E3A - MPI 2024 - Mathématiques

Éléments de correction

Exercice 1

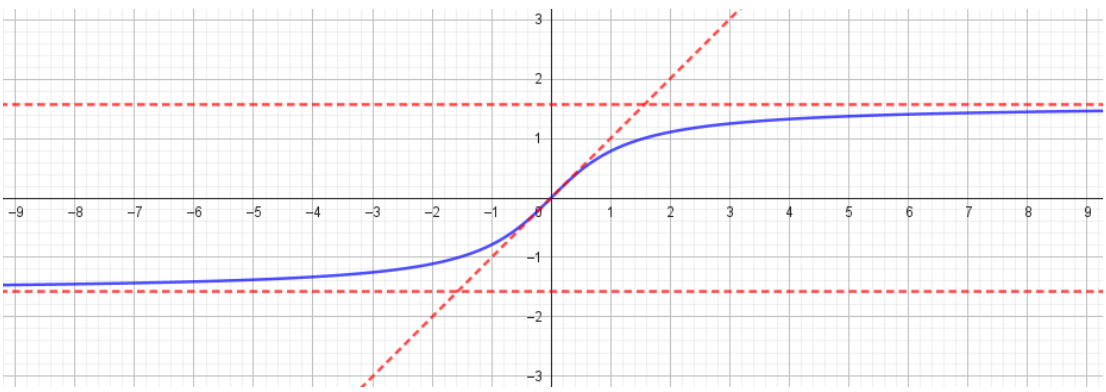
1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, impaire de classe C^∞ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. La fonction arctan′ étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le tableau de variations est donnée par :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\arctan'(x)$	$+$	
arctan	$-\dfrac{\pi}{2}$ $\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

L'équation de la tangente en 0 est $y = \arctan(0) + \arctan'(0)x$, c'est-à-dire $y = x$.
Le graphe de arctan possède deux asymptotes horizontales, la droite d'équation $y = -\dfrac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}$ en $+\infty$.
L'allure de la courbe représentative dans un repère orthonormal est donnée par la figure suivante :



3. La fonction arctan étant C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle est continue. En outre,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arctan(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

donc arctan est bornée et $N_0(\arctan) \leq \dfrac{\pi}{2}$.
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, il s'ensuit que

$$\boxed{N_0(\arctan) = \frac{\pi}{2}.}$$

4. Si v est dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $\arctan \circ v$ est dérivable sur I par composition de fonctions dérivables et, pour tout $t \in I$, on a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\arctan(v(t))] = \frac{v'(t)}{1+v(t)^2}.}$$

5. La fonction $f : t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ par composition. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = 0$$

donc f est constante sur chaque intervalle du domaine de définition de f, et donc constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
Puisque $f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad t > 0. \end{cases}}$$

6. Soit $f \in E$.

6.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g_x : t \mapsto \arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ par composition, produit et quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. Puisque $f \in E$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f| \leq M$. Alors
Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$|g_x(t)| \leq M\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ d'après le critère de Riemann, la fonction g_x est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$ par domination. D'autre part, g_x est continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur ce segment, il s'ensuit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad t \mapsto \arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2} \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[).}$$

6.2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions continues.
En outre, si on pose $\varphi : t \mapsto \frac{M\pi}{2(1+t^2)}$, alors $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\right| \leq \varphi(t).$$

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\Phi(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} \arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \in C^0(\mathbb{R}).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|\Phi(f)(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left|\arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{M\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{M\pi}{2}\,[\arctan(t)]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{M\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

donc $\Phi(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
En conclusion :

$$\boxed{\Phi(f) \in E.}$$

6.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, par imparité d'arctan, on a :

$$\Phi(f)(-x) = \int_0^{+\infty} \arctan(-xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\Phi(f)(x)$$

donc

$$\boxed{\Phi(f) \text{ est impaire.}}$$

7. On a déjà montré à la question **6.2** que $\Phi(E) \subset E$, il suffit donc de vérifier que Φ est linéaire.
Soit $(f,g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque E est un espace vectoriel, $\lambda f + g \in E$ et donc $\Phi(\lambda f + g)$ est bien définie d'après la question **6.1**. En outre, par linéarité de l'intégrale sur un intervalle, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda f + g)(x) &= \int_0^{+\infty} \arctan(xt) \times \frac{\lambda f(t) + g(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} \arctan(xt) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \arctan(xt) \times \frac{g(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\Phi(f)(x) + \Phi(g)(x).
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(\lambda f + g) = \lambda\Phi(f) + \Phi(g)$ et donc :

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(E).}$$

8. On utilise le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales à paramètres sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$.
Soit $a > 0$. On pose

$$h : \left\{\begin{array}{ccc}]a, +\infty[\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \arctan(xt) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2} \end{array}\right. .$$

— Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **6.1** ;
— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t}{1+x^2t^2} \times \frac{f(t)}{(1+t^2)} \leq N_0(f) \times \underbrace{\frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}}_{=\varphi_a(t)}.$$

La fonction φ_a est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\varphi_a(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} N_0(f)\times\frac{t}{a^2t^4} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Puisque $t\mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il s'ensuit que $\varphi_a\in\mathcal{L}^1([1,+\infty[)$ et, par continuité de φ_a sur le segment $[0,1]$, $\varphi_a\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

D'après le théorème de dérivation de Leibniz, on peut donc affirmer que $\Phi(f)\in\mathcal{C}^1([a,+\infty[)$. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, on a :

$$\boxed{\Phi(f)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*).}$$

9.

9.1. On sait que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Chaque h_n étant continue sur $\mathbb{R}$ et la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers h, on a :

$$\boxed{h\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}).}$$

9.2. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans l'espace vectoriel normé (E,N_0), elle est bornée pour cette norme. Il existe donc $A\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $N_0(h_n)\leq A$. D'autre part, $h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} h$ donc, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, $N_0(h_n-h)\leq 1$.
Soit $n\geq n_0$ et $x\in\mathbb{R}$, on a

$$|h(x)|\leq N_0(h)=N_0(h-h_n+h_n)\leq N_0(h-h_n)+N_0(h_n)\leq 1+A$$

donc h est bornée sur $\mathbb{R}$.
En conclusion,

$$\boxed{h\in E.}$$

10.

10.1. Pour tout $x>0$, on pose

$$h_x:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}\end{array}\right.$$

de sorte que

$$g(x)=\Phi(1)(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}h_x(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pose

$$h:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right.$$

— Pour tout $t\in]0,+\infty[$, on a

$$\lim_{x\to+\infty}h_x(t)=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{1+t^2}=h(t).$$

— Pour tout $x > 0$, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$|h_x(t)| \leq h(t)$$

et $h \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[)$.

D'après l'extension du théorème de convergence dominée aux paramètres continus, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}.}$$

10.2. D'après le théorème de dérivation de Leibniz, dont nous avons montré à la question **8** qu'il s'applique à $\Phi(f)$, pour toute fonction $f \in E$, puisque $f_0 \in E$, on a $\Phi(f_0) \in E$ d'après **6.2**. Alors, avec $h(x,t) = \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$, on a :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\, \mathrm{d}t.}$$

10.3. Pour tout $x > 0$, on a

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est C^1 strictement décroissante de $]0, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$ donc on peut effectuer le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans la seconde intégrale. Il vient :

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} \arctan\left(\frac{1}{x(1/t)}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \arctan\left(\frac{1}{xu}\right) \mathrm{d}u$$

donc, par linéarité de l'intégrale

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\left(\arctan(xt) + \arctan\left(\frac{1}{xt}\right)\right) \mathrm{d}t.$$

Il suit alors de **5** que

$$g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi^2}{4}.}$$

10.4. Une autre expression de g'.

10.4.1. Soit $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. Posons

$$F_x(T) = \frac{1}{(1+x^2T)(1+T)} \in \mathbb{R}(T).$$

D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on peut écrire

$$F_x(T) = \frac{\alpha}{1+x^2T} + \frac{\beta}{1+T}$$

avec

$$\alpha = \left[(1+x^2T)F_x(T)\right]_{|T=-\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-1}$$

et

$$\beta = [(1+T)F_x(T)]_{|T=-1} = -\frac{1}{x^2-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{(1+x^2T)(1+T)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+x^2T} - \frac{1}{1+T}\right).}$$

10.4.2. Pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, il suit de **10.2** et du calcul précédent que :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} tF_x(t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^2-1}\int_0^{+\infty} \frac{x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^2-1} \times \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{2x^2t}{1+x^2t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^2-1} \times \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x^2t^2}{1+t^2}\right|\right]_{t=0}^{t\to+\infty} \\
&= \frac{\ln(x)}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad g'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-1}.}$$

10.4.3. $g = \Phi(f_0) \in C^1(\mathbb{R})$ d'après **8** donc

$$g'(1) = \lim_{x\to1} g'(x) = \lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u(2+u)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

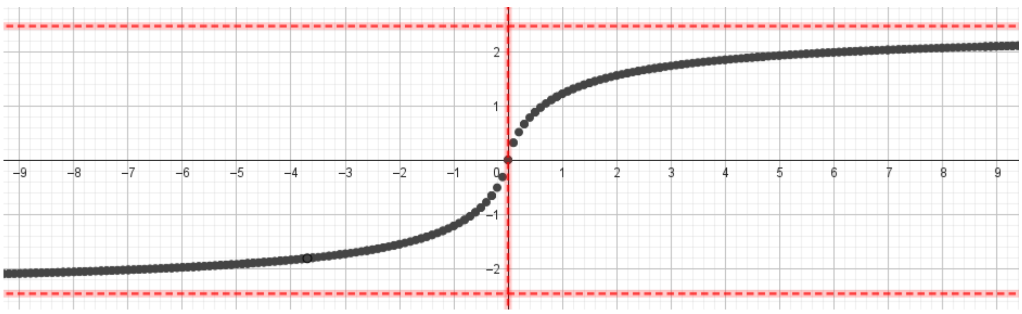
$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad g'(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}}$$

10.5. Pour tout $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < 0$ et $x^2 - 1 < 0$ donc $g'(x) > 0$.
Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\ln(x) > 0$ et $x^2 - 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$.

On a $g(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}$ d'après **10.1**.
Par imparité établie à la question **6.3**, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\dfrac{\pi^2}{4}$ $\nearrow$	$\dfrac{\pi^2}{4}$

Puisque $\displaystyle\lim_{x \to 0} g'(x) = +\infty$, la courbe représentative de g admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
L'allure de la courbe représentative est donc :



Remarque

Étonnante coïncidence, l'étude de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1 + t^2}\, dt$ était aussi dans l'épreuve de CCINP MP Maths 1 de la même année. La partie II du problème de cette dernière épreuve est très proche des dernières questions du présent exercice.

Exercice 2

1. Par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes, on a :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$$

donc, puisque $\overline{f} = \mathrm{Re}(f) - i\mathrm{Im}(f)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t - i\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \overline{\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t} \\ &= \overline{\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t}.\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t}.}$$

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Si P s'annule en tout point de $\mathbb{U}$, alors P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

3. Si $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Alors

$$\overline{z} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

Réciproquement, si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, alors $1 = \overline{z}z = |z|^2$ donc $|z| = 1$ et $z \in \mathbb{U}$.

Ainsi, on a :

$$\boxed{z \in \mathbb{U} \;\Leftrightarrow\; \overline{z} = \frac{1}{z}.}$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $P = 1 + iX$. On a

$$\begin{aligned}\overline{P(e^{i\theta})} &= \overline{1 + ie^{i\theta}} \\ &= \overline{1 + e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}} \\ &= 1 + e^{-i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= e^{-i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{-i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2i\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(1 + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) - i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= (1 - \sin(\theta)) - i\cos(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\overline{P(e^{i\theta})} = (1 - \sin(\theta)) - i\cos(\theta).}$$

5. Le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc A est trigonalisable dans $\mathbb{C}[X]$. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

les λ_i étant les valeurs propres de A, avec multiplicité.
Puisque la trace est invariante par conjugaison, on a :

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.}$$

Remarque

Nous avons ici refait une démonstration de cours ; on pourrait se contenter de répondre que χ_A est scindé et se référer au cours, mais il nous a semblé que le concepteur de sujet espérait ici quelques détails.

6.

6.1. Soit $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$. On a

$$\varphi(X^k, X^\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} e^{i\ell\theta} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)\theta} \,\mathrm{d}\theta = \delta_{k,\ell},$$

où $\delta_{\cdot,\cdot}$ désigne le symbole de Kronecker.
En conclusion :

$$\boxed{\forall (k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2, \quad \varphi(X^k, X^\ell) = \delta_{k,\ell}.}$$

6.2. Soit $a \in \mathbb{C}$, $P, Q, R \in E_n$.

$$\begin{aligned} \varphi(aP + Q, R) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{aP(e^{i\theta}) + Q(e^{i\theta})} R(e^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{a}\,\overline{P(e^{i\theta})} R(e^{i\theta}) + \overline{Q(e^{i\theta})} R(e^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\overline{a}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} R(e^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{Q(e^{i\theta})} R(e^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta \\ &= \overline{a}\varphi(P, R) + \varphi(Q, R). \end{aligned}$$

De même, $\varphi(P, aQ + R) = \varphi(P, R) + a\varphi(Q, R)$.

Enfin,

$$\begin{aligned}\varphi(Q,P) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{Q(e^{i\theta})}P(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{Q(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta})\overline{P(e^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta} = \overline{\varphi(P,Q)}.\end{aligned}$$

Remarque

Ces trois points montrent que φ est une *forme hermitienne*, qui généralise au cas complexe les formes bilinéaires symétriques. Elles ont explicitement été au programme de MP jusqu'en 2014, mais ne le sont plus depuis. Aucune connaissance n'est donc exigible à leur sujet.

6.3. Soit $P \in E_n$. On a

$$\varphi(P,P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta.$$

Puisque, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $\left|P(e^{i\theta})\right|^2 \in \mathbb{R}_+$, la positivité de l'intégrale implique que :

$$\boxed{\forall P \in E_n, \quad \varphi(P,P) \in \mathbb{R}_+.}$$

6.4. Soit $P \in E_n$. Si P est nul, on a évidemment $\varphi(P,P) = 0$. Réciproquement, si $\varphi(P,P) = 0$, alors

$$\int_0^{2\pi} \left|P(e^{i\theta})\right|^2\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Puisque, $\theta \mapsto \left|P(e^{i\theta})\right|^2$ est continue et positive sur $[0,2\pi]$, cela implique que $P(e^{i\theta}) = 0$ pour tout $\theta \in [0,2\pi]$. Autrement dit, P s'annule sur $\mathbb{U}$ et, d'après ce qui a été rappel à la question **3**, P est le polynôme nul.
Ainsi,

$$\boxed{\forall P \in E_n, \quad \varphi(P,P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{C}[X]}.}$$

Remarque

En termes hermitiens, les questions **6.3** et **6.4** montrent que φ est une *forme hermitienne définie positive* sur E_n ; elle définit donc un *produit scalaire (hermitien)* sur cet espace. La question **6.1** montre que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire. Il est inutile de savoir cela pour faire l'exercice mais cela peut aider à en apprécier le fond.

6.5. On note $Q_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $M = \sup_{z\in\mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1. D'après les questions **6.1** et **6.2**, on a :

$$\varphi(Q_0,Q_0) = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell X^\ell\right)$$

$$= \sum_{0 \leq k,\ell \leq n} \overline{a_k} a_\ell \underbrace{\varphi(X^k, X^\ell)}_{=\delta_{k,\ell}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2$$

En conclusion :

$$\boxed{\varphi(Q_0, Q_0) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 .}$$

6.5.2. D'une part, on a $\varphi(Q_0, Q_0) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \geq 1$. D'autre part, on a

$$\varphi(Q_0, Q_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left|Q_0(e^{i\theta})\right|^2}_{\leq M} \mathrm{d}\theta \leq M.$$

Ainsi, si $M < 1$, on a une contradiction entre ces deux inégalités. Il s'ensuit que :

$$\boxed{M \geq 1.}$$

6.5.3. Si $Q_0 = X^n$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\left|Q_0(e^{i\theta})\right|^2 = \left|e^{in\theta}\right|^2 = 1$$

donc $M = 1$.
Réciproquement, si $M = 1$, puisque $\varphi(Q_0, Q_0) \leq M$ et $\varphi(Q_0, Q_0) \geq 1$, on a $\varphi(Q_0, Q_0) = 1$. Mais $\varphi(Q_0, Q_0) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 = 0$ et donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 0$. Autrement dit, $Q_0 = X^n$.
En conclusion :

$$\boxed{M = 1 \Leftrightarrow Q_0 = X^n.}$$

Exercice 3

Remarque: Un exercice déjà tombé...

Cet exercice avait déjà été posé en au concours ECRiCOME 2008 de la filière ECE, avec un énoncé presque identique. Comme quoi, utiliser les annales des filières EC peut être utile à un étudiant de MP, au moins pour ce qui concerne les probabilités discrètes.

1.

1.1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et arithmétique b. Si on pose $\ell = \dfrac{b}{1-a}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = a^{n-1} v_1$$

de sorte que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a^{n-1}\left(u_1 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.}$$

1.2. Il suit de l'expression précédente que :

— si $u_1 = \dfrac{b}{1-a}$, alors la suite (u_n) est constante ;

— sinon,

 — si $a \in \,]-1,1[$, la suite (u_n) converge vers $\dfrac{b}{1-a}$;

 — sinon, la suite (u_n) diverge.

Mise en garde: Une précision qui aurait pu être utile

L'énoncé omet une précision importante pour la résolution de l'exercice : chaque case peut contenir *plusieurs* boules. Il aurait certainement été utile de l'expliciter...

Dans toute la suite, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on notera U_k le numéro de la case dans laquelle tombe la k-ième boule lancée. Les $(U_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ sont donc des vaiid de loi $\mathcal{U}([\![1,N]\!])$.

2. Puisque $n \geq 1$, il y a au moins une case non vide, ce qui signifie que $T_n(\Omega) \subset [\![1,N]\!]$.

— Si $n \geq N$, toutes les cases peuvent être occupées donc $T_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$.

— Si $n < N$, au minimum une case est occupée et au maximum n cases le sont. Dans ce cas, $T_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$.

En conclusion :

$$\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, \min(n,N)]\!].}$$

3. Si $n = 1$, on lance une seule boule. Cette boule tombe dans une des N cases, de sorte que, dans tous les cas, une seule case est occupée. Ainsi :

$$\boxed{T_1 \text{ est (presque-sûrement) constante égale à } 1.}$$

Si $n = 2$, on lance deux boules. Si les deux boules tombent sur une même case, l'événement $(T_2 = 1)$ est réalisé. Sinon, l'événement $(T_2 = 2)$ est réalisé.
On a :

$$(T_2 = 1) = \bigsqcup_{k=1}^{N} (U_1 = k, U_2 = k)$$

donc, par σ-additivité et par indépendance :

$$\mathbf{P}(T_2 = 1) = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(U_1 = k)\mathbf{P}(U_2 = k) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N}.$$

Mais $(T_2 = 2) = \overline{(T_2 = 1)}$ donc

$$\mathbf{P}(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}.$$

En conclusion, la loi de T_2 est donnée par :

$$\boxed{T_2(\Omega) = \{1, 2\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{N}, \quad \mathbf{P}(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}.}$$

4. L'événement $(T_n = 1)$ se réalise si toutes les boules tombent dans la même case. Autrement dit,

$$(T_n = 1) = \bigsqcup_{k=1}^{N} \left[\bigcap_{i=1}^{n} (U_i = k)\right]$$

donc

$$\mathbf{P}(T_n = 1) = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^n = \frac{1}{N^{n-1}}.$$

L'événement $(T_n = 2)$ se réalise si toutes les boules tombent dans deux cases différentes. On a $\binom{n}{2}$ choix pour la paire de cases occupées, puis, ces cases étant fixées, l'événement $(T_n = 2)$ est réalisé pour les suites de lancers amenant ces deux numéros, à l'exclusion des suites constantes. On a $2^n - 2$ telles suites. Chaque suite ayant une probabilité $\frac{1}{N^n}$ de se réaliser, on a :

$$\mathbf{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T_n = 2) = \binom{n}{2} \frac{2^n - 2}{N^n}.}$$

5.
- Si $n > N$, l'événement $(T_n = n)$ ne peut se réaliser car il ne peut y avoir plus de N cases occupées. Dans ce cas, $\mathbf{P}(T_n = n) = 0$.
- Si $n \leq N$, l'événement $(T_n = n)$ se réalise si, et seulement sis les n boules tombent dans des cases distinctes.
  - On a N choix pour la case de la première boule,
  - puis on a $N - 1$ choix pour la case de la deuxième boule,

— ...
— on a $N-(n-1)$ choix pour la case de la dernière boule.

Chaque case ayant une probabilité $\frac{1}{N}$, la probabilité recherchée est donc :

$$\mathbf{P}(T_n = n) = \frac{N}{N} \times \frac{N-1}{N} \times \cdots \times \frac{N-n+1}{N} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathbf{P}(T_n = n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n > N \\ \dfrac{N!}{N^n(N-n)!} & \text{si} \quad n \leq N. \end{cases}}$$

6. Lancer $n+1$ boules revient à d'abord lancer n boules puis à en lancer une dernière. T_n désignant le nombre de cases occupées après n lancers, ou bien la $(n+1)$-ième boule tombe dans l'une des cases déjà occupées, et T_{n+1} sera égale à T_n, ou bien elle occupe une nouvelle case et T_{n+1} augmente de 1 par rapport à T_n. Ainsi, si on applique la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements associé à T_n, on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T_{n+1} = k) &= \sum_{i \in T_n(\Omega)} \mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = i)\, \mathbf{P}(T_n = i) \\ &= \mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = k)\, \mathbf{P}(T_n = k) + \mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = k-1)\, \mathbf{P}(T_n = k-1).\end{aligned}$$

Si $(T_n = k)$ est réalisé, k cases sont occupées donc la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tombe dans l'une des cases déjà occupées est $\frac{k}{N}$. Autrement dit, $\mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = k) = \frac{k}{N}$. De même, si $(T_n = k-1)$ est réalisé, $k-1$ cases sont occupées donc la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tombe dans une cases non occupée est $\frac{N-(k-1)}{N}$. Autrement dit, $\mathbf{P}(T_{n+1} = k | T_n = k-1) = \frac{N-k+1}{N}$.
En conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbf{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbf{P}(T_n = k-1).}$$

7.

7.1. Puisque $T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!] \subset [\![1, n]\!]$, on a $\mathbf{P}(T_n = 0) = 0$ et $\mathbf{P}(T_n = k) = 0$ pour tout $k > n$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T_n = k)\, x^k.}$$

7.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en reportant l'identité établie en **6** dans l'expression de la série génératrice, on a :

$$\begin{aligned}G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(T_{n+1} = k)\, x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N}\mathbf{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbf{P}(T_n = k-1)\right) x^k\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1} k\mathbf{P}(T_n = k)\, x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\mathbf{P}(T_n = k-1)\, x^k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n+1}(k-1)\mathbf{P}(T_n = k-1)\, x^k$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}(T_n = k)\, x^k + \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(T_n = k)\, x^{k+1} - \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(T_n = k)\, x^{k+1}$$

$$= \frac{x}{N}G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N}G_n'(x).$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x).}$$

7.3. Les séries génératrices impliquées étant polynomiales, elles sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1 - 2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x - x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x)$$

donc, en évaluant en 1, il vient :

$$G_{n+1}'(1) = -\frac{1}{N}G_n'(1) + G_n(1) + G_n'(1)$$

mais $G_n(1) = 1$, $G_n'(1) = \mathbf{E}[T_n]$ et $G_{n+1}'(1) = \mathbf{E}[T_{n+1}]$ donc :

$$\boxed{\mathbf{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbf{E}[T_n] + 1.}$$

7.4. La suite $(\mathbf{E}[T_n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $a = \left(1 - \frac{1}{N}\right)$ et de raison arithmétique $b = 1$ donc $\dfrac{b}{1-a} = N$ et, d'après ce qui a été établi à la question **1**, on a :

$$\mathbf{E}[T_n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(\mathbf{E}[T_1] - N) + N.$$

Puisque $\mathbf{E}[T_1] = 1$, on a donc :

$$\mathbf{E}[T_n] = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}(1 - N) + N = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{E}[T_n] = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right).}$$

et, puisque $\left|\dfrac{N-1}{N}\right| < 1$, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}[T_n] = N.}$$

7.5. La question est étrangement formulée et le terme «plein» est ici malheureux car il laisse à penser qu'une case ne peut plus recevoir de boules, ce qui entretient la confusion initialement observée. Le terme «non vide» aurait été bien plus adéquat. Ceci étant dit, nous allons faire preuve de bonne volonté et répondre à ce qui semble être l'intention du concepteur de sujet.

Si on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la case numéro i est non vide après n lancers et 0 sinon, le nombre de cases non vides est

$$T_n = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Chaque X_i est une variable aléatoire de Bernoulli. Déterminons son paramètre. L'événement $(X_i = 0)$ se réalise si, et seulement si, toutes les boules tombent dans des cases aux numéros autres que i. Autrement dit,

$$(X_i = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (U_k \neq i).$$

Par indépendance des U_k, on a donc :

$$\mathbf{P}(X_i = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(U_k \neq i) = \prod_{k=1}^{n} \frac{N-1}{N} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad X_i \sim \mathscr{B}\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

donc

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad \mathbf{E}[X_i] = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}[T_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{N} \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right)$$

donc, on retrouve :

$$\boxed{\mathbf{E}[T_n] = N\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right).}$$

Remarque: Un peu d'interprétation

L'exercice ne demande pas d'interpréter l'égalité $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}[T_n] = N$, mais cela n'empêche pas de le faire : si le nombre de boules tirées devient très grand, en moyenne toutes les cases seront occupées. On admettra que c'est assez intuitif...

Exercice 4

1. Les matrices
$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
sont équitables.

2. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est équitable, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}$. Mais si $-A$ est équitable, alors $-a_{i,j} = (-a_{i,k})(-a_{k,j}) = a_{i,k}a_{k,j} = a_{i,j}$. Ainsi, $a_{i,j} = 0$. Ceci étant vrai pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a $A = 0_n$. Puisque 0_n est une matrice équitable, on peut conclure :
$$\boxed{\text{La seule matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } A \text{ et } -A \text{ sont équitables est la matrice nulle.}}$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ équitable. Pour tout $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$, on a :
$$[A^\top]_{i,j} = a_{j,i} = a_{j,k}a_{k,i} = [A^\top]_{k,j}[A^\top]_{i,k} = [A^\top]_{i,k}[A^\top]_{k,j}$$
donc la matrice $A^\top$ est équitable.
Ainsi,
$$\boxed{A \text{ équitable } \Rightarrow A^\top \text{ équitable.}}$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ équitable. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :
$$a_{i,i} = a_{i,j}a_{j,i} \quad \text{et} \quad a_{j,j} = a_{j,i}a_{i,j}.$$
Par commutativité du produit dans $\mathbb{K}$, on a donc :
$$\boxed{A \text{ équitable } \Rightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,i} = a_{j,j}.}$$

5. Soit A équitable non nulle et $k \in [\![1, n]\!]$. En prenant $i = j = k$ dans la relation d'équité, puisque A est équitable, on a :
$$a_{k,k} = a_{k,k}a_{k,k} = a_{k,k}^2$$
donc $a_{k,k} \in \{0, 1\}$.
Si $a_{k,k} = 0$. Alors, d'après **4**, A est à diagonale nulle. Mais alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :
$$a_{i,j} = a_{i,i}a_{i,j} = 0$$
donc A est la matrice nulle, une contradiction.
En conclusion :
$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_{k,k} = 1.}$$

6. Soit B équitable non nulle. D'après **5**, comme A est équitable non nulle, les coefficients diagonaux de A sont égaux à 1. De même pour B. Alors, les coefficients diagonaux de $A + B$ sont égaux à 2, et donc, toujours d'après **5**, $A + B$ ne peut pas être équitable.
En conclusion :

$$\boxed{\text{La somme de deux matrices équitables non nulles n'est pas équitable.}}$$

7. S'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,j} = 0$, alors

$$a_{i,i} = a_{i,j}a_{j,i} = 0,$$

une contradiction avec le résultat établi en **5**.
Ainsi,

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} \neq 0.}$$

8. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a :

$$a_{i,j} = a_{i,1}a_{1,j}$$

mais

$$a_{1,j}a_{j,1} = a_{1,1} = 1$$

or $a_{j,1} \neq 0$ d'après **7** donc

$$a_{1,j} = \frac{1}{a_{j,1}}$$

et donc

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \frac{a_{i,1}}{a_{j,1}}.}$$

9. Quelques résultats remarquables

9.1. D'après **8**, on a :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} & \frac{a_{1,1}}{a_{2,1}} & \cdots & \frac{a_{1,1}}{a_{n,1}} \\ \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & \frac{a_{2,1}}{a_{2,1}} & & \frac{a_{2,1}}{a_{n,1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} & \frac{a_{n,1}}{a_{2,1}} & & \frac{a_{n,1}}{a_{n,1}} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}} \\ \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{a_{2,1}} \\ \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{a_{2,1}} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1}}{a_{n,1}} \\ \vdots \\ \frac{a_{n,1}}{a_{n,1}} \end{pmatrix} \right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} \right) = 1.$$

On a donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1.}$$

9.2. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$[A^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j} = na_{i,j}$$

donc

$$\boxed{A^2 = nA.}$$

9.3. $X^2 - nX = X(X-n)$ annule A d'après **9.2** et $n \geq 2$ donc $X(X-n)$ est scindé à racines simples. Il s'ensuit que :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

9.4. Puisque $X(X-n)$ annule A, on sait que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, n\}$. Puisque A est diagonalisable et non nulle, 0 ne peut être une valeur propre unique donc n est une valeur propre. Et puisque $n \geq 2$ et $\mathrm{rg}(A) = 1 < 2$, A est non inversible donc 0 est une valeur propre. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, n\}$.

D'après le théorème du rang, $\dim E_0(A) = \dim \ker(A) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$. A étant diagonalisable, on a $\dim E_n(A) = 1$. Ainsi, n est valeur propre de multiplicité (géométrique) 1 et 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$ donc :

$$\boxed{A \text{ est semblable à } \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0).}$$

9.5. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a $J^2 = nJ$ donc $X(X-n)$ annule J. Il s'ensuit que J est diagonalisable. Puisque J n'est pas diagonale, on a $\mu_J = X(X-n)$ donc $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$. D'autre part, $\mathrm{rg}(J) = 1$ donc, en reprenant le raisonnement fait pour A à la question **9.4**, J est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

Par transitivité de la relation de similitude :

$$\boxed{A \text{ est semblable à } J.}$$

10. Si A est symétrique, alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a :

$$1 = a_{i,i} = a_{i,j}a_{j,i} = a_{i,j}^2$$

donc $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$.

Réciproquement, supposons que tous les coefficients de A sont dans $\{-1, 1\}$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Puisque $a_{i,j}a_{j,i} = a_{i,i} = 1$, alors $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont de même signe, et donc égaux.

En conclusion :

$$\boxed{A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \iff \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} \in \{-1, 1\}.}$$

11. Soit A équitable symétrique non nulle. Tous ses coefficients sont donc dans $\{-1, 1\}$. Puisque $\mathrm{rg}(A) = 1$ d'après **9.1**, chaque colonne est égale à la première ou à son opposé. Puisque tous les coefficients diagonaux de A sont égaux à 1, si on choisit la première colonne, les colonnes suivantes sont entièrement déterminées. Et comme le coefficient $a_{1,1}$ est égal à 1, on a 2^{n-1} choix pour les autres coefficients, et donc au plus 2^{n-1} choix pour A.

Supposons que la famille $(a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1})$ est fixée dans $\{-1, 1\}^n$, avec $a_{1,1} = 1$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_{i,j} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{j,1}} \in \{-1, 1\}$. Alors, pour tout $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$,

$$a_{i,k}a_{k,j} = \frac{a_{i,1}}{a_{k,1}} \frac{a_{k,1}}{a_{j,1}} = \frac{a_{i,1}}{a_{j,1}} = a_{i,j}$$

donc la matrice A ainsi construite est équitable non nulle à coefficients dans $\{-1, 1\}$; elle est donc symétrique.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } 2^{n-1} \text{ matrices équitables symétriques non nulles.}}$$

12. Soit G un sous-groupe fini de cardinal N de $(\mathbb{K}^\star, \times)$. D'après **8**, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = \dfrac{a_{i,1}}{a_{j,1}}$ donc la matrice A est entièrement déterminée par le choix de sa première colonne. Le coefficient $a_{1,1}$ étant égal à 1 d'après **5**, on a N^{n-1} choix pour les autres coefficients de la première colonne.

Une fois cette colonne étant fixée, le même raisonnement que celui effectué à la question **10** montre que l'on peut construire une matrice équitable à coefficients dans G avec cette colonne pour première colonne.

En conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } N^{n-1} \text{ matrices équitables à coefficients dans } G.}$$

13. Puisque $\mathbb{U}_2 = \left\{z \in \mathbb{K} \,\middle|\, z^2 = 1\right\} = \{-1, 1\}$, il y a $2^{2-1} = 2$ matrices de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{U}_2$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

*** Fin du sujet ***