cette vérification devenant inutile dans le cadre de l'intégration de Lebesgue dont ce théorème relève *in fine*, le programme de MP précise que :

> « *on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.* »

Remarque 1.2.7: Extension du théorème de convergence dominée

Le théorème de convergence dominée s'applique aussi pour une famille $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où λ varie dans un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ et où a est adhérent à J. Les hypothèses sont alors :

i) chaque f_λ est intégrable sur I ;

ii) Pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t)$ admet une limite $f(t)$ quand λ tend vers a ;

iii) *Domination :* il existe φ continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall \lambda \in J, \quad |f_\lambda| \leq \varphi.$$

Alors f est intégrable sur I et $\lim\limits_{\lambda\to a} \int_I f_\lambda = \int_I f$.

Exercice 1.2.8: Oral CCINP 2023

On considère

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F admet une limite en $+\infty$ et la déterminer.

2 Interversion série et intégrale

L'objectif de cette section est d'établir une condition suffisante sur une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ définies sur un intervalle I afin que :

$$\boxed{\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.}$$

2.1 Le cas d'un intervalle borné

Nous commençons par rappeler un résultat établi précédemment pour les séries de fonctions continues sur des intervalles bornés :

Théorème 2.1.1: Convergence uniforme sur un segment

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle **borné** I telle que la série $\sum_n f_n$ converge **uniformément** sur I.
Alors la série numérique $\sum_n \left(\int_I f_n\right)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n\right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right).$$

Exercice 2.1.2

Montrer que

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

2.2 Le cas d'un intervalle quelconque

Comme pour les suites de fonctions, la convergence uniforme ne suffit plus dans le cas d'un intervalle quelconque.

Théorème 2.2.1: Intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Supposons que :

i) chaque f_n est intégrable sur I ;

ii) $\sum_n f_n$ converge **simplement** vers une fonction continue par morceaux sur I ;

iii) la série $\sum_n \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mise en garde 2.2.2

Nous verrons en exercice que la valeur absolue ne peut être enlevée de l'hypothèse **iii)**.

Exercice 2.2.3

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt} \right) \mathrm{d}t = 2\zeta(3),$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

3 Continuité sous le signe somme

Nous considérons dans cette section une fonction de deux variables

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array} \right.$$

où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

On s'intéresse alors à la continuité de la **fonction définie par une intégrale** :

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

3.1 Le théorème de continuité

Théorème 3.1.1: Théorème de continuité

Avec les notations précédentes, supposons que :

i) *Intégrabilité :* Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et **intégrable** sur I ;

ii) *Continuité :* Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur J ;

iii) *Domination :* Il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$$

est continue sur J.

Remarque 3.1.2: Domination sur tout segment

Dans de nombreux cas, il n'est pas possible d'établir une hypothèse de domination valable sur J tout entier. Néanmoins, la continuité étant une propriété locale, il suffit de trouver **une hypothèse de domination au voisinage de chaque point de** J, ce que l'on fait en général à l'aide d'une hypothèse de domination sur tout segment :

iii') *Domination sur tout segment :* Pour tout segment $K = [a,b] \subset J$, il existe $\varphi_K : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \quad |f(x,t)| \leq \varphi_K(t).$$

Dans les deux cas, F est continue sur J.

Remarque 3.1.3: Une version un peu plus générale

Bien qu'il soit généralement utilisé dans le cas où le paramètre varie dans un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, les programmes de CPGE prévoient que le théorème de continuité s'énonce dans un cadre plus général, à savoir celui où J est une partie quelconque d'un espace vectoriel normé de dimension finie. Dans ce cas, le point **iii)** peut être remplacé par une hypothèse de domination locale, à savoir :

iii") *Domination sur tout compact :* Pour tout compact $K \subset J$, il existe $\varphi_K : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in K \times I, \quad |f(x,t)| \leq \varphi_K(t).$$

La partie I dans laquelle varie la variable d'intégration t reste ici un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.2 Application à la fonction Γ

♫ Considérons la fonction Gamma d'Euler, définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

On pose $J =]0, +\infty[$, $I = [0, +\infty[$ et

$$\forall t \in J \times I, \quad f(x,t) = t^{x-1} e^{-t}.$$

i) *Intégrabilité :* Nous avons déjà établi dans un précédent chapitre que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

ii) *Continuité :* Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $x \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

iii) *Domination sur tout segment :* Soient $(a, b) \in J^2$ tels que $a < b$. Pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$|f(x,t)| \leq \varphi(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

La fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\Gamma \text{ est continue sur }]0, +\infty[.}$$

4 Dérivation sous le signe somme

Nous considérons dans cette section une fonction de deux variables

$$f : \begin{cases} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{cases}$$

où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On s'intéresse alors à la dérivabilité de la fonction définie par une intégrale :

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

On souhaite notamment établir une condition suffisante pour que, pour tout $x \in J$, on ait :

$$\boxed{F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.}$$

4.1 Le théorème de dérivabilité

Théorème 4.1.1: Théorème de Leibniz

Avec les notations précédentes, supposons que :

i) *Intégrabilité :* Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues par morceaux et **intégrables** sur I ;

ii) *Régularité :* Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur J ;

iii) *Domination :* Il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in J \times I, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur J et, pour tout $x \in J$, on a :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 4.1.2

Comme pour la continuité, la dérivabilité étant une propriété locale, il est possible de n'établir l'hypothèse de domination que localement. En pratique, le point **iii)** peut être remplacé par :

iii') *Domination sur tout segment :* Pour tout segment $K = [a,b] \subset J$, il existe $\varphi_K : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t).$$

Dans ce cas, F est encore C^1 sur J et on a $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

4.2 Le cas C^k

Le théorème de Leibniz se généralise aux fonctions de classe C^k comme suit :

Théorème 4.2.1: Théorème de Leibniz (version C^k)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Avec les notations précédentes, supposons que :

i) *Intégrabilité :* Pour tout $x \in J$ et tout $p \in [\![1, k]\!]$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ sont continues par morceaux et **intégrables** sur I ;

ii) *Régularité :* Pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur J ;

iii) *Domination :* Pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, il existe $\varphi_p : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall (x,t) \in J \times I, \quad \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) \right| \leq \varphi_p(t).$$

Alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\, \mathrm{d}t$ est de classe C^k sur J et, pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, pour tout $x \in J$, on a :

$$F^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

Remarque 4.2.2

Comme précédemment, on peut remplacer l'hypothèse de domination globale par une hypothèse de domination locale.

4.3 Application à la fonction Γ

Revenons à notre fonction Gamma d'Euler, définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

On pose $J =]0, +\infty[$, $I = [0, +\infty[$ et

$$\forall t \in J \times I, \quad f(x,t) = t^{x-1} e^{-t}.$$

La fonction $x \mapsto f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^∞ sur J et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln t)^p e^{-t} t^{x-1}.$$

Alors, pour tout segment $[a,b] \subset]0, +\infty[$, on a :

$$\forall x \in [a,b], \quad \left| (\ln t)^p e^{-t} t^{x-1} \right| \leq \varphi_p(t) = \begin{cases} |\ln(t)|^p\, t^{a-1} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ \ln(t)^p e^{-t} t^{b-1} & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$$

et φ_p est intégrable sur $]0, +\infty[$ de sorte que :

$$\boxed{\Gamma \in C^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^p e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.}$$

En particulier, on observe que $\Gamma'' > 0$ de sorte que Γ est strictement **convexe**.

Point Python 4.3.1

La fonction Γ est codée dans le module `scipy.special`, ainsi que de nombreuses fonctions usuelles comme la factorielle.
Le script Python ci-dessous a permis d'obtenir la représentation graphique suivante :

```
from scipy.special import gamma, factorial
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

nmax = 5 # Abscisse maximale
epsilon = 0.05 # Abscisse minimale
numpoints = 100 # Nombre de points d'interpolation

X = np.linspace(epsilon,nmax,numpoints)
G = [gamma(x) for x in X]
N = [k for k in range(1,nmax+1)]

plt.plot(X,G,label=r"$\Gamma(x)$")
plt.plot(N,[factorial(k-1) for k in N],'kx',label=r"$(n-1)!$")
plt.legend()
plt.show()
```

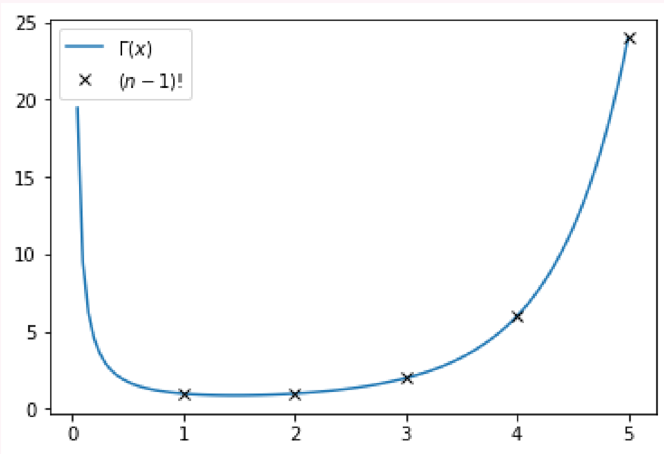

FIGURE 1 – Fonction Γ et $n \mapsto (n-1)!$ sur $]0,5]$.

Annexe : Attendus de fin de chapitre

Compétences et savoir-faire fondamentaux

À l'issue de ce chapitre, vous devez être capables de :

C13.1. Intervertir **limite et intégrale** sur un intervalle quelconque.

C13.2. **Intégrer terme à terme** une série de fonctions sur un intervalle quelconque.

C13.3. Établir la **continuité** d'une application définie par une intégrale à paramètre.

C13.4. Établir la **dérivabilité** d'une application définie par une intégrale à paramètre.

C13.5. **Dériver** une application définie par une intégrale à paramètre.

Résultats-clés du chapitre

R13.1. Théorème de convergence dominée (Lebesgue).

R13.2. Théorème d'intégration terme à terme.

R13.3. Théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$.

R13.4. Théorème de dérivabilité sous le signe $\displaystyle\int$ (Leibniz).

- cas C^1 ;
- cas C^k.