CCINP - MPI 2024 - Mathématiques 2

Éléments de correction

Exercice 1

Q1. On calcule
$$\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = (X-1)(X+2)^2$$
de sorte que $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1\}$.
En résolvant les systèmes correspondant aux identités $AX = X$ et $AX = -2X$, on obtient :
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$
La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à la taille de la matrice, A est diagonalisable.
Si on pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a la relation
$$\boxed{P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=D}.}$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le système se traduit en $X_{n+1} = AX_n$. Alors,
$$DY_n = P^{-1}APY_n = P^{-1}APP^{-1}X_n = P^{-1}AX_n = P^{-1}X_{n+1} = Y_{n+1}.$$
Une récurrence immédiate implique
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$
donc
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_n &= \alpha_0 \\ \beta_n &= (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_n &= (-2)^n \gamma_0. \end{cases}}$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si, et seulement si, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^3$. L'application $V \mapsto P^{-1}V$ étant un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vers lui-même, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^3$. Or cette suite converge si, et seulement si les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément.
Puisque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raisons respectives 1, -2 et -2, ces suites convergent si, et seulement si $\beta_0 = \gamma_0 = 0$.
Puisque $X_0 = PY_0$, on a
$$\begin{cases} u_0 &= 2\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \\ v_0 &= 6\alpha_0 + \beta_0 \\ w_0 &= \alpha_0 - \gamma_0 \end{cases}$$

de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si, et seulement si, $X_0 = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En conclusion,

$$\boxed{(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \in E_1(A).}$$

Dans ce cas, on a $X_n = A^n X_0 = X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **constantes**, égales respectivement à $2\alpha_0$, $6\alpha_0$ et α_0.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$.

Q3. Si $x < 0$, $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum_n f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x = 0$, $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc la série $\sum_n f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x > 0$, par croissances comparées,

$$n^2 e^{-x\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison, la $\sum_n f_n(x)$ converge absolument, et donc converge.

En conclusion, on a :

$$\boxed{D = \mathbb{R}_+^*.}$$

Q4. Soit $a > 0$.

— Chaque f_n est continue sur $[a, +\infty[$.

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a

$$|f_n(x)| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}} = f_n(a)$$

mais la série $\sum_n f_n(a)$ converge d'après **Q3** donc, la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, et donc uniformément sur cet intervalle.

Il suit alors du théorème de continuité pour les séries de fonctions que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, +\infty[$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a :

$$\boxed{f \in C^0(\mathbb{R}_+^*).}$$

Q5. Soit $a > 0$.

— D'après **Q4**, $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

D'après le théorème de la double limite, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x) \right) = 1.$$

En conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$$

Q6. Soit $x > 0$. La fonction $g : t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$g(k+1) \leq \int_k^{k+1} g(t) \, \mathrm{d}t \leq g(k).$$

. Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les inégalités pour k variant de 0 à n, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} g(k) \leq \int_0^{n+1} g(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} g(k)$$

mais

$$\sum_{k=1}^{n+1} g(k) = \sum_{k=0}^{n+1} g(k) - 1$$

donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} g(k) \leq 1 + \int_0^{n+1} g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{n+1} g(t)\, \mathrm{d}t \leq \sum_{k=0}^{n} g(k).$$

Puisque g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans ces inégalités et il vient :

$$f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t \leq f(x),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t.}$$

Q7. Posons, pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$ et montrons que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.
On commence par observer que, par positivité de l'intégrande, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, on a, pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t \geq \int_0^{A} e^{-x\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$$

et donc, par décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$, on a

$$F(x) \geq \int_0^{A} e^{-x\sqrt{A}}\, \mathrm{d}t = Ae^{-x\sqrt{A}}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} Ae^{-x\sqrt{A}} = A$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \eta[$, $F(x) \geq A - 1$.
Prenons $M \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $A = M + 1$. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \eta[$, $F(x) \geq A - 1 = M$. Autrement dit,

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty.$$

Il suit alors de l'encadrement obtenu à la question **Q6** que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t.}$$

Problème

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques définies positives.

Q8. La matrice A est symétrique réelle. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$X^\top AX = 2x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 + x^2 \geq 0$$

et

$$X^\top AX = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rl} x + y & = 0 \\ x & = 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; (x, y) = (0, 0)$$

de sorte que :

$$\boxed{A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})}$$

Caractérisation spectrale

Q9. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Nous allons montrer que

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on sait déjà que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. On a

$$X^\top AX = X^\top(\lambda X) = \lambda X^\top X = \lambda \, \|X\|_2^2 .$$

Si $\lambda \leq 0$, alors $X^\top AX \leq 0$, une contradiction car X est non nul.
$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, supposons $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$ formée de vecteurs propres de A. On note $\lambda_i > 0$ la valeur propre associée à chaque X_i.

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$ un vecteur non nul. On a

$$X^\top AX = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right)^\top A \left(\sum_{j=1}^{n} x_j X_j\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i x_j X_i^\top AX_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_j x_i x_j X_i^\top X_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_j x_i x_j \underbrace{\left\langle X_i, X_j \right\rangle}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 > 0.$$

On a donc bien :

$$\boxed{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.}$$

Q10. Étudions la fonction polynômiale $p : x \in \mathbb{R} \mapsto P(x)$ associée à P. Elle est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p'(x) = 3(x-1)(x-3)$$

donc on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Il suit alors du théorème de la bijection continue que p s'annule exactement une fois sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$. Puisque P est de degré 3, on peut donc affirmer que

$$\boxed{P \text{ admet exactement trois racines réelles } \alpha, \beta, \gamma \text{ telles que } \alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma.}$$

Un calcul matriciel direct montre que

$$P(B) = 0_3.$$

Puisque P est scindé à racines simples, B admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable.
Puisque $P(B) = 0_3$, les valeurs propres de B sont parmi les racines de B. On sait déjà que β et γ sont strictement positifs. Il reste juste à observer que $P(0) = -3 < 0$ de sorte que, la croissance de p sur $]-\infty, 1[$ implique que $\alpha > 0$. Ainsi, on a

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Il suit alors de la caractérisation spectrale que :

$$\boxed{B \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}).}$$

Un critère en dimension 2

Q11. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, toutes les valeurs propres de M sont réelles donc, si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres avec multiplicité, on a donc :

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(M) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Puisque $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il suit de **Q9** que toutes les λ_i sont strictement positives de sorte que :

$$\boxed{\mathrm{tr}(M) > 0 \quad \text{et} \quad \det(M) > 0.}$$

Q12. Soit $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres réelles. Si $\det(M) > 0$, alors $\lambda_1\lambda_2 > 0$ donc λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe. Si l'une des deux est négative, alors l'autre aussi, auquel cas $\mathrm{tr}(M) = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \quad M \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \det(M) > 0 \\ \mathrm{tr}(M) > 0. \end{cases}}$$

Q13. Ce résultat est faux pour les matrices de taille 3. Par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie $\mathrm{tr}(M) = 1 > 0$, $\det(M) = 3 > 0$ mais elle n'est pas définie positive car admet -1 pour valeur propre.

Q14. Posons $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit d'ouverts. La fonction f est de classe C^2 sur U par somme et quotient de fonctions polynomiales, le dénominateur ne s'annulant pas sur U.
Pour tout $(x, y) \in U$, on a

$$\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2y - 1}{x^2y} & \dfrac{xy^2 - 1}{xy^2} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\nabla(f)(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} x^2y &= 1 \\ xy^2 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y - y^4 &= 0 \\ x &= \dfrac{1}{y^2} \end{cases} \iff (x, y) = (1, 1).$$

Par ailleurs, pour tout $(x, y) \in U$, on a :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3 y} & \dfrac{1}{x^2 y^2} \\ \dfrac{1}{x^2 y^2} & \dfrac{2}{x y^3} \end{pmatrix}$$

donc

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(H_f(1, 1)) = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(H_f(1, 1)) = 4 > 0$$

donc $H_f(1, 1) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.
En conclusion :

$$\boxed{f \text{ présente un minimum local en } (1, 1).}$$

Le critère de Sylvester

Q15. Posons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} x_i & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons $X = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$X^\top M X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \tilde{x}_i \tilde{x}_j m_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq k} x_i x_j m_{i,j} = X_k^\top M_k X_k.$$

Q16. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $k \in [\![1, n]\!]$. Soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ non nul et X le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donné à la question **Q15**, qui est non nul puisque X_k l'est. Alors

$$X_k^\top M_k X_k = X^\top M X > 0,$$

de sorte que $M_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$. D'après **Q11**, on a donc $\det(M_k) > 0$.
En conclusion :

$$\boxed{\text{Toute matrice symétrique définie positive vérifie le critère de Sylvester.}}$$

Q17. Puisque $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont non nulles donc $M_{n-1} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Si on pose $V = -M_{n-1}^{-1} U$, on a bien $M_{n-1} V + U = 0$.
Ainsi,

$$\boxed{\exists V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}), \quad M_{n-1} V + U = 0.}$$

En effectuant le produit par blocs et en utilisant $M_{n-1} V + U = 0$ et, en transposant, $V^\top M_{n-1} + U^\top = 0$, on a

$$Q^\top M Q = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & V^\top U + \alpha \end{array}\right)$$

Posons $\beta = V^\top U + \alpha$. On a

$$\det(Q^\top M Q) = \det \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array}\right) = \beta \det(M_{n-1})$$

mais $\det(M_{n-1}) > 0$ car $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ et, d'autre part,

$$\det(Q^\top MQ) = \underbrace{\det(Q)^2}_{=1} \underbrace{\det(M)}_{>0} > 0$$

donc $\beta > 0$.
En conclusion,

$$\boxed{\exists \beta > 0, \quad Q^\top MQ = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}.}$$

Q18. Si $n = 1$, toute matrice vérifiant le critère de Sylvester est trivialement symétrique définie positive.
Soit $n \geq 2$ tel que toute matrice de $\mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant le critère de Sylvester. On écrit M comme à la question **Q17**.
Tous les mineurs principaux de M_{n-1} étant des mineurs principaux de M, ils sont strictement positifs. Il s'ensuit que $M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.
En reprenant les notations de **Q17**, on a

$$Q^\top MQ = \left(\begin{array}{c|c} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ \hline 0_{1,n-1} & \beta \end{array}\right),$$

avec $\beta > 0$.
Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y_{n-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$. On a donc

$$Y^\top(Q^\top MQ)Y = Y^\top M_{n-1} Y + \beta y_n^2.$$

Si Y_{n-1} est non nul, $Y^\top M_{n-1} Y > 0$ de sorte que $Y^\top(Q^\top MQ)Y > 0$. Si Y_{n-1} est nul, y_n est non nul et donc $Y^\top(Q^\top MQ)Y = \beta y_n^2 > 0$. Il s'ensuit que $Q^\top MQ \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc que $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, d'où l'hérédité.
Par récurrence, on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\text{Si } M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifie le critère de Sylvester, alors elle est définie positive.}}$$

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $C(x)$ est symétrique et, avec les notations de l'énoncé pour les mineurs principaux, on a :

$$\det(C(x)_1) = 2 > 0, \quad \det(C(x)_2) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \det(C(x)_3) = 1 - 2x^2$$

de sorte que

$$\det(C(x)_3) > 0 \iff |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après le critère de Sylvester

$$\boxed{C(x) \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \iff |x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Q20. Si on note M la matrice, on a

$$\det(M_3) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

donc, d'après le critère de Sylvester

$$\boxed{M \notin \mathcal{S}_5^{++}(\mathbb{R}).}$$

Q21. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

Les mineurs principaux sont :

$$\det(A_1) = 4 > 0, \quad \det(A_2) = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \det(A_3) = \frac{3}{4} > 0$$

de sorte que $A \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

En particulier, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ non nul, si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz = X^\top AX > 0$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}, \quad 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.}$$

Q22. On calcule les premiers déterminants :

$$\begin{aligned} \det(S_1) &= \sqrt{3} > 0 \\ \det(S_2) &= 2 > 0 \\ \det(S_3) &= \sqrt{3} > 0 \\ \det(S_4) &= 1 > 0 \\ \det(S_5) &= 0. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, le k^e déterminant principal de S_n étant $\det(S_k)$, on en déduit que S_1, S_2, S_3 et S_4 sont définies positives mais que, pour tout $n \geq 5$, S_n ne l'est pas.
En conclusion :

$$\boxed{S_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff n \leq 4.}$$

*** Fin du sujet ***