CCINP - MP 2024 - Mathématiques 2

Durée : 4h

Exercice 1

Q1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2. **Application**. On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} & = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} & = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$. Une permutation de S_n sera représentée en Python par une liste, dont l'élément d'indice i est l'image de i par cette permutation. Par exemple, la liste `[3,1,0,2]` représente la permutation $\sigma \in S_4$ définie par $\sigma(0) = 3$, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 0$ et $\sigma(3) = 2$.
Dans tout l'exercice, on pourra utiliser librement les tests Python du type `x in L` (respectivement `x not in L`) permettant de vérifier si `x` est présent dans la liste `L` (respectivement de vérifier si `x` n'est pas présent dans la liste `L`).

Q3. Si `s` est une liste Python représentant une permutation de S_4, quelle instruction Python permet de trouver l'image de `1` par cette permutation ?

Quelle liste Python représente la transposition $(2\ 3) \in S_4$?

Q4. Écrire une fonction Python `comp(s1,s2)` prenant en entrée deux listes représentant des permutations σ_1 et σ_2 du même groupe de permutations et renvoyant la liste représentant la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Q5. Écrire une fonction Python `inv(s)` prenant en entrée une liste représentant une permutation σ et renvoyant la liste représentant σ^{-1}.

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

Q6. On souhaite tester si un sous-ensemble G de S_n est ou non un sous-groupe de S_n. Écrire une fonction Python `groupe(G)` prenant en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de S_n et renvoyant `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de S_n, `False` sinon.

Q7. Écrire une fonction Python `cyclique(s)` prenant en entrée une liste `s` représentant une permutation σ de S_n et renvoyant le sous-groupe de S_n engendré par σ sous la forme d'une liste de listes.

Problème

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n, une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top M X > 0.$$

Q8. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Q10. **Application**. Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q11. Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\mathrm{tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q12. Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q13. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q14. **Application**. Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.

Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [\![1,n]\!]$, on définit le *k-ième mineur principal* comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j\in[\![1,k]\!]} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la question **Q10** sont les déterminants des matrices $B_1 = (1)$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la question **Q10**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q15. On fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1,n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que :

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X.$$

Q16. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q17. Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix},$$

avec $M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.

Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^\top M Q$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.

Q18. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Q20. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q21. Démontrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q22. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?

*** Fin du sujet ***

Partagé sur http://maths-concours.fr – Licence CC BY-NC-SA 4.0.