CCINP - MP 2023 - Mathématiques 2

Éléments de correction

Exercice 1

Q1. On commence par observer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est bien définie d'après ce qui a été admis en préambule et par linéarité des intégrales convergentes.

Symétrique : Soit $(P, Q) \in E$. Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\langle Q, P\rangle = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \langle P, Q\rangle\,.$$

Bilinéaire : La symétrie étant établie, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Soit $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + Q, R\rangle &= \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x)R(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} P(x)R(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} Q(x)R(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{(intégrales convergentes)}\\ &= \lambda\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle\,.\end{aligned}$$

Définie positive : On rappelle que l'intégrale convergente d'une fonction continue positive est positive. En outre, elle est nulle si, et seulement si, la fonction est identiquement nulle sur l'intervalle d'intégration. Soit alors $P \in E$. On a :

$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} \underbrace{P^2(x)e^{-x}}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

d'où la positivité.

En outre, on a égalité si, et seulement si, pour tout $x \geq 0$, $P^2(x)e^{-x} = 0$, c'est-à-dire si P s'annule sur $\mathbb{R}_+$ entier, auquel cas P a une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

En conclusion :

$$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Q2. Nous allons commencer par déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$ en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base $(1, X)$.

— On $\langle 1, 1\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0! = 1$ donc on pose $P_1 = 1$.

— On a $\langle 1, X\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 1! = 1$ donc pose pose $Q_2 = X - 1$ et $P_2 = \dfrac{Q_2}{\|Q_2\|}$. Mais on a :

$$\|Q_2\|^2 = \langle Q_2, Q_2\rangle = \int_0^{+\infty} (x-1)^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2 - 2 + 1 = 1$$

de sorte que $P_2 = X - 1$.

Ainsi, une base orthonormée de F est $(P_1, P_2) = (1, X - 1)$.

On peut alors calculer le projeté orthogonal sur F de X^2 à l'aide de son expression en base orthonormée :

$$p_F(X^2) = \left\langle X^2, P_1\right\rangle \cdot P_1 + \left\langle X^2, P_2\right\rangle \cdot P_2$$

qui se traduit en

$$p_F(X^2) = \left\langle X^2, 1\right\rangle + \left\langle X^2, X - 1\right\rangle (X - 1)$$

mais $\left\langle X^2, 1\right\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2! = 2$ et $\left\langle X^2, X - 1\right\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} (x^3 - x^2)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 3! - 2! = 4$ de sorte que

$$\boxed{p_F(X^2) = 4X - 2.}$$

Q3. Puisque p_F est un projecteur orthogonal, pour tout vecteur x de E, $x - p_F(x)$ et $p_F(x)$ sont orthogonaux et, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$$

et donc, pour $x = X^2$, on a bien :

$$\boxed{\left\|X^2 - p_F(X^2)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|p_F(X^2)\right\|^2 .}$$

On a alors

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x}\, \mathrm{d}x = \inf_{P\in F} \int_0^{+\infty} (x^2 - P(x))^2 e^{-x}\, \mathrm{d}x = \inf_{P\in F} \left\|X^2 - P\right\|^2 = d_F(X^2)^2 = \left\|X^2 - p_F(X^2)\right\|^2$$

mais, d'après ce qui précède et **Q2**, on a :

$$\left\|X^2 - p_F(X^2)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \left\|p_F(X^2)\right\|^2 = \left\|X^2\right\|^2 - \|4X - 2\|^2$$

et

$$\left\|X^2\right\|^2 = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\, \mathrm{d}x = 4! = 24$$

et

$$\|4X - 2\|^2 = \int_0^{+\infty} (4x - 2)^2 e^{-x}\, \mathrm{d}x = 32 - 16 + 4 = 20$$

de sorte que

$$\boxed{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x}\, \mathrm{d}x = 4.}$$

Exercice 2

Q4. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

— Si $m > n$, $(Z = m) \cap (T = n)$ se réalise si l'une des deux variables prend la valeur m et l'autre la valeur n. Comme $m \neq n$, les événements $[(X = m) \cap (Y = n)]$ et $[(X = n) \cap (Y = m)]$ sont disjoints et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n)) &= \mathbf{P}((X = m) \cap (Y = n)) + \mathbf{P}((X = n) \cap (Y = m)) \\
&= \mathbf{P}(X = m)\,\mathbf{P}(Y = n) + \mathbf{P}(X = n)\,\mathbf{P}(Y = m) \qquad \text{par indépendance} \\
&= pq^m pq^n + pq^n pq^m \\
&= 2p^2 q^{m+n}.
\end{aligned}$$

— Si $m = n$, $(Z = m) \cap (T = n)$ se réalise si les deux variables sont égales à n et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n)) &= \mathbf{P}((X = n) \cap (Y = n)) \\
&= \mathbf{P}(X = n)\,\mathbf{P}(Y = n) \qquad \text{par indépendance} \\
&= pq^n pq^n \\
&= p^2 q^{2n}.
\end{aligned}$$

— Si $m < n$, l'événement $(Z = m) \cap (T = n)$ est vide car $Z = \sup(X, Y) \geq \inf(X, Y) = T$ donc

$$\mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n)) = 0.$$

En conclusion, on a :

$$\boxed{\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n)) = \begin{cases} 2p^2 q^{m+n} & \text{si} \quad m > n \\ p^2 q^{2n} & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Q5. Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a $\mathbf{P}(Z = 0) = \mathbf{P}((X = 0) \cap (Y = 0)) = p^2$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(T = n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = m) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n)) \\
&= \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n)) \\
&= \mathbf{P}((Z = m) \cap (T = m)) + \sum_{n=0}^{m-1} \mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n)) \\
&= p^2 q^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2 q^{m+n} \\
&= p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \sum_{n=0}^{m-1} q^n \\
&= p^2 q^{2m} + 2p^2 q^m \times \frac{1 - q^m}{1 - q} \\
&= p^2 q^{2m} + 2pq^m (1 - q^m)
\end{aligned}$$

et on observe que cette formule reste valable pour $m = 0$.
Ainsi, la loi de Z est donnée par :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Z = m) = p^2 q^{2m} + 2pq^m (1 - q^m).}$$

Problème

Dans cette correction, on utilisera librement le fait que, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'ensemble $\mathbb{C}[u]$ des polynômes en u est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. Il en est donc de même pour l'algèbre $\mathbb{C}[A]$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie I

Q6. A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable. Sans faire appel au théorème spectral, on peut aussi remarquer que $\chi_A(X) = X^2 - 6X + 5 = (X-1)(X-5)$ est scindé à racines simples ; A admettant un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable.

On a

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et un calcul matriciel immédiat donne :

$$\boxed{\Pi_1^2 = \Pi_1 \quad \text{et} \quad \Pi_2^2 = \Pi_2}$$

de sorte que Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteurs.

En outre, on a

$$\boxed{\Pi_1 + \Pi_2 = I_2, \quad \Pi_1 + 5\Pi_2 = A \quad \text{et} \quad \Pi_1\Pi_2 = 0_2.}$$

Q7. Soit $x \in \ker(P(u))$. On a

$$((PQ)(u))(x) = ((QP)(u))(x) = (Q(u) \circ P(u))(x) = Q(u)(P(u)(x)) = Q(u)(0_E) = 0_E$$

donc

$$\boxed{\ker(P(u)) \subset \ker(PQ(u)).}$$

Puisque P et Q sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe U, V dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $PU + QV = 1$. En évaluant en u, il vient :

$$(PU)(u) + (QV)(u) = \mathrm{id}_E$$

et, en évaluant en $x \in \ker[(PQ)(u)]$, on a donc :

$$((PU)(u))(x) + ((QV)(u))(x) = x.$$

Mais $((PU)(u))(x) \in \ker(Q(u))$ car

$$Q(u)\,((PU)(u))(x)) = ((QPU)(u))(x) = ((UPQ)(u))(x) = U(u)\,\underbrace{((PQ(u))(x))}_{=0_E} = 0_E$$

et, de même $((QV)(u))(x) \in \ker(P(u))$ de sorte que

$$\ker((PQ)(u)) = \ker(P(u)) + \ker(Q(u)).$$

Pour montrer que la somme est directe, on prend $x \in \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$. Alors, en reprenant l'identité de Bézout évaluée en u puis en x, on obtient :

$$x = ((PU)(u))(x) + ((QV)(u))(x) = U(u)(\underbrace{(P(u)(x))}_{=0_E} + V(u)(\underbrace{Q(u)(x)}_{=0_E}) = 0_E$$

et on a bien :

$$\boxed{\ker\left((PQ)(u)\right) = \ker\left(P(u)\right) \oplus \ker\left(Q(u)\right).}$$

Q8. On a

$$Q_1 = \frac{\pi_u}{P_1^{k_1}} = P_2^{k_2} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{\pi_u}{P_2^{k_2}} = P_1^{k_1}$$

mais, puisque P_1 et P_2 sont premiers entre eux, $P_1^{k_1}$ et $P_2^{k_2}$ le sont, c'est-à-dire $Q_1 \wedge Q_2 = 1$. D'après le théorème de Bézout :

$$\boxed{\exists (R_1, R_2) \in \mathbb{C}[X]^2, \quad Q_1 R_1 + Q_2 R_2 = 1.}$$

Q9. Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ avec $i \neq j$. On a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_i R_j)(u) \circ (Q_i Q_j)(u) \end{aligned}$$

mais $\pi_u | Q_i Q_j$ donc $(Q_i Q_j)(u) = 0$ et donc $p_i \circ p_j = 0$.
D'autre part, en évaluant en u l'identité de Bézout généralisée :

$$\sum_{i=1}^{m} R_i Q_i = 1,$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} R_i(u) \circ Q_i(u) = \mathrm{id}_E$$

Enfin, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on a

$$p_j = p_j \circ \mathrm{id}_E = p_j \circ \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} p_j \circ p_i = p_j^2$$

donc p_j est un projecteur.
On a donc bien :

$$\boxed{p_i \circ p_j = 0 \text{ si } i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \text{chaque } p_j \text{ est un projecteur.}}$$

Q10. Posons, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $P_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Les λ_i étant deux à deux distincts, les P_i sont deux à deux premiers entre eux. Comme $\chi_u = \prod_i P_i$, le lemme de décomposition des noyaux implique que :

$$\ker(\chi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(P_i(u))$$

mais $\chi_u(u) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc $\ker(\chi_u(u)) = E$. D'autre part, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a $\ker(P_i(u)) = \ker\left((u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}\right) = N_i$ donc on a bien :

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i.}$$

Q11. D'après **Q9**, si on évalue en $x \in E$ l'identité $\sum_{i=1}^{m} p_i = \mathrm{id}_E$, on trouve :

$$x = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)$$

donc $E = \mathrm{im}(p_1) + \cdots + \mathrm{im}(p_m)$. Montrons que la somme est directe.
Soit $(v_1, \ldots, v_m) \in \mathrm{im}(p_1) \times \cdots \times \mathrm{im}(p_m)$ tel que $v_1 + \ldots + v_m = 0_E$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, si on applique p_i à cette identité, comme $p_i(v_j) = 0$ si $j \neq i$ et $p_i(v_i) = v_i$, il vient $v_i = 0_E$. Ainsi, la somme est directe.
On a donc bien :

$$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{im}(p_i).}$$

Q12. Soit $i \in [\![1, m]\!]$. Puisque p_i est un projecteur, on a

$$\mathrm{im}(p_i) = \ker(p_i - \mathrm{id}_E) = \ker\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} p_j\right)$$

mais, pour tout $j \in [\![1, m]\!] \setminus \{i\}$ on a

$$p_j = R_j(u) \circ Q_j(u)$$

et $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ divise Q_j puisque j est différent de i. Puisque la restriction de $(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$ à N_i est nulle par définition de N_i, on a pour tout $x \in N_i$,

$$p_j(x) = R_j(u)\underbrace{\big(Q_j(u)(x)\big)}_{=0_E} = 0_E$$

donc $N_i \subset \ker(p_j)$ et donc :

$$N_i \subset \ker\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} p_j\right) = \mathrm{im}(p_i).$$

En particulier, $\dim(N_i) \leq \dim \mathrm{im}(p_i)$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Mais, en passant à la dimension dans les sommes directes de **Q10** et **Q11**, on a nécessairement égalité des dimensions pour chaque facteur, et alors :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \mathrm{im}(p_i) = N_i.}$$

Partie II

Q13. u est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples. Les racines du polynôme minimal étant les valeurs propres de u et celui-ci étant unitaire, on a donc :

$$\boxed{\pi_u = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i).}$$

Q14. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a $Q_i = \prod_{j\neq i}(X - \lambda_j)$ donc

$$\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)} = \frac{1}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)}.$$

D'autre part, d'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ complexes tels que :

$$\frac{1}{\pi_u} = \frac{1}{\prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{(X - \lambda_i)}$$

et, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a :

$$\alpha_i = \left[\frac{X - \lambda_i}{\pi_u}\right]_{|X=\lambda_i} = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)} = \theta_i$$

de sorte que :

$$\boxed{\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^m \frac{\theta_i}{(X - \lambda_i)}.}$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{Q_i(\lambda_i)} Q_i(u) = \sum_{i=1}^m \theta_i Q_i(u) = \frac{\pi_u}{\pi_u} = 1$$

donc, en posant $R_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a la relation

$$R_1 Q_1 + \cdots + R_m Q_m = 1$$

et, en utilisant **Q9**, les projecteurs associés à u vérifient :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!], \quad p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}.}$$

Q15. Posons $L(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$. Si on explicite ce polynôme, on peut reconnaître un polynôme d'interpolation de Lagrange. Mais sans employer de grands mots, on observe que, pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, on a :

$$L(\lambda_j) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(\lambda_j)}{Q_i(\lambda_i)}$$

mais $Q_j(\lambda_i) = 0$ si $j \neq i$ donc

$$L(\lambda_j) = \lambda_j.$$

D'autre part, chaque Q_i étant de degré $m-1$, on a $L(X) \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ et donc $L(X) - X \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ admet $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ comme racines distinctes, d'où $L(X) - X = 0$. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}.}$$

Si on évalue en u cette identité, il suit de l'expression de p_i trouvé à la question **Q14** que la décomposition spectrale de u est :

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i.}$$

Q16. **a.** A est symétrique réelle donc diagonalisable. Par simple calcul matriciel, on observe que

$$\boxed{A^2 = 4I_4.}$$

b. D'après la question précédente, $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ annule A. Ainsi, $\pi_A \in \{X-2, X+2, (X-2)(X+2)\}$. Mais puisque $A \neq \pm 2I_4$, on a nécessairement

$$\boxed{\pi_A = (X-2)(X+2).}$$

Considérons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ canoniquement associé à A. Avec les notations des questions **Q14** et **Q15**, si on pose $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$, on a

$$Q_1 = X+2, \quad Q_2 = X-2 \quad \text{et} \quad \theta_1 = \frac{1}{4}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{4}$$

de sorte que les projecteurs spectraux associés à u sont :

$$p_1 = \frac{1}{4}(u + 2\mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad p_2 = -\frac{1}{4}(u - 2\mathrm{id}_E)$$

et donc, les matrices canoniquement associés sont :

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(A + 2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = -\frac{1}{4}(A - 2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition spectrale de A est alors :

$$\boxed{A = 2\Pi_1 - 2\Pi_2.}$$

c. Les matrices Π_1 et Π_2 commutent car $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0_4$ donc, d'après le binôme de Newton, on a, pour tout $q \geq 1$:

$$A^q = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (2\Pi_1)^k (-2\Pi_2)^{q-k}$$

et seuls les termes correspondant à $k = 0$ et $k = q$ subsistent dans cette somme. Ainsi, on a :

$$A^q = 2^q \Pi_1^q + (-2)^q \Pi_2^q$$

mais, comme Π_1 et Π_2 sont des matrices de projecteurs, $\Pi_1^q = \Pi_1$ et $\Pi_2^q = \Pi_2$. Finalement, il vient :

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad A^q = 2^q \Pi_1 + (-2)^q \Pi_2.}$$

Remarque : On peut continuer et simplifier cette expression en raisonnant sur la parité de q :

— Si q est pair, on a :

$$A^q = 2^q \Pi_1 + (-2)^q \Pi_2 = 2^q(\Pi_1 + \Pi_2) = 2^q I_4$$

car $\Pi_1 + \Pi_2 = I_4$.

— Si q est impair, on a :

$$A^q = 2^q \Pi_1 + (-2)^q \Pi_2 = 2^q(\Pi_1 - \Pi_2) = 2^{q-1}(2\Pi_1 - 2\Pi_2) = 2^{q-1} A$$

car $2\Pi_1 - 2\Pi_2 = A$ d'après la décomposition spectrale établie en **Q16.c**.

En conclusion, on a :

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad A^q = \begin{cases} 2^q I_4 & \text{si} \quad q \text{ est pair,} \\ 2^{q-1} A & \text{si} \quad q \text{ est impair.} \end{cases}}$$

Ce dernier résultat aurait pu être trouvé et démontré par une récurrence élémentaire à partir de la relation $A^2 = 4I_4$, mais il ne permet pas de retrouver la décomposition spectrale de A^q que donne la formule demandée par l'énoncé.

Q17. Notons $d = \deg(\pi_v)$. D'après le théorème de division euclidienne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}_{d-1}[X]$ tel que $X^n = Q\pi_v + R$. En évaluant en v, on a donc $v^n = R(v)$ car π_v annule v mais $R \in \mathbb{C}_{d-1}[X]$ donc $R(v) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, v, \dots, v^{d-1})$. Ainsi,

$$\mathbb{C}[v] = \mathrm{Vect}\left(\{v^n \mid n \in \mathbb{N}\}\right) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, v, \dots, v^{d-1}).$$

Ceci montre que $(\mathrm{id}_E, v, \dots, v^{d-1})$ est génératrice de $\mathbb{C}[v]$. Montrons qu'elle est libre.
Fixons $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}$ complexes tels que $\lambda_0\mathrm{id}_E + \lambda_1 v + \cdots + \lambda_{d-1}v^{d-1} = 0$. Alors le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{d-1}X^{d-1}$ annule v et est de degré strictement inférieur au degré du polynôme minimal π_v. Il s'ensuit que P est le polynôme nul, et donc que tous les λ_i sont nuls.
Ainsi, $(\mathrm{id}_E, v, \dots, v^{d-1})$ est une base de $\mathbb{C}[v]$. En particulier, on a :

$$\boxed{\dim \mathbb{C}[v] = \deg(\pi_v).}$$

Q18. Si u est diagonalisable avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ pour valeurs propres distinctes, il suit de **Q13** que $\deg(\pi_u) = m$. Par construction, chaque p_i est un polynôme en u donc $(p_1, \dots, p_m)$ est une famille de m vecteurs de $\mathbb{C}[u]$. D'après **Q18**, il suffit de montrer que cette famille est libre pour que ce soit une base de $\mathbb{C}[u]$.

Fixons, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ complexes tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = 0$. Soit $j \in [\![1, m]\!]$. En appliquant p_j à cette identité, puisque $p_j \circ p_i = 0$ si $i \neq j$ et $p_j^2 = p_j$, on a :

$$0 = p_j \circ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i = \lambda_j p_j$$

mais $p_j \neq 0$ car c'est un projecteur dont l'image est non nulle puisque égale à un sous-espace caractéristique de u. Ainsi, $\lambda_j = 0$. Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $(p_1, \dots, p_m)$ est libre dans $\mathbb{C}[u]$. Par dimension, on a donc :

$$\boxed{(p_1, \dots, p_m) \text{ est une base de } \mathbb{C}[u].}$$

Q19. Considérons un endomorphisme u nilpotent d'indice 2. Alors il n'y a qu'un projecteur spectral de sorte que l'espace engendré par les projecteurs spectraux associés à u est de dimension 1 dans $\mathcal{L}(E)$ alors que $\mathbb{C}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u)$ est de dimension 2. Ainsi :

$$\boxed{\text{Les projecteurs spectraux ne forment pas nécessairement une base de } \mathbb{C}[u] \text{ en général.}}$$

Q20. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On a :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k f_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda_i^k \right) f_i = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i.$$

En particulier, si on pose $P = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_m)$, on obtient :

$$P(u) = 0$$

de sorte que u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples et donc :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$$

*** Fin du sujet ***