Agrégation interne de mathématiques

2024 - Composition 2

Éléments de correction proposés par G. Dupont
http://maths-concours.fr/

Version du 28 février 2024

Notations du corrigé

Outre les notations des l'énoncé, nous utiliserons librement les notations suivantes dans ce corrigé :

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies.
- Si X et Y sont des variables aléatoires de même loi, on note $X \sim Y$.
- On note $\mathcal{G}(p)$ la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, $\mathcal{U}(E)$ la loi uniforme sur un ensemble fini E et $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ la loi normale d'espérance m et de variance σ^2.
- Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exercice 1

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad I(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

de sorte que $f = P(f) + I(f)$ avec $P(f) \in \mathcal{P}$ et $I(f) \in \mathcal{I}$, d'où l'existence d'une décomposition.
Soient $(f_P, f_I), (g_P, g_I) \in \mathcal{P} \times I$ tels que $f_P + f_I = g_P + g_I$. Alors

$$\underbrace{f_P - g_P}_{\in \mathcal{P}} = \underbrace{f_I - g_I}_{\in \mathcal{I}}$$

mais $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ car si une fonction est à la fois paire et impaire, elle vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(-x) = -f(x)$$

Ainsi $f_P = g_P$ et $f_I = g_I$, d'où l'unicité.

2. Puisque f est dérivable et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad I(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)),$$

$P(f)$ et $I(f)$ sont dérivables.
En outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f'(x) - f'(-x)) + \frac{1}{2}(f'(x) + f'(-x)) = I(f')(x) + P(f')(x).$$

Par unicité, on a donc

$$\boxed{P(f)' = I(f') \quad \text{et} \quad I(f)' = P(f').}$$

3. (a) Si f est une fonction continue vérifiant (1), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2} + x\int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t f(-t)\,\mathrm{d}t$$

mais les fonctions $t \mapsto f(-t)$ et $t \mapsto tf(-t)$ sont continues donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, le membre de droite est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f aussi et,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t + xf(-x) - xf(-x) \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(b) Toujours d'après le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc $f' \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, c'est-à-dire $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f(-x).}$$

(c) Si f est solution de (1), on a

$$\begin{aligned} f''(x) = f(-x) &\Leftrightarrow (P(f) + I(f))''(x) = (P(f) + I(f))(-x) \\ &\Leftrightarrow P(f'')(x) + I(f'')(x) = P(f)(x) - I(f))(x) \end{aligned}$$

mais, par unicité de la décomposition en somme de fonctions paire et impaire, on obtient

$$P(f'') = P(f) \quad \text{et} \quad I(f'') = -I(f).$$

D'autre part, il suit de la question 2 que $P(f)'' = P(f'')$ et $I(f)'' = I(f'')$ donc :

$$P(f)'' = P(f) \quad \text{et} \quad I(f)'' = -I(f).$$

Ainsi, $P(f)$ et $I(f)$ sont respectivement solutions des équations différentielles

$$(H_1)\ : y'' - y = 0 \quad \text{et} \quad (H_2)\ : y'' + y = 0.$$

4. Si f est solution de (1), d'après ce qui précéde et puisque $P(f)$ et paire et $I(f)$ est impaire, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(f)(x) = a(e^x + e^{-x}) \quad \text{et} \quad I(f)(x) = b\sin(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a(e^x + e^{-x}) + b\sin(x).$$

Considérons ainsi une fonction de cette forme. En injectant dans (1), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{2} - \int_0^x (x-t)f(-t)\,\mathrm{d}t \;\Leftrightarrow\; \frac{(2b-1)x + 4a}{2} = 0.$$

Cette identité devant être assurée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2b - 1 = 0$ et $4a = 0$.
Ainsi, on a établi :

$$\boxed{\text{L'unique solution continue de (1) est } f : x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x).}$$

Exercice 2

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g_n'(x) = g_{n-1}(x) - g_n(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} < 0$$

donc g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Puisque $g_n(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ par croissances comparées, il suit du théorème de la bijection continue que

$$\boxed{\exists! a_n \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(a_n) = \frac{1}{2}.}$$

6. On observe que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1}(x) - g_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} e^{-x} > 0$ donc la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
Si $a_{n+1} < a_n$, par stricte décroissance de g_n, on aurait :

$$g_n(a_{n+1}) > g_n(a_n) = \frac{1}{2}$$

mais alors

$$\frac{1}{2} = g_{n+1}(a_{n+1}) > g_n(a_{n+1}) > g_n(a_n) = \frac{1}{2},$$

une contradiction.
Ainsi,

$$\boxed{(a_n) \text{ est croissante.}}$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}[S_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k] = \sum_{k=1}^n \lambda = n\lambda$$

et, par indépendance des X_k, on a

$$\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) = \sum_{k=1}^n \lambda = n\lambda.$$

(b) Il suit du théorème de stabilité de la loi de Poisson que

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^n X_k \sim \mathcal{P}(n\lambda).}$$

Pour la démonstration, on peut par exemple observer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, l'indépendance implique l'égalité des fonctions génératrices :

$$Q_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n Q_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^n e^{\lambda(t-1)} = e^{n\lambda(t-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

(c) — Si $\lambda = 1$, on a $\mathbf{E}[S_n] = \mathbf{V}(S_n) = n$ et donc, il suit du théorème central limite que :

$$\mathbf{P}(S_n \leq n) = \mathbf{P}(S_n - n \leq 0) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(N \leq 0)$$

où N est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Mais par parité de la densité d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a $\mathbf{P}(N \leq 0) = \dfrac{1}{2}$ de sorte que $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(S_n \leq n) = \dfrac{1}{2}$.

— Si $\lambda > 1$, on pose $\lambda = 1 + \epsilon$. On a alors $\mathbf{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \lambda$ et $\mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\lambda}{n}$. Il suit alors de l'inégalité de Tchebychev que :

$$\mathbf{P}(S_n \leq n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \lambda - \epsilon\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda \leq -\epsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{\mathbf{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2} = \frac{\lambda}{n\epsilon^2}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(S_n \leq n) = 0$.

— Si $\lambda < 1$, on pose $\lambda = 1 - \epsilon$ et alors

$$\mathbf{P}(S_n \leq n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda \leq \epsilon\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - \lambda > \epsilon\right) \geq 1 - \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \epsilon\right) \geq 1 - \frac{\lambda}{n\epsilon^2}$$

donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(S_n \leq n) = 1$.

On a donc bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(S_n \leq n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad \lambda = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \lambda > 1 \\ 1 & \text{si} \quad \lambda < 1. \end{cases}}$$

8. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$, on a

$$\mathbf{P}(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = e^{-n\lambda} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\right] = g_n(n\lambda).$$

(b) Avec $\lambda = 1$, il suit de 8.a et 7.c que

$$g_n(n) = \mathbf{P}(S_n \leq n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$g_n(n+1) = e^{-n-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)^k}{k!} \leq \frac{1}{e} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{g_n(n)}{e} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2e} < \frac{1}{2}$$

et

$$g_n(n-1) = e^{-n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)^k}{k!} \geq e \times e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = e g_n(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e}{2} > \frac{1}{2}.$$

Il existe donc un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$g_n(n+1) < \frac{1}{2} < g_n(n-1).$$

Puisque $g_n(a_n) = \frac{1}{2}$ et que la fonction g_n est strictement décroissante, on a donc $a_n \in]n-1, n+1[$, c'est-à-dire :

$$n - 1 < a_n < n + 1.$$

Par encadrement, il vient $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 1.}$$

Résultat préliminaire 1 : la fonction Γ

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ donc l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ est doublement impropre.

   — <u>En $+\infty$:</u> $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2} \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$ d'après le critère de Riemann donc, par comparaison, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$.

   — <u>En 0 :</u> $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ mais, d'après le critère de Riemann,

   $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}} \text{ converge } \Leftrightarrow 1-x<1 \Leftrightarrow x>0.$$

   Par comparaison, les intégrales $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ étant de même nature,

   $$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}} \text{ converge } \Leftrightarrow x>0.$$

   En conclusion :

   $$\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

10. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.
    Soit $t>0$. La fonction $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x>0$, on a :

    $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[t^{x-1}e^{-t}\right] = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}.$$

    Alors, pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on a :

    $$\forall x \in [a,b], \quad \left|\ln(t)e^{-t}t^{x-1}\right| \leq \varphi(t) = \begin{cases} |\ln(t)|\, e^{-t}t^{a-1} & \text{si } 0<t\leq 1 \\ \ln(t)e^{-t}t^{b-1} & \text{si } t>1 \end{cases}$$

    et φ est intégrable sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
    Ceci étant vrai pour tout $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ tel que $a<b$, il vient :

    $$\boxed{\Gamma \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall x>0,\ \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$$

11. Soit $x>0$. A l'aide d'une intégration par parties généralisées, tous les termes étant convergents, on obtient classiquement :

    $$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

12. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$ et, par récurrence immédiate sur n à partir de la question 11, on obtient :

    $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!.}$$

13. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\left|\exp\left((z-1)\ln(t)\right)e^{-t}\right| = \exp\left((\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t)\right)e^{-t} = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}$$

mais, si $\mathrm{Re}(z) > 0$, on a établi à la question 9 que $t \mapsto t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ donc, par domination, $t \mapsto \exp\left((z-1)\ln(t)\right)e^{-t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$.
On peut donc poser, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$:

$$\tilde{\Gamma}(z) = \int_0^{+\infty} \exp\left((z-1)\ln(t)\right)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et, si z est réel, on a pour tout $t > 0$, $\exp\left((z-1)\ln(t)\right)e^{-t} = t^{z-1}e^{-t}$ et donc $\tilde{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$.
Ainsi,

$$\boxed{\tilde{\Gamma} \text{ est un prolongement de } \Gamma \text{ à } \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}.}$$

Résultat préliminaire 2 : l'inégalité de Hölder-Minkowski

14. La fonction ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \quad \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

donc

$$\boxed{\ln \text{ est strictement concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\ln\left(tx + (1-t)y\right) \geq t\ln(x) + (1-t)\ln(y).$$

Dans le cas particulier où $t = \frac{1}{p}$, on a $1 - t = \frac{1}{q}$ et il vient :

$$\boxed{\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{\ln(x)}{p} + \frac{\ln(x)}{q}.}$$

15. Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Si $u = 0$ ou $v = 0$, l'inégalité est trivialement vérifiée. On suppose donc que u et v sont strictement positifs. Alors, d'après l'inégalité précédente appliquée à $x = u^p$ et $y = v^q$, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv)$$

donc, en passant à l'exponentielle, il vient :

$$\boxed{uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q.}$$

16. Supposons $\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g^q(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Puisque f et g sont positives, il suit de la question 15 que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq f(x)g(x) \leq \frac{1}{p}f^p(x) + \frac{1}{q}g^q(x).$$

En intégrant sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{p} f^p(x) + \frac{1}{q} g^q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \left(\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

et l'inégalité de Hölder-Minkowski est vérifiée dans ce cas.

17. Si f ou g est nulle, l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, on pose

$$I = \left(\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \quad \text{et} \quad J = \left(\int_0^{+\infty} g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

qui sont strictement positives car f et g sont continues positives et non identiquement nulles.
On a alors

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(x)}{I}\right)^p \mathrm{d}x = \frac{1}{I^p} \int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{g(x)}{J}\right)^q \mathrm{d}x = \frac{1}{J^q} \int_0^{+\infty} g^q(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

donc on peut appliquer l'inégalité de Hölder-Minkowski à $\frac{f}{I}$ et $\frac{g}{J}$ d'après la question 16. Il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{IJ}\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(x)}{I}\right)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{g(x)}{J}\right)^q \mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{IJ} \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{IJ} \left(\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

et donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_0^{+\infty} f^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} g^q(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}.}$$

Résultat préliminaire 3 : sommes harmoniques

18. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [n, n+1]$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

En intégrant sur $[n, n+1]$, il vient :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n}.}$$

19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente, la deuxième inégalité devient $\ln(n+1) \leq H_n$ de sorte que $u_n \geq 0$.
D'autre part,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$$

de sorte que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; elle converge donc vers une limite $\gamma \in \mathbb{R}_+$.
On a donc bien :

$$\boxed{H_n - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \in \mathbb{R}_+.}$$

20. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

donc, en sommant, il vient pour $N \geq n$,

$$\int_n^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{N}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Par encadrement, on a donc :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$$

21. Pour tout $n \geq 2$, un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ donne :

$$s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\boxed{s_n - s_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.}$$

22. Puisque $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on obtient par télescopage :

$$\forall n \geq 2, \quad s_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (s_k - s_{k+1})$$

mais, d'après la question 21,

$$s_k - s_{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2} > 0$$

donc, par sommation des relations de comparaison pour les séries numériques à termes positifs convergentes, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (s_k - s_{k+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Or, d'après la question 20,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

donc

$$s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Résultat préliminaire 4 : le problème de Bâle

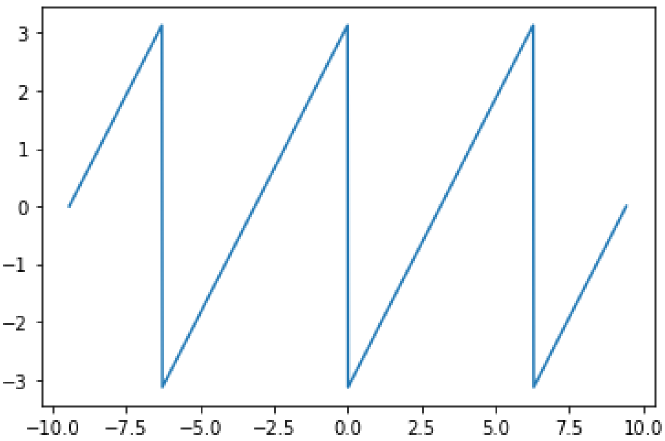
23. On trace le graphe de la fonction $x \mapsto x$ sur $[-\pi, \pi[$ et on prolonge par 2π-périodicité. Le script Python suivant a permis d'obtenir la représentation ci-après sur $[-3\pi, 3\pi]$ (les traits verticaux devant être ignorés) :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    if 0<=x<=2*np.pi:
        return x-np.pi
    else:
        return f(x%(2*np.pi))


def graphique(f,a,b):
    X = np.linspace(a,b,1000)
    Y = [f(x) for x in X]
    plt.plot(X,Y)
    plt.show()

graphique(f,-3*np.pi,3*np.pi)
```



24. La fonction f étant impaire, les $a_n(f)$ sont tous nuls. D'autre part, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = -\frac{2(-1)^n}{n}.}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

donc

$$\boxed{S f(x) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).}$$

25. f étant continue par morceaux et 2π-périodique et les $a_n(f)$ étant nuls, la formule de Parseval affirme que :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 .}$$

26. L'identité de Parseval donne :

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-2(-1)^n}{n} \right)^2 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Première partie : problème du collectionneur de vignettes

27. (a) On propose la fonction suivante :

```python
import random as rd

def collectionneur(n):
    C = {i:0 for i in range(1,n+1)} # dictionnaire de collection
    t = 0 # nombre de tirages
    while sum(C.values())<n: # tant que la collection n'est pas complete
        v = rd.randint(1,n) # on tire une vignette au hasard
        C[v] = 1 # on l'ajoute dans la collection
        t += 1 # on incremente le nombre de tirages
    return t # on renvoie le nombre de tirages
```

(b) Puisque l'on obtient nécessairement un nouveau numéro au premier tirage, on a $X_{n,1} \sim 1$ donc $\mathbf{E}\left[X_{n,1}\right] = 1$ et $\mathbf{V}\left(X_{n,1}\right) = 0$.

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $X_{n,i}$ correspond au rang du premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\dfrac{n-(i-1)}{n}$ donc

$$\boxed{X_{n,i} \sim \mathcal{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right).}$$

Les moments d'une loi géométrique étant connus, on a :

$$\boxed{\mathbf{E}\left[X_{n,i}\right] = \frac{n}{n-i+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(X_{n,i}\right) \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}.}$$

On observe que ces égalités sont aussi valables pour $i = 1$.

(c) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Montrons que $X_{n,i+1}$ est indépendante des $X_{n,1}, \dots, X_{n,i}$. Introduisons une suite $(U_j)_{j\geq 1}$ de vaiid de loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$ telle que U_j représente le numéro obtenu au j-ième tirage.

Soit $(k_1, \dots, k_i) \in \mathbb{N}^i$, $s = k_1 + \cdots + k_i$ et E_i l'ensemble des valeurs déjà obtenues après s tirages. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}\left((X_{n,i+1} = k) \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i}(X_{n,j} = k_j)\right) = \mathbf{P}\left((U_{s+k} \notin E_i) \cap \bigcap_{\ell=1}^{k-1}(U_{s+\ell} \in E_i) \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i}(X_{n,j} = k_j)\right)$$

mais l'événement $\bigcap_{j=1}^{i}(X_{n,j} = k_j)$ ne dépend que des U_j, avec $j \leq s$ donc, d'après le lemme des coalitions, les U_j pour $j > s$ sont indépendantes de cet événement. Alors

$$\mathbf{P}\left(X_{n,i+1} = k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i}(X_{n,j} = k_j)\right) = \mathbf{P}\left((U_{s+k} \notin E_i) \cap \bigcap_{\ell=1}^{k-1}(U_{s+\ell} \in E_i)\right)$$

mais, par indépendance des U_j et du fait qu'elles suivent une loi uniforme, on a

$$\mathbf{P}\left((U_{s+k} \notin E_i) \cap \bigcap_{\ell=1}^{k-1}(U_{s+\ell} \in E_i)\right) = \frac{n-i}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1}.$$

mais alors, puisque $X_{n,i+1} \sim \mathcal{G}\left(\frac{n-i}{n}\right)$, on a :

$$\mathbf{P}\left(X_{n,i+1} = k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i}(X_{n,j} = k_j)\right) = \mathbf{P}\left(X_{n,i+1} = k\right)$$

donc $X_{n,i+1}$ est indépendante des $X_{n,j}$ pour $j \leq i$.

En conséquence :

$$\boxed{\text{Les } (X_{n,i})_{i\in[\![1,n]\!]} \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

(d) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbf{E}[T_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[X_{n,i}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j} = nH_n.$$

D'autre part, par additivité de la variance pour les variables aléatoires indépendantes, on a :

$$\mathbf{V}(T_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_{n,i}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2} = \sum_{j=i}^{n} \frac{n(n-j)}{j^2} = n^2 S_n - nH_n.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}[T_n] = nH_n \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(T_n) = n^2 S_n - nH_n.}$$

(e) On sait d'après les résultats préliminaires 3 que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $nH_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n)$. D'autre part, on sait que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ donc $n^2 S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6} n^2$ et $nH_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$ donc $n^2 S_n - nH_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6} n^2$.

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}[T_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(n) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6} n^2.}$$

28. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc, sous réserve de convergence, on a

$$Q_Y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k)\, t^k = pt \sum_{k=0}^{+\infty} (qt)^k,$$

série géométrique qui converge si, et seulement si, $|qt| < 1$. Alors

$$\boxed{\forall t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[, \quad Q_Y(t) = \frac{pt}{1-qt}.}$$

29. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$.

(a) On a $Q_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X \in \mathbb{N}) = 1$. Ainsi, le rayon de convergence de la série entière définissant Q_X est supérieur ou égal à 1. Il s'ensuit que Q_X est bien définie sur $]-1,1]$.
En -1, la série $Q_X(-1)$ converge absolument puisque celle définissant $Q_X(1)$ converge. Il s'ensuit que

$$\boxed{Q_X \text{ est bien définie sur } [-1,1] \text{ et } Q_X(1) = 1.}$$

(b) Q_X étant la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, Q_X est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $t \in]-1,1[$, on a :

$$Q_X'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k)\, t^{k-1}.$$

Si X admet une espérance, la série $\sum_{k \geq 0} k\mathbf{P}(X = k)$ converge. Alors, d'après le théorème d'Abel radial et le théorème de la limite de la dérivée, Q_X est dérivable sur $[-1,1]$ et

$$\forall t \in [-1,1], \quad Q_X'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k)\, t^{k-1}.$$

En particulier, on a

$$\boxed{Q_X'(1) = \mathbf{E}[X].}$$

(c) La fonction génératrice ne dépendant que de la loi, si X et Y admettent la même loi, elles admettent la même fonction génératrice.
Réciproquement, si X et Y admettent une même fonction génératrice. Alors Q_X et Q_Y sont deux sommes de séries entières qui coïncident sur un voisinage de 0. Par unicité du développement en série entière, les coefficients de Q_X et Q_Y sont égaux ; c'est-à-dire que X et Y suivent la même loi.
En conclusion :

$$\boxed{X \sim Y \iff Q_X = Q_Y.}$$

(d) On peut revenir au produit de Cauchy mais on peut faire plus rapide : d'après le théorème de transfert, pour tout $t \in [-1,1]$, on a

$$Q_X(t) = \mathbf{E}\left[t^X\right], \quad Q_Y(t) = \mathbf{E}\left[t^Y\right] \quad \text{et} \quad Q_{X+Y}(t) = \mathbf{E}\left[t^{X+Y}\right]$$

et d'après le lemme des coalitions, t^X et t^Y sont indépendantes donc, par multiplicativité de l'espérance pour les variables aléatoires indépendantes :

$$Q_{X+Y}(t) = \mathbf{E}\left[t^{X+Y}\right] = \mathbf{E}\left[t^X t^Y\right] = \mathbf{E}\left[t^X\right]\mathbf{E}\left[t^Y\right] = Q_X(t)Q_Y(t).$$

En conclusion :

$$\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y \ \Rightarrow\ Q_{X+Y} = Q_X Q_Y.}$$

30. (a) Soit $t \in [-1,1]$. On a $X_{1,n} \sim 1$ donc $Q_{X_{1,n}}(t) = t = \dfrac{n}{n}t$. Par ailleurs, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, d'après 28, on a

$$Q_{X_{i,n}}(t) = \frac{n-(i-1)}{n} t \times \frac{1}{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)t}$$

donc, par indépendance des $X_{i,n}$ démontrée à la question 27.c et par multiplicativité des séries génératrices pour les variables aléatoires indépendantes (question 29.d, que l'on généralise à n variables par récurrence), on a :

$$Q_{T_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_{X_{i,n}}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{n-(i-1)}{n} t \times \frac{1}{1-\left(\frac{i-1}{n}\right)t}\right] = \frac{n!t^n}{n^n} \times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{i-1}{n}\right)t\right)} = \frac{n!t^n}{n^n} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{kt}{n}\right)}.$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall t \in [-1,1], \quad Q_{T_n}(t) = \frac{n!}{n^n} \times \frac{t^n}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{kt}{n}\right)}.}$$

(b) Dans l'anneau $\mathbb{R}(T)$, on a

$$\frac{Q_n(T)}{T} = \frac{n!}{n^n} \times \frac{T^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{kT}{n}\right)}$$

D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on peut écrire :

$$\frac{Q_n(T)}{T} = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\left(1-\frac{kT}{n}\right)}$$

avec $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \left[\frac{Q_n(T)}{T} \times \left(1-\frac{kT}{n}\right)\right]_{T=\frac{n}{k}} \\
&= \frac{n!}{n^n}\left(\frac{n}{k}\right)^{n-1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n-1} \frac{1}{\left(1-\frac{i}{n}\times\frac{n}{k}\right)} \\
&= \frac{n!}{n} \times \frac{1}{k} \times \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n-1} \frac{1}{k-i} \\
&= \frac{n!}{n} \times \frac{1}{k} \times \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{k-i}\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \frac{1}{k-i}\right) \\
&= (n-1)! \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{(k-1)!} \times \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-1-k)!} \\
&= \binom{n-1}{k}(-1)^{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Déterminons λ_0. En évaluant en 0, on a

$$1 = Q_n(1) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\frac{k}{n}}$$

donc

$$\lambda_0 = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-1-k} \frac{n}{n-k} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = (-1)^{n-1} = \binom{n-1}{0} (-1)^{n-1}.$$

Ainsi, on a

$$\frac{Q_n(T)}{T} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-k-1} \frac{1}{\left(1 - \frac{kT}{n}\right)}$$

et donc, en multipliant par T, il vient :

$$Q_n(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-k-1} \frac{T}{\left(1 - \frac{kT}{n}\right)}$$

Puisque les pôles $\frac{n}{k}$, avec $k \in [\![1, n-1]\!]$ sont en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$, on a bien :

$$\boxed{\forall t \in [-1, 1], \quad Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-k-1} \frac{t}{\left(1 - \frac{kt}{n}\right)}.}$$

(c) Pour tout $t \in [-1, 1]$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\left|\frac{kt}{n}\right| < |t| < 1$ donc

$$\frac{1}{1 - \frac{kt}{n}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{kt}{n}\right)^j.$$

En injectant dans l'identité établie en 30.b, il vient :

$$\begin{aligned}
Q_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-k-1} t \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{kt}{n}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{n^j} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-k-1} k^j t^{j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n^{j-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-k-1} k^{j-1}\right] t^j.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on a donc

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(T_n = j) = \frac{1}{n^{j-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^{n-k-1} k^{j-1}.}$$

Deuxième partie : log-convexité de la fonction Γ

31. Soient $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\lambda x + (1-\lambda)y} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\lambda(x-1)} e^{-(1-\lambda)t} t^{(1-\lambda)(y-1)} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} t^{x-1}\right)^\lambda \left(e^{-t} t^{y-1}\right)^{1-\lambda} \, \mathrm{d}t$$

donc, en appliquant l'inégalité de Hölder-Minkowski avec $p = \frac{1}{\lambda}$ et $q = \frac{1}{1-\lambda}$, il vient :

$$\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t\right)^\lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} \, \mathrm{d}t\right)^{1-\lambda} = \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}.$$

Ainsi

$$\boxed{\Gamma \text{ est log-convexe.}}$$

32. (a) Par récurrence immédiate, les deux premières hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup impliquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n+1) = n!}$$

(b) Toujours par récurrence immédiate sur n, pour tout $x > 0$, on a :

$$\boxed{f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x).}$$

(c) Soit $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est log-convexe, on a

$$\begin{aligned} f(n+x) &= f(x(n+1) + (1-x)n) \\ &\leq f(n+1)^x f(n)^{1-x} \\ &= (n!)^x \left((n-1)!\right)^{1-x} \\ &= n^x \left((n-1)!\right)^x \left((n-1)!\right)^{1-x} \\ &= n^x (n-1)!. \end{aligned}$$

Toujours par log-convexité, on a

$$\begin{aligned} n! &= f(n+1) \\ &= f(x(n+x) + (1-x)(n+1+x)) \\ &\leq f(n+x)^x f(n+1+x)^{1-x} \\ &= f(n+x)^x \left[(n+x)f(n+x)\right]^{1-x} \\ &= (n+x)^{1-x} f(n+x). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{f(n+x) \leq n^x (n-1)! \quad \text{et} \quad n! \leq (n+x)^{1-x} f(n+x).}$$

(d) Soit $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les inégalités établies à la question précédente et l'identité établie en 32.b, on a :

$$u_n(x) = \frac{(n+x)^{x-1} n!}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} \leq \frac{f(n+x)}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} = f(x)$$

et

$$v_n(x) = \frac{n^x (n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} \geq \frac{f(n+x)}{\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)} = f(x).$$

Cette identité étant vraie pour toute fonction satisfaisant les trois hypothèses du théorème 4, elle est en particulier vraie pour la fonction Γ. On a donc :

$$\boxed{\forall x \in]0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(x) \leq f(x) \leq v_n(x) \quad \text{et} \quad u_n(x) \leq \Gamma(x) \leq v_n(x).}$$

(e) On a

$$(n+x)^{x-1} n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{x-1} n! \quad \text{et} \quad n^x (n-1)! = n^{x-1} n!$$

donc, le dénominateur étant le même, on a

$$\boxed{u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n(x).}$$

(f) Soit $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(\frac{n+1+x}{n+x}\right)^{x-1} \times \frac{n+1}{n+x} \geq \left(\frac{n+1}{n+x}\right)^{x} \geq 1$$

donc, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ étant à termes positifs, elle est croissante. Puisqu'elle est majorée par $f(x)$, elle converge vers un réel $\ell \leq f(x)$.
Puisque $v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n(x)$, la suite $(v_n(x))_{n\geq 1}$ converge aussi vers ℓ. L'encadrement obtenu en 32.d montre alors que $\ell = f(x)$.
En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} v_n(x) = f(x).}$$

(g) Le même raisonnement que celui de la question précédente appliqué à la deuxième inégalité obtenue en 32.d montre que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \Gamma(x).$$

Par unicité de la limite, il vient :

$$\boxed{\forall x \in [0,1[, \quad f(x) = \Gamma(x).}$$

(h) Soit $t > 0$. En posant $n = \lfloor t \rfloor$ et $x = t - n \in [0,1[$, il suit des questions précédentes que :

$$f(t) = f(x+n) = x(x+1)\cdots(x+n-1)f(x) = x(x+1)\cdots(x+n-1)\Gamma(x) = \Gamma(x+n) = \Gamma(t).$$

En conclusion :

$$\boxed{f = \Gamma.}$$

33. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$, sous réserve de convergence.
Nous allons montrer que f vérifie les trois hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup.

— On a

$$f(1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n}{\prod_{k=0}^{n}(1+k)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

— Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{x+1}}{\prod_{k=0}^{n}(x+1+k)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^{x+1}}{\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)} \\ &= x \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!(n+1)^x}{\prod_{k=0}^{n+1}(x+k)} \\ &= x \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)} \\ &= xf(x). \end{aligned}$$

— Soient x et y des réels strictement positifs et $t \in [0,1]$. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a par concavité du logarithme :

$$\ln\left((x+k)^t(y+k)^{1-t}\right) = t\ln(x+k) + (1-y)\ln(y+k)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \ln\left(t(x+k)+(1-t)(y+k)\right)\\
&= \ln(tx+(1-t)y+k)
\end{aligned}$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\prod_{k=0}^{n}(x+k)^t(y+k)^{1-t} \geq \prod_{k=0}^{n}(tx+(1-t)y+k)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
f(x)^t f(y)^{1-t} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}\right)^t \times \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!n^y}{\prod_{k=0}^{n}(y+k)}\right)^{1-t}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^{tx+(1-t)y}}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)^t(y+k)^{1-t}}\\
&\geq \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^{tx+(1-t)y}}{\prod_{k=0}^{n}(tx+(1-t)y+k)}\\
&= f(tx+(1-t)y).
\end{aligned}$$

Ainsi, f satisfait les trois hypothèses du théorème de Bohr-Mollerup, de sorte que $f = \Gamma$.
Il reste à justifier la convergence de la suite définissant f. Pour cela, on observe que la question 32.f assure l'existence de $f(x)$ si $x \in]0,1]$. Par ailleurs, les calculs effectués pour vérifier la deuxième hypothèse du théorème de Bohr-Mollerup montrent que si $f(x)$ est bien défini, alors $f(x+1)$ aussi. Par suite, $f(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.}$$

Troisième partie : fonction caractéristique

34. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\left|qe^{it}\right| = q < 1$ donc la série $\sum_{k\geq 0}(qe^{it})^k$ converge absolument et, d'après le théorème de transfert, on a

$$\Phi_Y(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{itk}pq^{k-1} = pe^{it}\sum_{k=1}^{+\infty}(e^{it}q)^{k-1} = pe^{it}\sum_{k=0}^{+\infty}(e^{it}q)^k = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_Y(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.}$$

35. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$.
   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec le formalisme des familles sommables, on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{itk}\mathbf{P}(X=k)\right| = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(X=k) = 1$$

   donc la famille $\left(e^{itk}\mathbf{P}(X=k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable. En particulier, Φ_X est définie sur $\mathbb{R}$.
   En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|\Phi_X(t)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{itk}\mathbf{P}(X=k)\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{itk}\mathbf{P}(X=k)\right| = 1$$

donc Φ_X est bornée.
Enfin, si on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto e^{itk}\mathbf{P}(X = k)$, alors $\|f_k\|_\infty = \mathbf{P}(X = k)$ donc $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge normalement, et donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Chacune des f_k étant continue, il suit du théorème de continuité pour les séries de fonctions que $\Phi_Y = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue sur $\mathbb{R}$.

En conclusion :

$$\boxed{\Phi_X \text{ est définie, continue et bornée sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in C^1(\mathbb{R})$. En outre, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_k'(t) = kie^{itk}\mathbf{P}(X = k)$ donc $\left\|f_k'\right\|_\infty = k\mathbf{P}(X = k)$. Puisque X admet une espérance, $\sum_{k\geq 0} f_k'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Il suit alors du théorème de dérivation pour les séries de fonctions que

$$\boxed{\Phi_X \in C^1(\mathbb{R}) \text{ et, pour tout } t \in \mathbb{R},\ \Phi_X'(t) = i\sum_{k=1}^{+\infty} e^{itk}k\mathbf{P}(X = k).}$$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k \in C^\infty(\mathbb{R})$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_k^{(p)}(t) = (ki)^p e^{itk}\mathbf{P}(X = k)$ donc

$$\left\|f_k^{(p)}\right\|_\infty = k^p\mathbf{P}(X = k).$$

Puisque X admet un moment d'ordre p, $\sum_{k\geq 0} f_k^{(p)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Il suit alors du théorème de dérivation pour les séries de fonctions que

$$\boxed{\Phi_X \in C^\infty(\mathbb{R}).}$$

En outre, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_X^{(p)}(t) = i^p \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{itk}k^p\mathbf{P}(X = k)$$

donc, en évaluant en 0 :

$$\Phi_X^{(p)}(0) = i^p \sum_{k\in\mathbb{N}} k^p\mathbf{P}(X = k) = i^p\mathbf{E}[X^p]$$

et donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}\left[X^k\right] = (-i)^k\Phi_X^{(k)}(0).}$$

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\Phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk}\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty}(e^{it})^k\mathbf{P}(X = k) = Q_X(e^{it}).$$

On a donc la relation

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) = Q_X(e^{it}).}$$

NB : Nous n'avons pas fait appel à l'hypothèse d'espérance de l'énoncé ; on peut penser que le concepteur attendait une autre réponse. Laquelle ?

36. Si X et Y sont indépendantes, il suit du lemme des coalitions et de la multiplicativité de l'espérance pour les variables aléatoires indépendantes que, pour tout réel t, on a

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbf{E}\left[e^{it(X+Y)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{itX}e^{itY}\right] = \mathbf{E}\left[e^{itX}\right]\mathbf{E}\left[e^{itY}\right] = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

Ainsi :

$$\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y \ \Rightarrow\ \Phi_{X+Y} = \Phi_X\Phi_Y.}$$

Quatrième partie : la loi de Gumbel

37. f est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = [\exp(-e^{-x})]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

donc

$$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}.}$$

38. Notons F_X la fonction de répartition de X. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = [\exp(-e^{-x})]_{-\infty}^{t} = \exp(-e^{-t}).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \exp(-e^{-t}).}$$

39. Il s'agit de montrer que $g : x \mapsto x^2 f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, il suffit d'étudier son comportement en $\pm\infty$.
En $+\infty$, on a

$$x^2 g(x) = x^4 e^{-x}\exp(-e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^4 e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad g(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Par comparaison et avec le critère de Riemann, $g \in \mathcal{L}^1([1,+\infty[,\mathbb{R})$.
En $-\infty$, posons $v = e^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, on a

$$x^2 g(x) = x^4 e^{-x}\exp(-e^{-x}) = \frac{\ln(v)^4 v}{e^v} \xrightarrow[v\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme ci-dessus, $g \in \mathcal{L}^1(]-\infty,-1],\mathbb{R})$.
Puisque $g \in C^0([-1,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1([-1,1],\mathbb{R})$, il s'ensuit que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors X admet un moment d'ordre 2, et donc :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

40. (a) L'application $x \mapsto e^{-x}$ est C^1, bijective, strictement décroissante de $]-\infty,\infty[$ vers $]0,+\infty[$ et $x \mapsto xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donc on peut effectuer le changement de variable $t = e^{-x}$. Il vient :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}\exp(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = \int_{+\infty}^{0} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = -\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : t \mapsto \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \ln(t)e^{-t}$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} (t \mapsto \ln(t)e^{-t})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'autre part, par concavité du logarithme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right) \leq \exp\left(n \times \left(\frac{-t}{n}\right)\right) = e^{-t}$$

donc

$$|f_n(t)| \leq |\ln(t)|\, e^{-t} = \varphi(t)$$

mais $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ d'après le changement de variable effectué à la question 40.a.
Il suit donc du théorème de convergence dominée de Lebesgue que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.}$$

(c) On commence par appliquer un binôme de Newton, la linéarité de l'intégrale et une intégration par parties (généralisée dont on vérifie facilement que tous les termes sont convergents) pour calculer $\int_0^n t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n^k}\binom{n}{k}\int_0^n t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n^k}\binom{n}{k}\left(\frac{n^{k+1}}{k+1}\ln(n) - \frac{n^{k+1}}{(k+1)^2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)}\binom{n}{k}\left(n\ln(n) - \frac{n}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\left(n\ln(n) - \frac{n}{k+1}\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k}\left(\ln(n) - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\left[\left(\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k}\right)\ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{k}\right)\right]
\end{aligned}$$

Pour la première somme, on observe avec un binôme de Newton que :

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k} = -\left[(1+(-1))^{n+1} - 1\right] = 1$$

Pour la seconde, on pose pour tout $n \geq 2$, $\Sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}$ et on montre par récurrence que $\Sigma_n = H_n$.

— **Initialisation :** Pour $n = 2$, le membre de gauche est égal à $\Sigma_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

— **Hérédité :** Soit $n \geq 2$ tel que $\Sigma_n = H_n$. Alors

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)\frac{1}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k-1}\frac{1}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n}}{n+1} + \Sigma_n + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k-1} \\
&= \frac{(-1)^{n}}{n+1} + H_n + \frac{1}{n+1}\left((1+(-1))^{n+1} - 1 - (-1)^{n+2}\right) \\
&= H_n + \frac{1}{n+1} \\
&= H_{n+1}.
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - H_{n+1}\right).}$$

(d) D'après la question 19, $H_n - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ donc, en injectant dans les questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= -\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(H_{n+1} - \ln(n)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + H_n - \ln(n)\right) \\
&= \gamma.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \gamma.}$$

41. On applique le théorème de transfert et, comme en 40.a, on effectue le changement de variable (licite) $t = e^{-x}$. On a donc

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x}\exp(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = -\int_{+\infty}^{0} (\ln t)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\boxed{\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

42. (a) Montrons le résultat par récurrence sur n.

— **Initialisation :** Pour $n = 1$, les deux membres sont égaux à 2.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'égalité soit vérifiée. Alors

$$\begin{aligned}
H_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} &= \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}\\
&= H_n^2 + 2\frac{H_n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\\
&= H_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+1}\left(H_n + \frac{1}{n+1}\right)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{i} + 2\frac{H_{n+1}}{n+1}\\
&= 2\sum_{i=1}^{n+1} \frac{H_i}{i}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a établi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{H_i}{i} = H_n^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.}$$

(b) En raisonnant comme à la question 40, le théorème de convergence dominée implique :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[X^2\right] &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n (\ln t)^2\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\ln(n)^2 - 2\ln(n)H_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n+1} \frac{H_i}{i}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left(\ln(n)^2 - 2\ln(n)H_{n+1} + H_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left((\ln(n) - H_{n+1})^2 + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}\right)\\
&= \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens et de la question 40.d que :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2 = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} - \gamma^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

On a donc établi :

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

43. D'après le théorème de transfert, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-x} \exp(-e^{-x})\, \mathrm{d}x.$$

Comme en 40.a et 41, on peut effectuer le changement de variable $u = e^{-x}$ et on obtient :

$$\Phi_X(t) = \int_0^{+\infty} u^{-it} e^{-u}\, \mathrm{d}u = \Gamma(1 - it).$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) = \Gamma(1 - it).}$$

Cinquième partie : convergence en loi

44. Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{aX+b}(t) = \mathbf{E}\left[e^{it(aX+b)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{ibt} e^{i(at)X}\right] = e^{itb} \Phi_X(at)$$

donc

$$\Phi_{Z_n}(t) = e^{-i\ln(n)t} \Phi_{T_n}\left(\frac{t}{n}\right).$$

On a donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{Z_n}(t) = e^{-i\ln(n)t} \Phi_{T_n}\left(\frac{t}{n}\right).}$$

45. D'après 35.d, on a

$$\Phi_{Z_n}(t) = n^{-it} Q_n(e^{i\frac{t}{n}}).$$

D'après 33, on sait que

$$\Gamma(1 - it) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^{1-it}}{\prod_{k=0}^{n} (1 - it + k)}.$$

Et d'après 30.a, il vient

$$\begin{aligned}
\Phi_{Z_n}(t) &= n^{-it} \frac{n!}{n^n} \frac{e^{it}}{\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{ke^{it/n}}{n})} \\
&= n^{-it} \frac{n!}{n^n} \frac{e^{it}}{\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{ke^{it/n}}{n})} \\
&= n^{-it} n! \frac{e^{it}}{\prod_{k=0}^{n-1} (n - ke^{it/n})}
\end{aligned}$$

Pour conclure, il resterait à montrer que :

$$\frac{e^{it}}{\prod_{k=0}^{n-1}(n - ke^{it/n})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\prod_{k=0}^{n}(1 - it + k)},$$

ce qui est vrai pour $t = 0$ mais me laisse un peu perplexe dans le cas général...
À terminer un jour où je serai plus inspiré...

46. On a

$$\mathbf{P}(T_n - \ln(n) \leq \epsilon n) = \mathbf{P}\left(\frac{T_n - \ln(n)}{n} \leq \epsilon\right) = \mathbf{P}(Z_n \leq \epsilon) = F_{Z_n}(\epsilon)$$

mais si on pose G une variable aléatoire de loi de Gumbel, puisque l'on a la convergence en loi de (Z_n) vers G, on a

$$F_{Z_n}(\epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_G(\epsilon).$$

Or l'expression de la fonction de répartition de la loi de Gumbel a été établie à la question 38. Il vient donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(T_n - \ln(n) \leq \epsilon n) = \exp(-\exp(-\epsilon)).}$$

*** Fin du sujet ***