CCINP - MP 2024 - Mathématiques 1

Durée : 4h

Exercice 1

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

Q1. Exprimer, pour k non nul, $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbf{P}(X > k-1)$ et de $\mathbf{P}(X > k)$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X > k) - n\mathbf{P}(X > n)$.

Démontrer le résultat de cours : $\mathbf{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu.

Calculer, pour tout entier naturel k, $\mathbf{P}(X \leq k)$, puis donner la loi de X.

Q3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant **Q1**, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $\mathbf{E}[X]$.

Exercice 2

On considère les équations différentielles :

$$\begin{aligned} (E) &: \quad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1 \\ (H) &: \quad x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0 \end{aligned}$$

On note $I =]0, +\infty[$, $S_I(E)$ l'ensemble des solutions de (E) sur I et $S_I(H)$ l'ensemble des solutions de l'équation (H) sur I.

Q4. Donner, en justifiant, la dimension de l'espace vectoriel $S_I(H)$.

Q5. Démontrer qu'il existe une unique solution f de (E) sur I développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Vérifier que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$.

Q6. On note pour $x \in I$, $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x^2}$.

On admet dans cette question que $g \in S_I(E)$ et $h \in S_I(H)$.

Donner, sans calculs, l'ensemble $S_I(E)$.

Q7. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $S_{\mathbb{R}}(H)$ (solutions de (H) sur $\mathbb{R}$) ?

Problème

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de cette somme.

Q8. Question préliminaire.

Si on admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q9. On note, pour tout entier naturel n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n \,\mathrm{d}x$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin(x))^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n.

En déduire, pour tout entier naturel n, que $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q10. Déterminer sur l'intervalle $]-1, 1[$, le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$.

Q11. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}$.

Q12. Justifier que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1}\right] \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin(x))^{2n+1} \,\mathrm{d}x$.

Q13. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q14. Donner sur l'intervalle $]-1, 1[$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, puis calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} \,\mathrm{d}x$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q15. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Q16. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, 1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q17. Réduire au même dénominateur l'expression $\dfrac{t}{1+t^2} - \dfrac{x^2 t}{1+t^2x^2}$ et en déduire que pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

Q18. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

*** Fin du sujet ***