

CCINP - MP 2023 - MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4h

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel n , la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.

Q1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P, Q) de polynômes de E ,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx.$$

On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Q2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$, noté $p_F(X^2)$.

Q3. Justifier que $\|X^2 - p_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|p_F(X^2)\|^2$ puis calculer le réel :

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x} dx.$$

Exercice 2

Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = pq^k.$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X, Y)$ et $T = \inf(X, Y)$.

Q4. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, déterminer $\mathbf{P}((Z = m) \cap (T = n))$ en distinguant trois cas : $m > n$, $m < n$ et $m = n$.

Q5. En déduire la loi de la variable aléatoire Z .

Problème

Dans ce problème, E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

Q6. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :

Si P_1, P_2, \dots, P_r sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T , si u est un endomorphisme de E , alors :

$$\ker [T(u)] = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \ker(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux. Justifier que $\ker(P(u)) \subset \ker[(PQ)(u)]$ (de même $\ker(Q(u)) \subset \ker[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\ker[(PQ)(u)] = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.

On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.

Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \dots + R_m Q_m = 1$.

Q9. On pose alors pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.

Démontrer que pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \dots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

— $p_i \circ p_j = 0$,

— $\sum_{i=1}^m p_i = \text{id}_E$,

— chaque p_i est un projecteur de E .

Les p_i seront appelés projecteurs associés à u .

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \ker(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i .

Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \text{im}(p_1) \oplus \text{im}(p_2) \oplus \dots \oplus \text{im}(p_m)$.

Q12. Démontrer que pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\text{im}(p_i) = N_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q13. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q14. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$, où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2 .

b. En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A . On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

c. Calculer, pour tout entier naturel q , A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2 .

Q17. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Démontrer que la dimension de l'espace $\mathbb{C}[v]$ est égale au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v .

Q18. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$.

Démontrer que la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q20. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E , tels que pour tout entier q on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier la «réciproque».

Soit u un endomorphisme de E , \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$.

Démontrer que u est diagonalisable.

*** Fin du sujet ***