E3A - MPI 2024 - Mathématiques

Durée : 4h

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
On note, pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

Questions de cours

1. Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

2. En déduire le tableau des variations de la fonction arctan ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaître sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.

3. Justifier que arctan est élément de E et donner $N_0(\arctan)$.

4. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan(v(t))$.
On rappelle que la dérivée de la fonction composée de deux fonctions u et v dérivables est la fonction définie par $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ sur un intervalle correctement choisi.

5. Déterminer une expression simple de la fonction $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

*****

6. Soit f une fonction de E.

6.1. Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \arctan(xt)\dfrac{f(f)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6.2. On pose, pour tout réel x :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(xt)\frac{f(f)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E.

6.3. Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.

7. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E.

8. Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

9. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h.

9.1. Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}$.

9.2. Montrer que h appartient à E.

10. Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

10.1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

10.2. Pour tout réel x strictement positif, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.

10.3. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

10.4. Une autre expression de g'.

10.4.1. On fixe x, réel de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F(T) = \dfrac{1}{(1 + x^2T)(1 + T)}$.

10.4.2. Montrer que sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

10.4.3. Donner alors l'expression de g' sur $]0, +\infty[$.

10.5. Donner le tableau des variations et l'allure de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}$.
On précisera ses éventuelles asymptotes et son comportement au voisinage de 0.

Exercice 2

Notations pour l'exercice :

- i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
- Pour tout entier naturel non nul n, on notera $E_n = \mathbb{C}_n[X]$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Questions préliminaires

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ ainsi $f = g + ih$.
Montrer que $\overline{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'on a : $\forall z \in \mathbb{U}$, $P(z) = 0$.
Justifier que P est le polynôme nul.

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $z \in \mathbb{U}$ si, et seulement si, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

4. Soit $P = 1 + iX$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\overline{P(e^{i\theta})}$.

5. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que la trace de la matrice A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

*****

Soit n un entier naturel non nul.

6. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E_n, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

6.1. Soient k et ℓ deux entiers naturels de $[\![0, n]\!]$. Évaluer $\varphi(X^k, X^\ell)$.

6.2. Soient $a \in \mathbb{C}$ et P, Q, R trois éléments de E_n. Montrer que l'on a :

- $\varphi(aP + Q, R) = \overline{a}\varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$
- $\varphi(P, aQ + R) = a\varphi(P, Q) + \varphi(P, R)$
- $\varphi(Q, P) = \overline{\varphi(P, Q)}$.

6.3. Soit $P \in E_n$. Montrer que $\varphi(P, P)$ est un réel positif ou nul.

6.4. Soit $P \in E_n$. Prouver l'équivalence : $\varphi(P, P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{C}[X]}$.

6.5. Soit Q_0 un polynôme de E_n avec $Q_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $M = \sup_{z \in \mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1. Calculer $\varphi(Q_0, Q_0)$ à l'aide des coefficients de Q_0.
On pourra utiliser les questions **6.2** et **6.1**.

6.5.2. Démontrer que $M \geq 1$.

6.5.3. Prouver que $M = 1$ si, et seulement si, $Q_0 = X^n$.

Exercice 3

Question de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1.1. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

1.2. Préciser le comportement de u à l'infini.

*****

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.
Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.
On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geq 2$.

4. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}(T_n = 1)$ et $\mathbf{P}(T_n = 2)$.

5. Calculer $\mathbf{P}(T_n = n)$.
On pourra distinguer les cas $n \leq N$ et $n > N$.

6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\mathbf{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\mathbf{P}(T_n = k-1).$$

7. On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T_n = k)\, x^k.$$

7.1. Montrer que $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T_n = k)\, x^k$.

7.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x).$$

7.3. En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbf{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbf{E}[T_n] + 1.$$

7.4. En déduire la valeur de $\mathbf{E}[T_n]$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

7.5. Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la i-ème cas est pleine, 0 sinon.

Exercice 4

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que A est équitable si :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, \quad a_{i,j} = a_{i,k}a_{k,j}.$$

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.

2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles : A est équitable et $-A$ est équitable.

3. Démontrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.

4. On suppose que A est équitable. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Calculer $a_{k,k}$.

6. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.

7. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \neq 0$.

8. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, exprimer $a_{i,j}$ à l'aide de $a_{i,1}$ et $a_{j,1}$.

9. **Quelques résultats remarquables.**

9.1. Montrer que A est de rang 1.

9.2. Calculer A^2.

9.3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

9.4. Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

9.5. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

10. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.

12. Si G est un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.

13. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

*** Fin du sujet ***