CCINP - MP 2024 - Mathématiques 1

Éléments de correction

Exercice 1

Q1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(X = k) = (X > k - 1) \setminus (X > k)$$

et $(X > k) \subset (X > k - 1)$ donc

$$\boxed{\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X > k - 1) - \mathbf{P}(X > k).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, les trois termes de l'égalité sont nuls. On suppose donc que $n \geq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k(\mathbf{P}(X > k - 1) - \mathbf{P}(X > k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X > k - 1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (1 + k - 1)\mathbf{P}(X > k - 1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X > k - 1) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (k - 1)\mathbf{P}(X > k - 1) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X > k)}_{\text{télescopage}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X > k) - n\mathbf{P}(X > n).
\end{aligned}$$

On a

$$n\mathbf{P}(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n\mathbf{P}(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k).$$

Le dernier terme étant le reste à l'ordre n de la série $\sum_{k \geq 0} k\mathbf{P}(X = k)$ qui converge car X admet une espérance finie, il tend vers 0. Ainsi, en passant à la limite dans l'égalité établie précédemment, on a :

$$\boxed{\mathbf{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k).}$$

Q2. Notons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, U_i la variable aléatoire correspondant au numéro obtenu au i^{e} tirage. Les tirages étant avec remise, les variables aléatoires $U_1, \dots, U_p$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et on a $X = \max(U_1, \dots, U_p)$.
On a donc $X(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$ de sorte que $\mathbf{P}(X \leq k) = 1$ si $k \geq n$. Soit $k \in [\![1, n - 1]\!]$. On a

$$\mathbf{P}(X \leq k) = \mathbf{P}\left(\max(U_1, \dots, U_p) \leq k\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{p} (U_i \leq k)\right) = \prod_{i=1}^{p} \mathbf{P}(U_i \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a donc

$$\boxed{\mathbf{P}(X=k)=\mathbf{P}(X\leq k)-\mathbf{P}(X\leq k-1)=\left(\frac{k}{n}\right)^p-\left(\frac{k-1}{n}\right)^p.}$$

Q3. La fonction $f_p : x \mapsto x^p$ étant continue sur le segment $[0,1]$, on reconnaît une somme de Riemann à gauche associée à f_p et on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$$

Alors, puisque $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$, il suit des deux questions précédentes que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X]&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}(X>k)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}(1-\mathbf{P}(X\leq k))\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)\\
&=n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\\
&=n\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1-\frac{1}{p+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}n\frac{p}{p+1}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\mathbf{E}[X]\underset{n\to+\infty}{\sim}n\frac{p}{p+1}.}$$

Exercice 2

Q4. Puisque $0 \notin I$, (H) est équivalente à l'équation différentielle sous forme résolue

$$(H_0)\ : y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2-x^2}{x}y = 0.$$

C'est une équation linéaire homogène du second ordre et les fonctions $x \mapsto \frac{4}{x}$ et $x \mapsto \frac{2-x^2}{x}$ sont continues sur I donc l'ensemble des solutions sur I de (H_0) (et donc de (H)) est un espace vectoriel de dimension 2.
En conclusion :

$$\boxed{\dim S_I(H) = 2.}$$

Q5. Supposons que y soit une solution développable en série entière au voisinage de 0. Notons $R > 0$ son rayon de convergence. Alors pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$\begin{aligned} x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1 &\Leftrightarrow \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k + 4\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k + 2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2a_0 + 6a_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\underbrace{(k(k-1)+4k+2)}_{=(k+1)(k+2)}a_k - a_{k-2}\right)x^k = 1 \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie sur un voisinage ouvert de 0, l'unicité du développement en série entière implique :

$$2a_0 = 1, \quad 6a_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 2,\ a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}a_{k-2}.$$

Une récurrence immédiate donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k} = \frac{1}{(2k+2)!} \quad \text{et} \quad a_{2k+1} = 0.$$

Ainsi

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+2)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}.$$

Ainsi, si y est développable en série entière sur un voisinage de 0, alors $y(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}$ sur ce voisinage. Le rayon de convergence du développement en série entière de $\frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}$ étant infini, le calcul précédent montre que l'on a trouvé une solution de (E) développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que c'est la seule.
Ainsi,

$$\boxed{\text{L'unique solution développable en série entière de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } y : x \mapsto \frac{\operatorname{ch}(x)-1}{x^2}.}$$

Q6. D'après le théorème de structure affine des solutions d'une équation différentielle linéaire, puisque $g \in S_I(E)$, on a

$$S_I(E) = g + S_I(H)$$

mais $S_I(H)$ est de dimension 2 donc il suffit de trouver deux solutions non colinéaires de (H) sur I. Puisque f et g sont des solutions de (E), $f - g$ est une solution de (H). Or, pour tout $x \in I$,

$$f(x) - g(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{x^2}$$

de sorte que $f-g$ n'est pas colinéaire à h. On a donc :

$$S_I(H) = \mathrm{Vect}(f-g, h)$$

et

$$S_I(E) = \left\{ g + \lambda(f-g) + \mu h \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Explicitement, la forme générale des solutions de (E) est :

$$\boxed{y : x \mapsto -\frac{1}{x^2} + \lambda \frac{\mathrm{ch}(x)}{x^2} + \mu \frac{\mathrm{sh}(x)}{x^2},}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Q7. Soit $y \in S_{\mathbb{R}}(H)$. Alors, $y \in S_I(H) = \mathrm{Vect}(f-g, h)$ donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x > 0, \quad y(x) = \lambda \frac{\mathrm{ch}(x)}{x^2} + \mu \frac{\mathrm{sh}(x)}{x^2}$$

mais alors, en effectuant un développement limité à l'ordre 2 du numérateur, on a :

$$y(x) = \frac{\lambda \mathrm{ch}(x) + \mu \mathrm{sh}(x)}{x^2} \underset{x \to 0}{=} \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{x} + o(1).$$

Puisque y est solution de (H) sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue. En particulier, elle admet une limite finie en 0. Il s'ensuit que $\lambda = \mu = 0$ et donc que y est identiquement nulle sur I.
Le même raisonnement appliqué à $]-\infty, 0[$ montre que y est aussi identiquement nulle sur cet intervalle. Par continuité, y est nécessairement la fonction nulle.
En conclusion :

$$\boxed{\dim S_{\mathbb{R}}(H) = 0.}$$

Problème

Partie I

Q8. En partitionnant les entiers en fonction de leur parité et en appliquant le théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On retrouve la valeur classique :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u : x \mapsto \sin^{n+1}(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x).$$

En effectuant une intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \times \sin^{n+1}(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos^2(x)}_{=1-\sin^2(x)} \sin^n(x)\, \mathrm{d}x \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$$

On montre alors l'identité par récurrence sur n.

Si $n = 0$, on a $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, \mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$ et $\dfrac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(1)!} = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$. Alors avec la relation précédente, il vient :

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2 \times 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!},$$

d'où l'hérédité.

Par récurrence, on a ainsi établi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

Q10. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1+(-x)^2)^{-1/2} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\times\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)\frac{1}{k!}(-x)^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \times 1\times 3\times\cdots\times(2k-1)\times\frac{1}{k!}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{(2k)!}{2\times 4\times\cdots\times 2k}\times\frac{1}{k!}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k}
\end{aligned}$$

Par primitivation terme à terme dans le disque de convergence, on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}(0) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

et puisque $\operatorname{Arcsin}(0) = 0$, on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}x^{2k+1}.}$$

Q11. La fonction Arcsin étant la bijection réciproque de la restriction du sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x = \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$$

mais, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \in]-1,1[$ donc, il suit de la question précédente que :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}\sin^{2k+1}(x).}$$

Q12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $f_k : x \mapsto \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}\sin^{2k+1}(x)$ qui est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et intégrable car prolongeable par continuité sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après **Q9**, on a :

$$\int_0^{\pi/2} |f_n(x)| \,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}W_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

de sorte que la série $\displaystyle\sum_n \int_0^{\pi/2} |f_n(x)| \,\mathrm{d}x$ converge.
Il suit alors du théorème d'intégration terme à terme que :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right] \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_k(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Q13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_k| = f_k$ donc, d'après les calculs effectués en **Q12**, on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Mais alors, en intégrant sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'égalité établie en **Q11**, on a

$$\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

mais

$$\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On conclut alors avec **Q8** que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Partie II

Q14. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{1}{x^2-1} = -\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k}$$

donc

$$\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-\ln(x))x^{2k}.$$

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k(x) = (-\ln(x))x^{2k}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x).$$

Par positivité des termes, on a

$$|S_n(x)| = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.$$

La fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$ est continue et positive sur $]0, 1[$. On a

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$$

et la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1/2]$ donc, par comparaison, φ l'est.
D'autre part,

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1 + (x-1))}{(x-1)(x+1)} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2}$$

donc φ est intégrable sur $[1/2, 1[$.
Il s'ensuit que φ est intégrable sur $]0, 1[$. Par convergence dominée appliquée à la suite (S_n) des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_k g_k$, on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(x)\,\mathrm{d}x$$

mais, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par intégration par parties généralisée, on a :

$$\int_0^1 g_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2k+1)^2}$$

donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.}$$

Q15. Posons

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2} \end{array} \right. .$$

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
— Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, on a :

$$|h(x,t)| = \left|\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1}{1+t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même de $t \mapsto h(x,t)$ par domination.

Il suit alors du théorème de continuité des intégrales à paramètres que :

$$\boxed{f \in C^0(\mathbb{R}_+).}$$

Q16. Soit $a \in]0,1]$.

— Pour tout $x \in]a,1]$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est C^1 sur $]a,1]$;
— Pour tout $(x,t) \in]a,1] \times \mathbb{R}_+$, on a :

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$$

La fonction $\varphi_a : t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\varphi_a(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2t^3}$$

donc $\varphi_a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

D'après le théorème de dérivation de Leibniz, f est de classe C^1 sur $[a,1]$ et,

$$\forall x \in [a,1], \quad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in]0,1]$, on a :

$$\boxed{f \in C^1(]0,1]) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,1],\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,\mathrm{d}t.}$$

Q17. Pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2} = (1-x^2)\frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

Il suit de **Q16** que :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2x^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2x^2)\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} \\
&= \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2x^2}{1+t^2}\right)\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} \\
&= \frac{\ln(x)}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \,]0,1]\,, \quad f'(x) = \frac{\ln(x)}{1-x^2}.}$$

Q18. On a

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$$

mais, d'après **Q17**, on a :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$

Puisque $f(0) = 0$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}.$$

Il suit alors de **Q14** que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Comme en **Q13**, on applique **Q8** pour obtenir à nouveau :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

*** Fin du sujet ***