

Éléments de correction

Exercice 1

Q1. On calcule

$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = (X - 1)(X + 2)^2$$

de sorte que $\text{Sp}(A) = \{-2, 1\}$.

En résolvant les systèmes correspondant aux identités $AX = X$ et $AX = -2X$, on obtient :

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à la taille de la matrice, A est diagonalisable.

Si on pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a la relation

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

=D

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le système se traduit en $X_{n+1} = AX_n$. Alors,

$$DY_n = P^{-1}APY_n = P^{-1}APP^{-1}X_n = P^{-1}AX_n = P^{-1}X_{n+1} = Y_{n+1}.$$

Une récurrence immédiate implique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_n = \alpha_0 \\ \beta_n = (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_n = (-2)^n \gamma_0. \end{cases}$$

Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si, et seulement si, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^3 . L'application $V \mapsto P^{-1}V$ étant un homéomorphisme de \mathbb{R}^3 vers lui-même, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathbb{R}^3 . Or cette suite converge si, et seulement si les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément.

Puisque $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raisons respectives 1, -2 et -2 , ces suites convergent si, et seulement si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$.

Puisque $X_0 = PY_0$, on a

$$\begin{cases} u_0 = 2\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \\ v_0 = 6\alpha_0 + \beta_0 \\ w_0 = \alpha_0 - \gamma_0 \end{cases}$$

de sorte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simultanément si, et seulement si, $X_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En conclusion,

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in E_1(A).$$

Dans ce cas, on a $X_n = A^n X_0 = X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **constantes**, égales respectivement à $2\alpha_0$, $6\alpha_0$ et α_0 .

Exercice 2

Q3. Pour trouver l'image de 1 par cette permutation, il suffit de saisir `s[1]`.

La transposition $(2, 3) \in S_4$ est représentée par la liste `[0, 1, 3, 2]`.

Q4.

```
1 def comp(s1, s2):
2     n = len(s1)
3     s = []
4     for i in range(n):
5         s.append(s1[s2[i]])
6     return s
```

Q5.

```
1 def inv(s):
2     n = len(s)
3     t = []
4     for i in range(n):
5         t.append(s.index(i))
6     return t
```

Q6.

```
1 def groupe(G):
2     if len(G)==0:
3         # Si G est vide
4         return False
5     for s in G:
6         for t in G:
7             if comp(s, inv(t)) not in G:
8                 # la composition s*t^{-1} n'est pas dans G
9                 return False
10    return True
```

Q7.

```
1 def cyclique(s):
2     G = [s]
3     t = comp(s, s)
4     while t not in G:
5         G.append(t)
6         t = comp(t, s)
7     return G
```

Problème

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives.

Q8. La matrice A est symétrique réelle. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$X^T A X = 2x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 + x^2 \geq 0$$

et

$$X^T A X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

de sorte que :

$$A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$$

Caractérisation spectrale

Q9. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

\Rightarrow Supposons $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on sait déjà que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . On a

$$X^T A X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|_2^2.$$

Si $\lambda \leq 0$, alors $X^T A X \leq 0$, une contradiction car X est non nul.

\Rightarrow Réciproquement, supposons $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée (X_1, \dots, X_n) formée de vecteurs propres de A . On note $\lambda_i > 0$ la valeur propre associée à chaque X_i .

Soit $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$ un vecteur non nul. On a

$$X^T A X = \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right)^T A \left(\sum_{j=1}^n x_j X_j \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j X_i^T A X_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_j x_i x_j X_i^T X_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_j x_i x_j \underbrace{\langle X_i, X_j \rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 > 0.$$

On a donc bien :

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Q10. Étudions la fonction polynômiale $p : x \in \mathbb{R} \mapsto P(x)$ associée à P . Elle est C^∞ sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

donc on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$p'(x)$		+	0	-	0	+	
$p(x)$	$-\infty$	↗		1	↘		$+\infty$
					-3		

Il suit alors du théorème de la bijection continue que p s'annule exactement une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$. Puisque P est de degré 3, on peut donc affirmer que

P admet exactement trois racines réelles α, β, γ telles que $\alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma$.

Un calcul matriciel direct montre que

$$P(B) = 0_3.$$

Puisque P est scindé à racines simples, B admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable.

Puisque $P(B) = 0_3$, les valeurs propres de B sont parmi les racines de P . On sait déjà que β et γ sont strictement positifs. Il reste juste à observer que $P(0) = -3 < 0$ de sorte que, la croissance de p sur $]-\infty, 1[$ implique que $\alpha > 0$. Ainsi, on a

$$\text{Sp}(B) \subset \{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Il suit alors de la caractérisation spectrale que :

$$B \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}).$$

Un critère en dimension 2

Q11. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, toutes les valeurs propres de M sont réelles donc, si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres avec multiplicité, on a donc :

$$\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Puisque $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il suit de **Q9** que toutes les λ_i sont strictement positives de sorte que :

$$\text{tr}(M) > 0 \quad \text{et} \quad \det(M) > 0.$$

Q12. Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres réelles. Si $\det(M) > 0$, alors $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe. Si l'une des deux est négative, alors l'autre aussi, auquel cas $\text{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$. Ainsi,

$$\forall M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \quad M \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \det(M) > 0 \\ \text{tr}(M) > 0. \end{cases}$$

Q13. Ce résultat est faux pour les matrices de taille 3. Par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie $\text{tr}(M) = 1 > 0$, $\det(M) = 3 > 0$ mais elle n'est pas définie positive car admet -1 pour valeur propre.

Q14. Posons $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$, qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 comme produit d'ouverts. La fonction f est de classe C^2 sur U par somme et quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annulant pas sur U .

Pour tout $(x, y) \in U$, on a

$$\nabla(f)(x, y) = \left(\frac{x^2 y - 1}{x^2 y}, \frac{xy^2 - 1}{xy^2} \right)$$

de sorte que

$$\nabla(f)(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 1 \\ xy^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - y^4 = 0 \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1).$$

Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in U$, on a :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3 y} & \frac{1}{x^2 y^2} \\ \frac{1}{x^2 y^2} & \frac{2}{xy^3} \end{pmatrix}$$

donc

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(H_f(1, 1)) = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \text{tr}(H_f(1, 1)) = 4 > 0$$

donc $H_f(1, 1) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

En conclusion :

f présente un minimum local en $(1, 1)$.

Le critère de Sylvester

Q15. Posons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons $X = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X^T M X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \tilde{x}_i \tilde{x}_j m_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq k} x_i x_j m_{i,j} = X_k^T M_k X_k.$$

Q16. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ non nul et X le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné à la question **Q15**, qui est non nul puisque X_k l'est. Alors

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X > 0,$$

de sorte que $M_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$. D'après **Q11**, on a donc $\det(M_k) > 0$.

En conclusion :

Toute matrice symétrique définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Q17. Puisque $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont non nulles donc $M_{n-1} \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Si on pose $V = -M_{n-1}^{-1}U$, on a bien $M_{n-1}V + U = 0$.

Ainsi,

$$\exists V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}), \quad M_{n-1}V + U = 0.$$

En effectuant le produit par blocs, en utilisant $M_{n-1}V + U = 0$ et, en transposant, on a $V^T M_{n-1} + U^T = 0$ et donc :

$$Q^T M Q = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & V^T U + \alpha \end{array} \right)$$

Posons $\beta = V^T U + \alpha$. On a

$$\det(Q^T M Q) = \det \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array} \right) = \beta \det(M_{n-1})$$

mais $\det(M_{n-1}) > 0$ car $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ et, d'autre part,

$$\det(Q^T M Q) = \underbrace{\det(Q)^2}_{=1} \underbrace{\det(M)}_{>0} > 0$$

donc $\beta > 0$.

En conclusion,

$$\exists \beta > 0, \quad Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}.$$

Q18. Si $n = 1$, toute matrice vérifiant le critère de Sylvester est trivialement symétrique définie positive.

Soit $n \geq 2$ tel que toute matrice de $\mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester. On écrit M comme à la question **Q17**.

Tous les mineurs principaux de M_{n-1} étant des mineurs principaux de M , ils sont strictement positifs. Il s'ensuit que $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

En reprenant les notations de **Q17**, on a

$$Q^T M Q = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array} \right),$$

avec $\beta > 0$.

Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y_{n-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$. On a donc

$$Y^T (Q^T M Q) Y = Y^T M_{n-1} Y + \beta y_n^2.$$

Si Y_{n-1} est non nul, $Y^T M_{n-1} Y > 0$ de sorte que $Y^T (Q^T M Q) Y > 0$. Si Y_{n-1} est nul, y_n est non nul et donc $Y^T (Q^T M Q) Y = \beta y_n^2 > 0$. Il s'ensuit que $Q^T M Q \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc que $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, d'où l'hérédité.

Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie le critère de Sylvester, alors elle est définie positive.

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $C(x)$ est symétrique et, avec les notations de l'énoncé pour les mineurs principaux, on a :

$$\det(C(x)_1) = 2 > 0, \quad \det(C(x)_2) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det(C(x)_3) = 1 - 2x^2$$

de sorte que

$$\det(C(x)_3) > 0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après le critère de Sylvester

$$C(x) \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Q20. Si on note M la matrice, on a

$$\det(M_3) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

donc, d'après le critère de Sylvester

$$M \notin \mathcal{S}_5^{++}(\mathbb{R}).$$

Q21. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

Les mineurs principaux sont :

$$\det(A_1) = 4 > 0, \quad \det(A_2) = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \det(A_3) = \frac{3}{4} > 0$$

de sorte que $A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

En particulier, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nul, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^T A X > 0$$

On a donc bien

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}, \quad 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q22. On calcule les premiers déterminants :

$$\det(S_1) = \sqrt{3} > 0$$

$$\det(S_2) = 2 > 0$$

$$\det(S_3) = \sqrt{3} > 0$$

$$\det(S_4) = 1 > 0$$

$$\det(S_5) = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le k^{e} déterminant principal de S_n étant $\det(S_k)$, on en déduit que S_1, S_2, S_3 et S_4 sont définies positives mais que, pour tout $n \geq 5$, S_n ne l'est pas.

En conclusion :

$$S_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow n \leq 4.$$

***** Fin du sujet *****